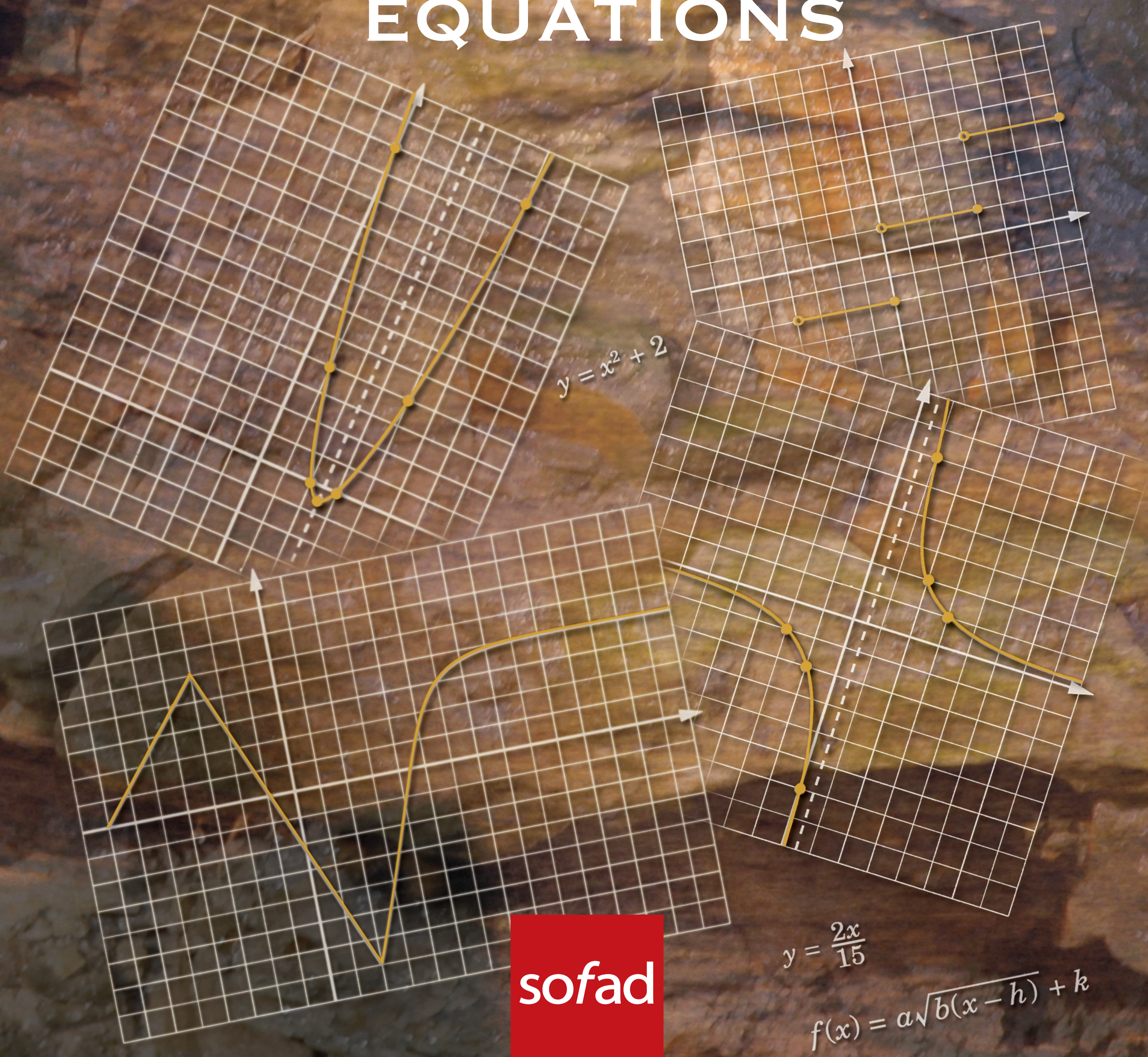
MAT-5106-1

Fonctions réelles et équations



sofad

MAT-5106-1

FONCTIONS RÉELLES ET ÉQUATIONS

sofad

Coordonnateur des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédactrice : Louise Allard

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseure linguistique : Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Première édition : 2007

Dépôt légal — 2007

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque nationale et Archives Canada

ISBN 978-2-89493-339-8

TABLE DES MATIÈRES

Présentation de l'ordinogramme 0.4
Ordinogramme du programme 0.5
Comment utiliser ce guide? 0.6
Introduction générale 0.9
Objectifs intermédiaires et terminaux du module 0.11
Épreuve diagnostique sur les préalables 0.15
Corrigé de l'épreuve diagnostique sur les préalables 0.19
Analyse des résultats de l'épreuve diagnostique 0.21
Suivez-vous ce cours en formation à distance? 0.23

SOUS-MODULES

1. Effets de la variation des paramètres d'une fonction réelle 1.1
2. Graphique cartésien d'une fonction réelle 2.1
3. Caractéristiques d'une fonction réelle 3.1
4. Résolution d'équations de certaines fonctions réelles 4.1
5. Réciproque d'une fonction réelle 5.1
6. Règle d'une fonction réelle 6.1
7. Résolution de problèmes 7.1

Synthèse finale 8.1
Corrigé de la synthèse finale 8.24
Objectifs terminaux 8.41
Épreuve d'autoévaluation 8.45
Corrigé de l'épreuve d'autoévaluation 8.61
Analyse des résultats de l'épreuve d'autoévaluation 8.71
Évaluation finale 8.72
Glossaire 8.73
Liste des symboles 8.79
Bibliographie 8.80

Activités de révision 9.1

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

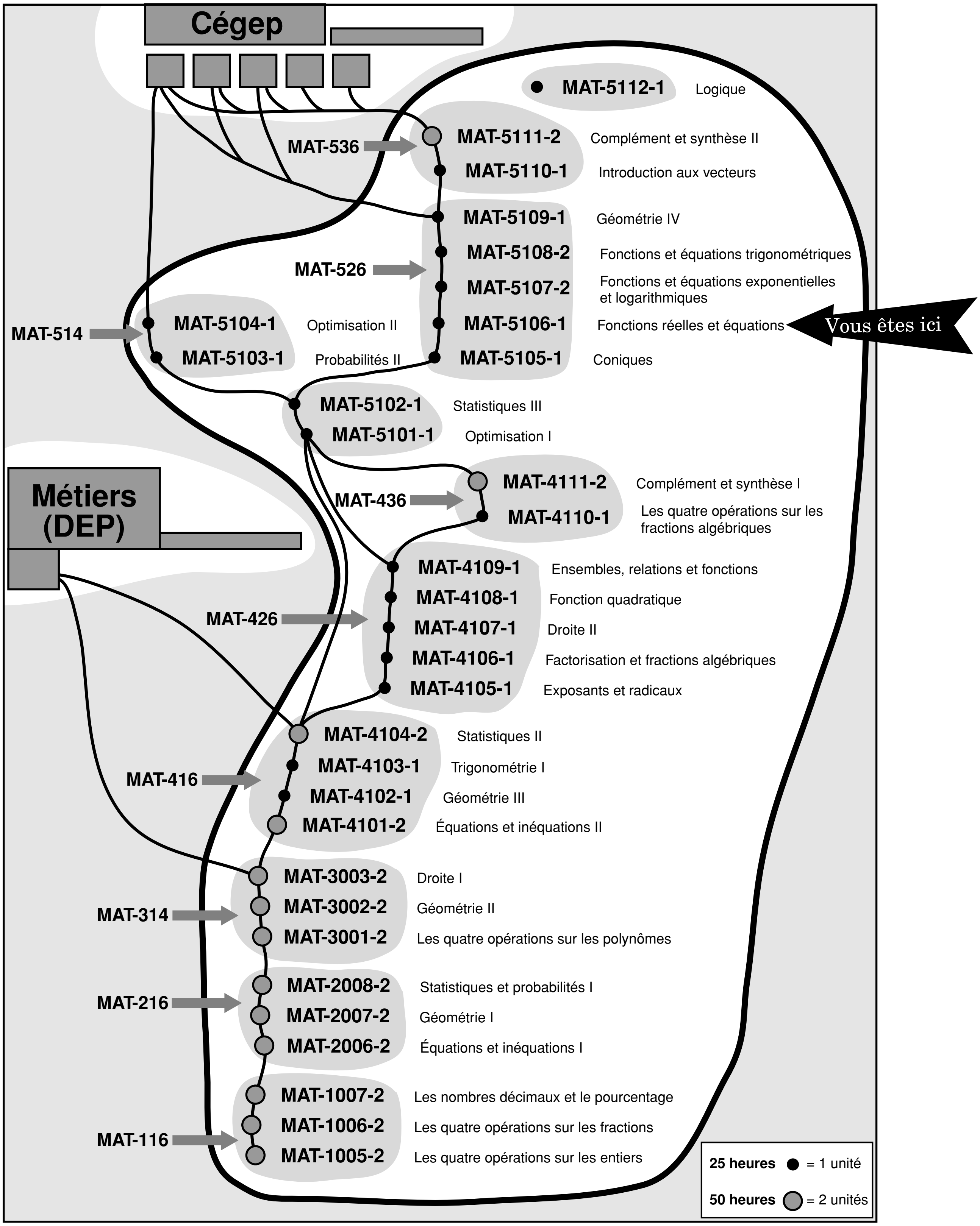
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route 4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

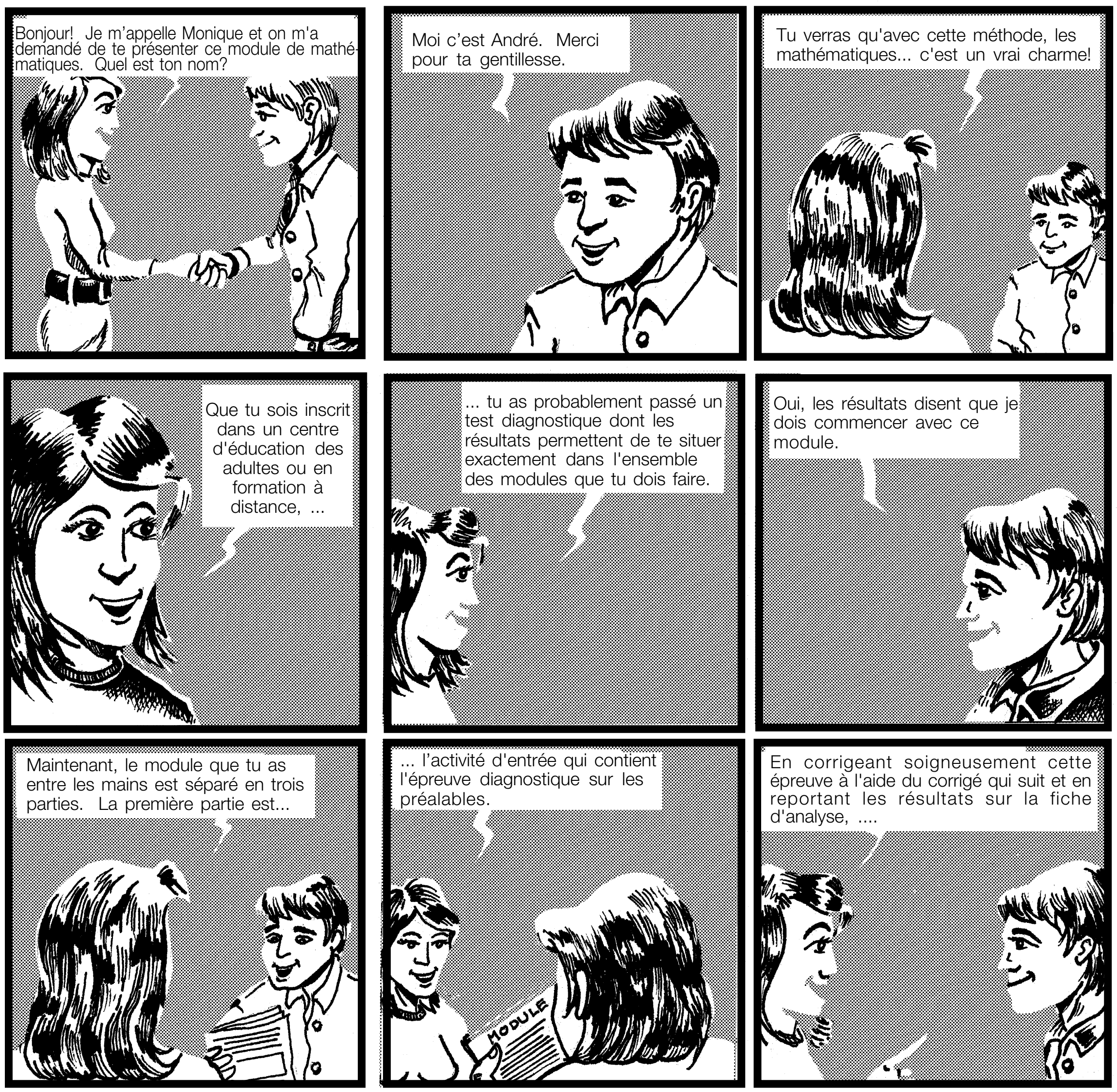
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?



DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathé-matiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

FONCTIONS RÉELLES ET ÉQUATIONS

L'étude des fonctions réelles est une suite logique à l'étude des relations que vous avez abordée dans vos cours précédents.

Le sous-module 1 est amorcé par une brève révision des notions de base sur les fonctions et de leurs diverses formes de représentation pour ensuite aborder l'étude par comparaison graphique, le rôle des différents paramètres a, b, h et k ainsi que les règles de correspondance des six fonctions à l'étude, soit les fonctions affine, quadratique, valeur absolue, partie entière, racine carrée et rationnelle.

Dans le sous-module 2, nous utiliserons les transformations occasionnées par la modification de un ou de plusieurs des paramètres, vus dans le sous-module précédent, en combinaison avec la représentation graphique de chacune des six fonctions de base pour représenter graphiquement les fonctions transformées dans des intervalles donnés. Cette étude nous permettra également de déterminer les coordonnées de couples transformés par la modification de un ou de plusieurs paramètres.

Le sous-module 3 nous permettra d'interpréter les différentes caractéristiques graphiques que vous connaissez déjà à ces nouvelles fonctions. Dans le sous-module 4, nous étudierons comment résoudre des équations correspondant à une fonction réelle afin de déterminer des points précis comme, par exemple, les zéros.

Le sous-module 5 nous fera découvrir la réciproque des fonctions affine, quadratique et racine carrée définies en compréhension. Toujours en utilisant la notion de réciproque, vous découvrirez comment transformer le graphique d'une fonction réelle pour obtenir sa réciproque. Vous déterminerez également si la réciproque obtenue possède la caractéristique graphique d'être fonctionnelle ou non.

Dans le sous-module 6, nous étudierons comment déterminer la règle des fonctions affine, quadratique, valeur absolue et racine carrée définies à partir de données pertinentes ou de son graphique cartésien.

Enfin, le sous-module 7 nous fera réviser tous les acquis par la résolution de problèmes nécessitant l'application des notions liées aux fonctions réelles étudiées.

La notion de fonction est primordiale en mathématiques. Cette étude de six fonctions réelles vous donnera les connaissances nécessaires à la poursuite de votre formation en mathématiques.

Votre travail se devra d'être assidu et constant : lecture attentive et étude de la théorie, examen soutenu des exemples présentés ainsi qu'une résolution rigoureuse des exercices. Voilà le secret de la démarche qui devrait vous permettre de bien assimiler les nouvelles notions que vous verrez dans ce cours!

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5106-1 comporte huit objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombre d'heures*	% (évaluation)
1 et **2**	1	5 %
3	3	10 %
4	5	20 %
5	4	20 %
6	4	15 %
7	3	10 %
8	4	20 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Détermination d'une relation fonctionnelle

   Distinguer une fonction d'une relation à l'aide de ses caractéristiques et déterminer si une relation est fonctionnelle à partir de ses caractéristiques.

2. Détermination des liens entre la variation d'un paramètre et la représentation graphique

Déterminer les liens qui existent entre la variation d'un paramètre de la règle d'une fonction réelle et la transformation du graphique cartésien lui correspondant pour diverses fonctions : affine, quadratique, valeur absolue, partie entière, racine carrée et rationnelle. Distinguer une fonction d'une relation à l'aide de ses caractéristiques et à partir d'une relation définie en extension, en compréhension ou par graphique cartésien, déterminer si cette relation donnée est fonctionnelle ou non.

3. Représentation graphique d'une fonction réelle

À partir de la règle d'une fonction réelle, tracer le graphique cartésien représentant cette dernière. Les ensembles de départ et d'arrivée sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ donnés sous forme d'intervalles continus.

4. Détermination du type et des caractéristiques d'une fonction réelle

À partir de la règle ou du graphique cartésien d'une fonction réelle, indiquer la fonction et en déterminer les caractéristiques. Les caractéristiques étudiées sont :

- **le domaine et l'image;**
- **l'image de certaines valeurs du domaine;**
- **les éléments du domaine associés à une image donnée;**
- **les coordonnées du sommet;**
- **les zéros;**
- **l'ordonnée à l'origine;**
- **la pente ou le taux de variation;**
- **les équations des asymptotes;**
- **l'équation de l'axe de symétrie;**
- **le minimum ou le maximum;**
- **les intervalles de croissance et de décroissance avec justification;**
- **le signe avec justification graphique.**

5. Résolution d'équations

Résoudre l'équation correspondant à une fonction réelle, la fonction rationnelle et la fonction partie entière étant exclues.

6. Réciproque d'une fonction réelle

Déterminer en compréhension la réciproque d'une fonction affine, quadratique ou racine carrée définie en compréhension et déterminer si la réciproque d'une fonction réelle est fonctionnelle. Déterminer graphiquement la réciproque d'une fonction réelle définie à l'aide de son graphique ou en compréhension.

7. Règle d'une fonction réelle

Déterminer la règle d'une fonction réelle définie à partir de données pertinentes ou de son graphique cartésien, la fonction rationnelle et la fonction partie entière étant exclues.

8. Résolution de problèmes

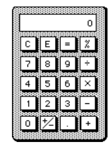
Résoudre des problèmes nécessitant l'application des notions liées aux fonctions réelles. La résolution peut exiger de décrire certaines caractéristiques d'une fonction, de représenter graphiquement une fonction, de calculer la distance entre certains points du graphique, de déterminer la règle pour modéliser une situation, de déterminer la réciproque d'une fonction ou de comparer certaines caractéristiques de diverses fonctions dans un intervalle donné.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation d'une calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

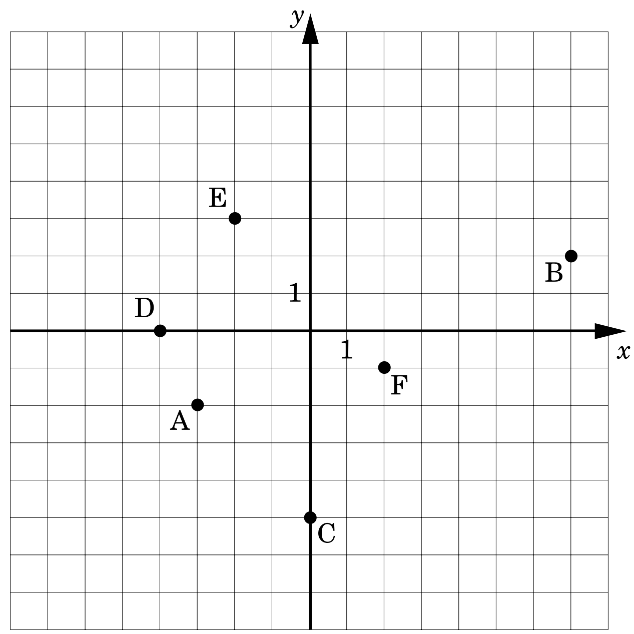
1. Soit le système de coordonnées cartésiennes ci-contre.

   a) Donnez les coordonnées des points suivants.

      A(……, ……)

      B(……, ……)

      C(……, ……)



   b) Quel est le point dont l'abscisse est -2? ....

   c) Quel est le point situé sur l'axe des ordonnées? ....

2. Soit une droite qui passe par les points $(1, -2)$ et $(-3, -10)$. Déterminez l'équation de cette droite sous la forme $y = mx + b$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Soit l'équation quadratique $f(x) = -x^2 - 3x + 2$.

a) Trouvez les zéros de cette équation.

....

....

....

....

....

....

....

....

b) Trouvez la forme canonique de l'équation donnée.

....

....

....

....

c) Déterminez les coordonnées du sommet de l'équation donnée.

....

d) Ce sommet est-il un maximum ou un minimum? Dites pourquoi.

....

....

4. Complétez le tableau suivant où l'ensemble solution est donné sous forme d'intervalle ou en compréhension. $\mathbb{R}$ est l'ensemble de référence.

Sous forme d'intervalle	**En compréhension**
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$
$]0, 1[$	
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
$[5, \infty$	
	$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 6\}$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) A(−3, −2), B(7, 2), C(0, −5). b) E c) C

2. Soit $(x_1, y_1) = (1, -2)$ et $(x_2, y_2) = (-3, -10)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10-(-2)}{-3-1} = \frac{-10+2}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{y+2}{x-1}$$

$$1(y+2) = 2(x-1)$$

$$y + 2 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 - 2$$

$$y = 2x - 4$$

3. a) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$, alors $a = -1$, $b = -3$ et $c = 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-1)(2) = 9 + 8 = 17 > 0 \Rightarrow 2$ racines réelles

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{17}}{2(-1)} = \frac{3 \pm 4{,}12}{-2}$$

$$x' = \frac{3 + 4{,}12}{-2} = -3{,}56; \; x'' = \frac{3 - 4{,}12}{-2} = 0{,}56$$

$\therefore$ Les zéros sont −3,56 et 0,56.

b) $f(x) = -x^2 - 3x + 2$

$$f(x) = -\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 2 + \frac{9}{4}$$

$$f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{8}{4} + \frac{9}{4}$$

$$f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

c) $(h, k) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{17}{4}\right)$

d) Puisque $a = -1 < 0$, alors le sommet est un maximum.

4.

Sous forme d'intervalle	**En compréhension**
$]2, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$
$]0, 1[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
$-\infty, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
$[5, \infty$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$
$[4, 6[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 6\}$
$[-1, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

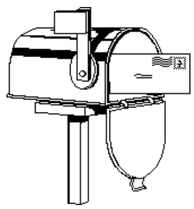
ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			9.1	9.4	Sous-module 1
b)			9.1	9.4	Sous-module 1
c)			9.1	9.4	Sous-module 1
2.			9.1	9.4	Sous-module 6
3. a)			9.2	9.15	Sous-module 2
b)			9.2	9.15	Sous-module 2
c)			9.2	9.15	Sous-module 2
d)			9.2	9.15	Sous-module 2
4.			9.3	9.24	Sous-module 2

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités proposées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».

Corrigé



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5106-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5106-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

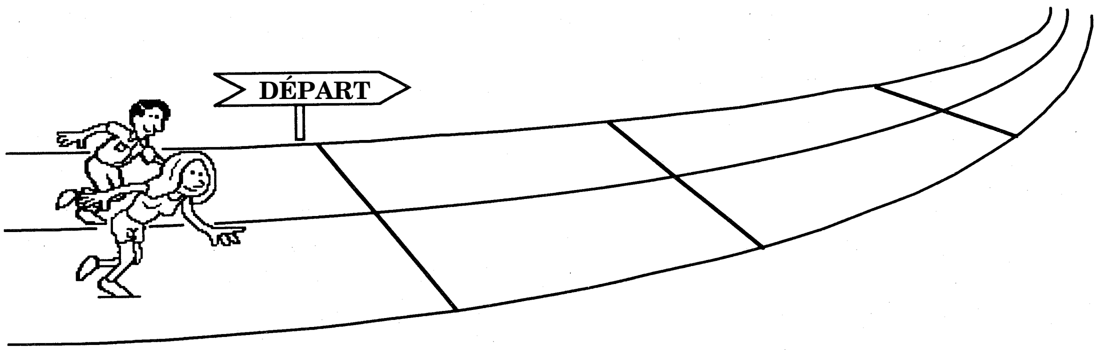
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 3.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 4 à 7.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 7.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

EFFETS DE LA VARIATION DES PARAMÈTRES D'UNE FONCTION RÉELLE

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Jeux d'ombres

Lors d'une promenade familiale, durant une belle soirée d'hiver, Mégan réalise que la projection de son ombre sur le banc de neige varie constamment. Elle demande à ses parents : « Pourquoi est-ce que mon ombre varie? » Son grand frère lui répond : « C'est parce que tu grandis! » Mégan sait très bien que son frère se moque d'elle, car sa taille ne peut varier durant un si bref instant. Son frère se paie encore sa tête, comme d'habitude! Plus sérieusement, ses parents lui expliquent que c'est l'angle d'inclinaison formé entre le lampadaire et la position au sol de Mégan qui varie et modifie ainsi la projection de son ombre sur la neige.

Nous réalisons que la modification d'une seule donnée, soit l'angle d'inclinaison, influence la projection de l'image de Mégan. Il est possible d'agir de la même façon sur la ***règle de correspondance*** d'une ***fonction*** en modifiant un ou plusieurs ***paramètres*** et ainsi obtenir un graphique différent et même prévisible. C'est ce que nous allons traiter dans ce sous-module.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de déterminer, à partir d'une *relation* définie en *extension*, en *compréhension* ou par *graphique cartésien*, si cette relation est fonctionnelle ou non. Vous devrez également être capable de distinguer une fonction d'une relation à l'aide de ses caractéristiques. De plus, vous devrez être capable de déterminer les liens qui existent entre la variation d'un paramètre de la règle d'une fonction réelle et la transformation du graphique cartésien lui correspondant pour diverses fonctions (*fonction affine*, *fonction quadratique*, *fonction valeur absolue*, *fonction partie entière*, *fonction racine carrée*, fonction rationnelle).

Avant d'aborder l'étude des différentes fonctions, revoyons quelques notions et définitions.

Soit les ensembles A = {0, 2, 4} et B = {0, 5}.

Le **produit cartésien** d'un ensemble A par un ensemble B est l'ensemble de tous les couples dont la première coordonnée appartient à l'ensemble A et la deuxième à l'ensemble B. L'**ensemble de départ** du produit cartésien A × B est le premier ensemble, soit A = {0, 2, 4} et son **ensemble d'arrivée** est le deuxième ensemble, soit B = {0, 5}. Le produit cartésien A × B correspond à l'ensemble suivant et est représenté comme suit : A × B = {(0, 0), (0, 5), (2, 0), (2, 5), (4, 0), (4, 5)}.

Une **relation** $\mathcal{R}$ de A vers B est un sous-ensemble d'un produit cartésien A × B dans lequel $\mathcal{R}$ est un ensemble de tous les couples définis par une **règle de correspondance**, c'est-à-dire une règle d'association qui permet de déterminer quels couples du produit cartésien font partie de la relation. Donc, tout ensemble de couples de valeurs constitue une relation. En complétant l'exemple précédent avec la règle de correspondance « *... est supérieur à ...* », nous obtenons la relation $\mathcal{R}$ = {(2, 0), (4, 0)}. Le ***domaine*** d'une relation est le sous-ensemble de tous les éléments de l'ensemble de départ qui contient les premières composantes des couples de la relation et qui est représenté par dom $\mathcal{R}$ = { 2, 4}. L'***image*** d'une relation est le sous-ensemble de tous les éléments de l'ensemble d'arrivée qui contient les deuxièmes composantes des couples de la relation et qui est représenté par ima $\mathcal{R} = \{0\}$.

Une **fonction** est une relation particulière qui associe des éléments de l'ensemble de départ à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. Ce qui signifie que la première composante des couples ne se répète pas avec une deuxième composante différente. Dans une représentation à l'aide d'un graphique sagittal, il ne doit pas y avoir plus d'une flèche qui origine d'un élément de l'ensemble de départ. Dans un graphique cartésien, une fonction est représentée par un ensemble de points ou une courbe dont toute ***droite*** verticale tracée sur un tel graphique ne rencontre jamais plus d'un point. Une ***variable dépendante*** y est **fonction** d'une ***variable indépendante*** x si, à toute valeur de x correspond au plus une valeur de y. Les définitions ci-haut du domaine et de l'image s'appliquent également aux fonctions.

Exemple 1

Soit A = {–8, 0, 8} et B = {–2, 0, 3}.

Représentons le produit cartésien B par A en extension.

B × A = {(–2, –8), (–2, 0), (–2, 8), (0, –8), (0, 0), (0, 8), (3, –8), (3, 0), (3, 8)}

Soit $\mathcal{R}$ la relation $\{(x, y) \in \text{B} \times \text{A} \mid y = x^3\}$. Nous obtenons : $\mathcal{R} = \{(-2, -8), (0, 0)\}$.

La relation obtenue est bien une fonction, car il n'y a aucune répétition de la première composante.

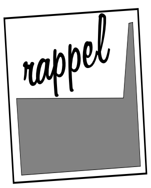
Il est important de savoir reconnaître une fonction, peu importe la représentation utilisée.

Résumons le tout!

Une **fonction** est une relation qui fait correspondre les éléments de l'ensemble de départ à **au plus un** élément de l'ensemble d'arrivée.

Si A est l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée, alors la notation fonctionnelle est la suivante :

$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$
$$x \mapsto \text{règle de correspondance.}$$



Une relation $\mathcal{R}$ de A vers B peut se représenter :

- *sous forme de graphique sagittal,*
- *sous forme de graphique cartésien,*
- *en extension,*
- *en compréhension.*

Pour déterminer si une relation est une fonction, nous devons :

1° nous assurer qu'il y a au plus une flèche qui part d'un élément quelconque de l'ensemble de départ si elle est représentée sous forme de graphique sagittal;

2° nous assurer qu'un x quelconque des couples (x, y) de la relation ne se répète pas si elle est représentée en extension;

3° nous assurer qu'aucune droite verticale ne contient plus de un point appartenant à la relation si elle est représentée graphiquement;

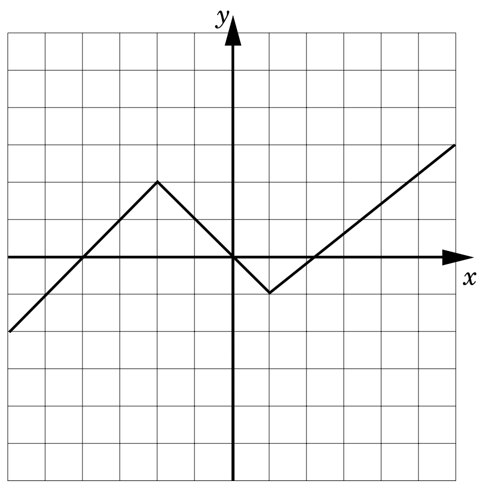
4° la représenter sous l'une des trois formes précédentes et procéder en conséquence si elle est représentée en compréhension.

Saurez-vous distinguer les fonctions?

Exercice 1.1

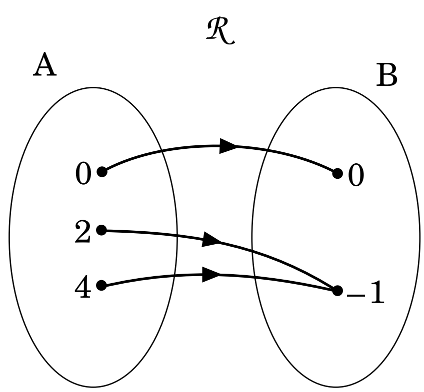
Dites si les relations suivantes sont des fonctions et expliquez brièvement pourquoi.

1.



2. $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

3.



4. $\mathcal{R} = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

5. $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{3}{4}\right\}$

....

....

6. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 4\}$

....

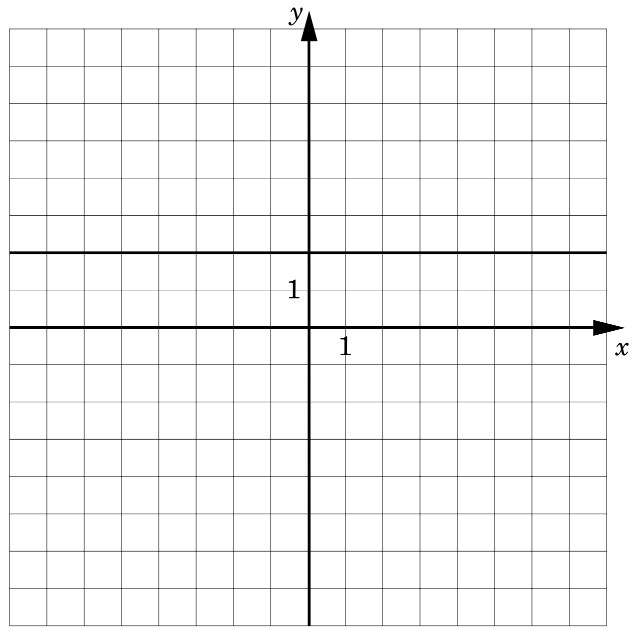
....

Les équations de base d'une fonction, quelle qu'elle soit, contiennent des ***variables*** et des paramètres. Les variables sont les lettres x et y alors que les paramètres sont les autres lettres que nous retrouvons dans la fonction.

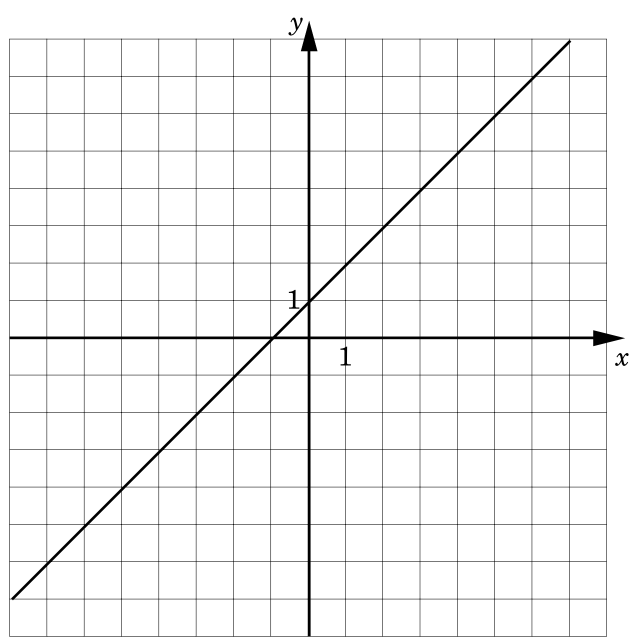
Nous savons qu'en faisant varier la valeur de la variable x, nous obtenons une valeur différente de $f(x)$ et le couple ainsi déterminé se retrouve toujours sur la même représentation graphique. Toutefois, en modifiant la valeur d'un paramètre, nous obtenons un graphique de la même nature que le précédent mais différent. C'est pourquoi nous définissons un **paramètre** comme un coefficient numérique qui détermine la position d'une fonction dans un graphique cartésien.

Dans la règle de correspondance d'une ***fonction*** réelle ***de base***, nous pouvons retrouver jusqu'à quatre paramètres différents représentés symboliquement par les lettres a, b, h et k. Voici les principales représentations graphiques des fonctions que vous avez déjà vues accompagnées de leur ***équation*** de base. Portez une attention particulière à la position de chacun des paramètres.

- Fonction constante (degré 0) : $f(x) = k$.

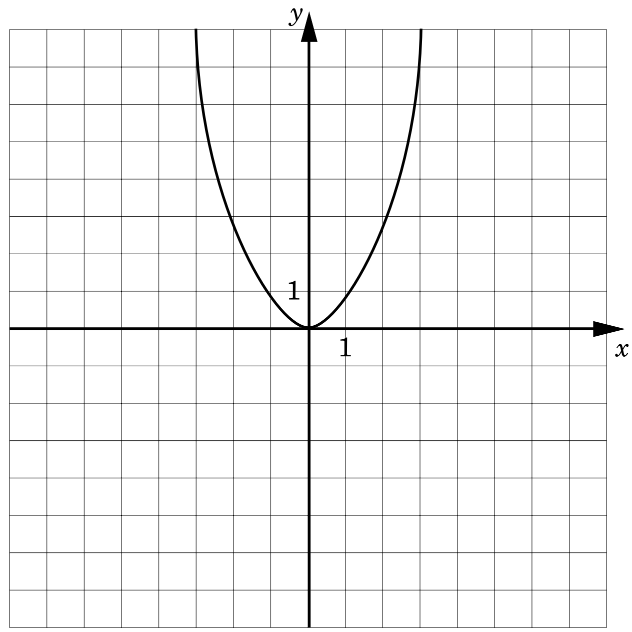


- Fonction affine (degré 1) : $f(x) = ax + k$ où $a \neq 0$.

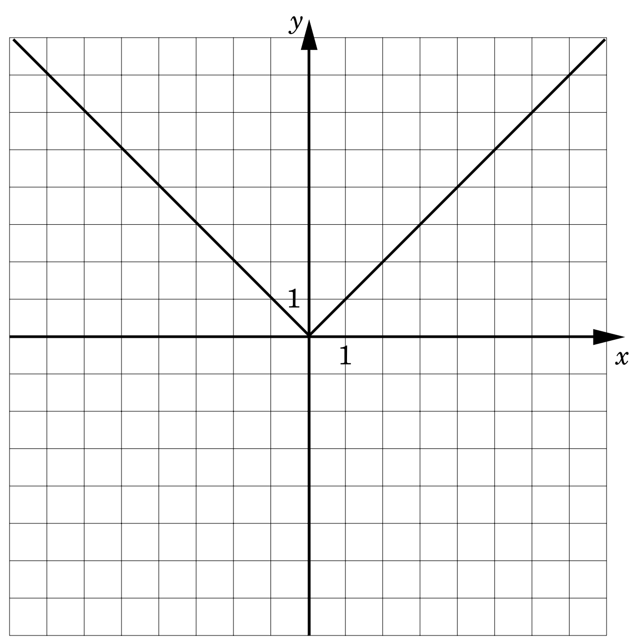


N.B. – Une ***fonction linéaire*** est une fonction affine où $k = 0$. Sa représentation graphique passe par l'origine.

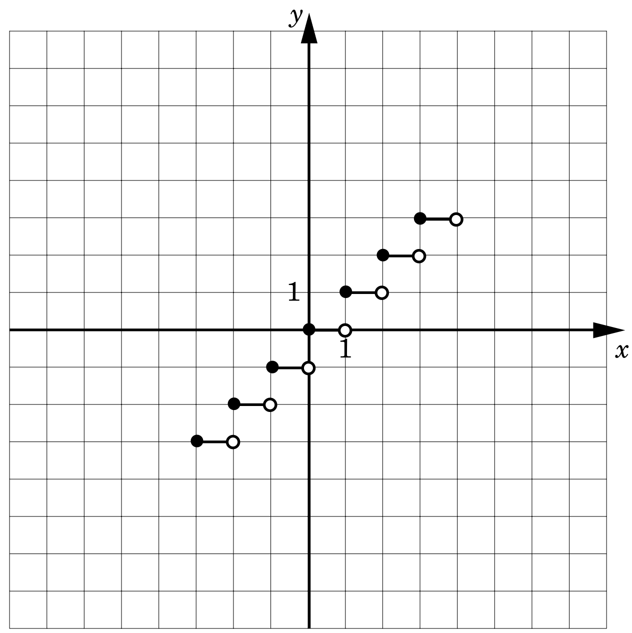
- Fonction quadratique (degré 2) : $f(x) = a(b(x - h))^2 + k$ où $a \neq 0$.



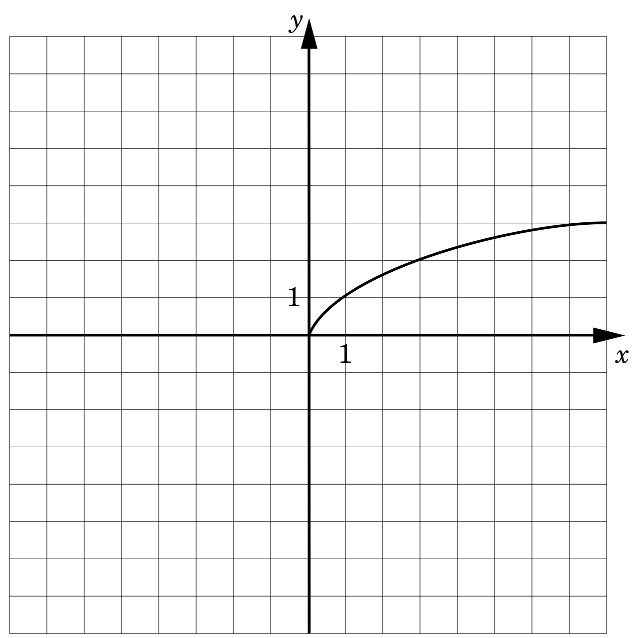
- Fonction valeur absolue : $f(x) = a\,|\,b(x - h)\,| + k$ où $a \neq 0$.



- ***Fonction*** partie entière (ou ***du plus grand entier***) : $f(x) = a[b(x-h)] + k$ où $a \neq 0$.



- Fonction racine carrée : $f(x) = a\sqrt{b(x-h)} + k$ où $a \neq 0$.



- Fonction rationnelle : $f(x) = \dfrac{a}{b(x-h)} + k$ où $a \neq 0$.

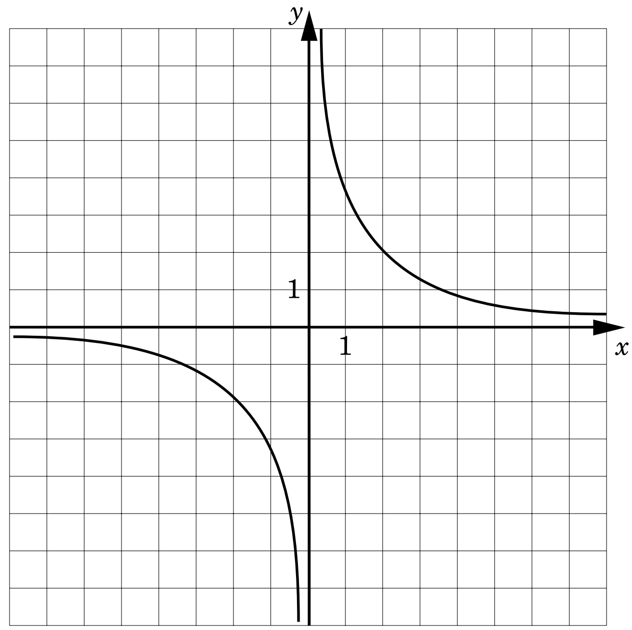
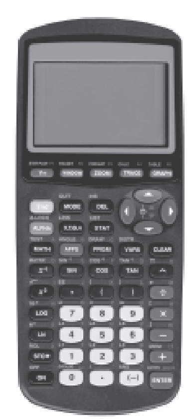


Fig. 1.1 Représentation graphique de différentes ***fonctions réelles***

Il est important de connaître le rôle exact de chacun des paramètres afin d'être capable de décrire la fonction peu importe sa position dans le graphique cartésien. C'est ce que nous allons faire en introduisant à tour de rôle les paramètres dans les différentes fonctions réelles. Place à votre calculatrice graphique et à votre sens de l'observation.

LE PARAMÈTRE *a*

Cherchons à déterminer le rôle du paramètre a dans certaines fonctions réelles. En utilisant votre calculatrice graphique, complétez les tableaux et les graphiques suivants et observez les changements obtenus dans chacune des situations fonctionnelles.



Assurons-nous d'abord que vous êtes en mesure de bien utiliser la calculatrice graphique dans ce contexte.

Pesez sur les touches ON et Y = .

\Y$_1$ =

\Y$_2$ =

⋮

devrait apparaître. S'il y a des équations affichées à l'écran, il faut les effacer à l'aide des touches CLEAR ▼ et ▲. Répétez l'opération aussi souvent qu'il est nécessaire. Revenez ensuite à \Y$_1$ pour être prêt à entrer la première équation.

Pesez maintenant sur 2nd TBL SET (WINDOW) pour configurer vos tableaux. À Tbl Start, faites (–) 4 (et non — 4), ▼ et 1 pour obtenir ΔTbl = 1. Revenez ensuite à Y = .

Remarque

Lorsque le coefficient d'une variable est une fraction, par exemple $\frac{1}{4}$, vous avez deux façons d'entrer cette donnée sans risque d'erreur. Soit que vous mettiez $\frac{1}{4}$ sous forme décimale, c'est-à-dire 0,25, soit que vous placiez $\frac{1}{4}$ entre parenthèses comme suit : (1 ÷ 4).

Allons-y maintenant de façon concrète!

- **Fonction affine où $f(x) = ax$**

$f_1(x) = \frac{1}{4}x \quad \left(a = \frac{1}{4}\right)$

\ Y_1 = . 2 5 X, T, θ, *n*

\ Y_1 = .25 × devrait apparaître à l'écran. Vérifiez sa représentation graphique en pesant sur GRAPH . Complétez ensuite la table de valeurs pour $f_1(x)$ à l'aide des touches 2nd TABLE GRAPH et ▼ ▶ . Tracez maintenant la droite sur le graphique cartésien.

N.B. – Assurez-vous que les valeurs de Y_1 correspondent bien à $x = -4, -2, 0, 2, 4$.

$g_1(x) = \frac{x}{2} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$

\ Y_2 = . 5 X, T, θ, *n*

Pesez sur GRAPH pour visualiser l'effet que produit le changement du coefficient numérique a sur la droite.

Continuez de la même façon avec les fonctions suivantes.

$h_1(x) = x \quad (a = 1)$

$i_1(x) = 2x \quad (a = 2)$

$j_1(x) = -x \quad (a = -1,$ (–) 1 $)$

x	$f_1(x)$	$g_1(x)$	$h_1(x)$	$i_1(x)$	$j_1(x)$
−4					
−2					
0					
2					
4					

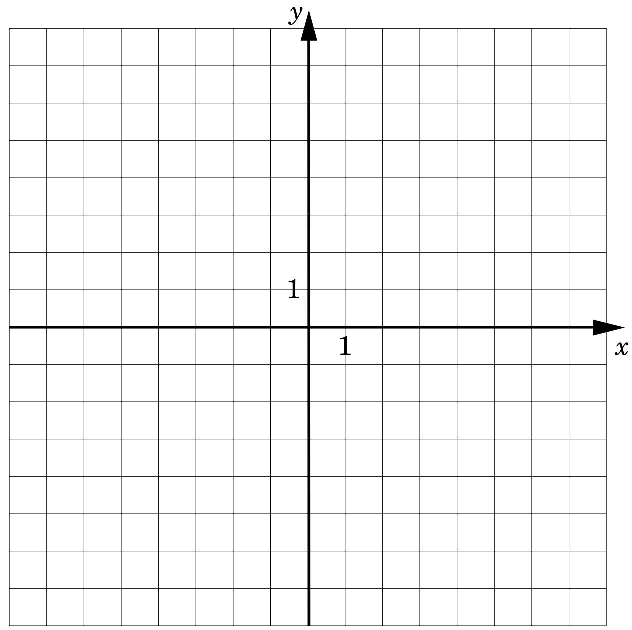


Fig. 1.2 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$, $i_1(x)$ et $j_1(x)$

Effacez maintenant toutes les données entrées à $\boxed{\text{Y =}}$ avant de passer aux fonctions suivantes et procédez de la même façon que pour la fonction affine.

- **Fonction quadratique où $f(x) = ax^2$**

? $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad \left(a = \frac{1}{4}\right)$

$\therefore$ $Y_1 = \boxed{.}\,\boxed{2}\,\boxed{5}\,\boxed{X, T, \theta, n}\,\boxed{x^2}$

? $g_2(x) = \frac{x^2}{2} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$

? $h_2(x) = x^2 \quad (a = 1)$

? $i_2(x) = 2x^2 \quad (a = 2)$

? $j_2(x) = -x^2 \quad (a = -1)$

x	$f_2(x)$	$g_2(x)$	$h_2(x)$	$i_2(x)$	$j_2(x)$
−4					
−2					
0					
2					
4					

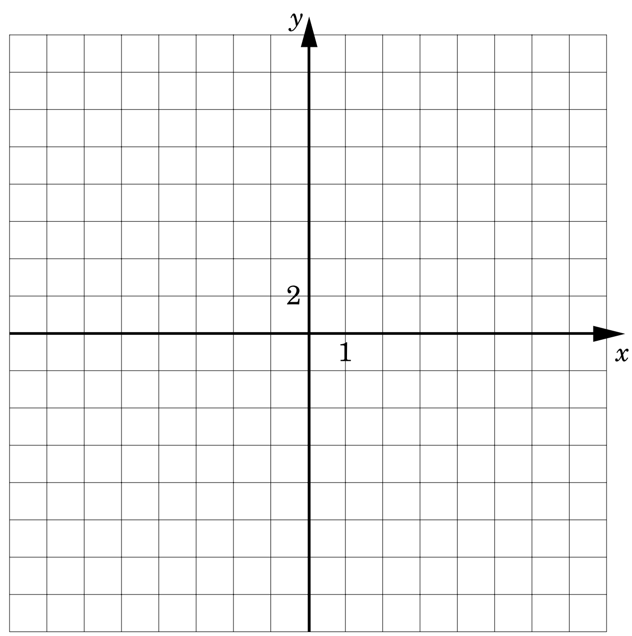


Fig. 1.3 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_2(x)$, $g_2(x)$, $h_2(x)$, $i_2(x)$ et $j_2(x)$

- **Fonction valeur absolue où $f(x) = a|x|$**

? $f_3(x) = \frac{1}{4}|x| \quad \left(a = \frac{1}{4}\right)$

\ Y_1 = [.] [2] [5] [MATH] [▶] [1] [X, T, θ, n]

- $g_3(x) = \dfrac{|x|}{2} \quad \left(a = \dfrac{1}{2}\right)$
- $h_3(x) = |x| \quad (a = 1)$
- $i_3(x) = 2|x| \quad (a = 2)$
- $j_3(x) = -|x| \quad (a = -1)$

x	$f_3(x)$	$g_3(x)$	$h_3(x)$	$i_3(x)$	$j_3(x)$
−4					
−2					
0					
2					
4					

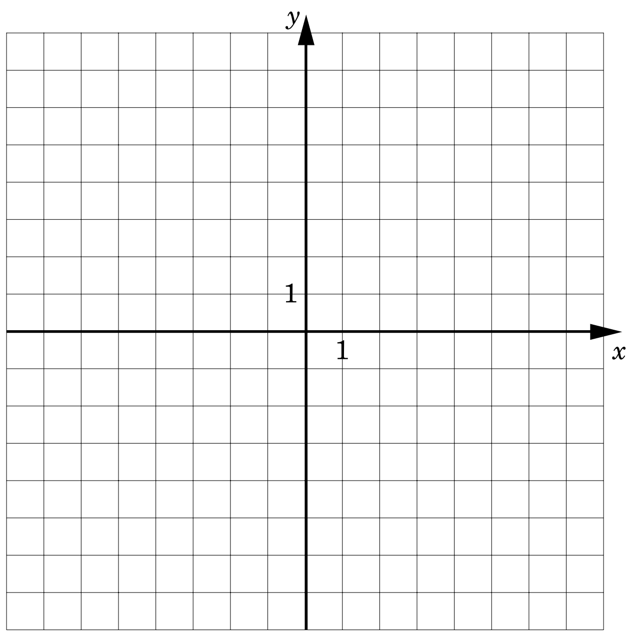


Fig. 1.4 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_3(x)$, $g_3(x)$, $h_3(x)$, $i_3(x)$ et $j_3(x)$

- **Fonction racine carrée où $f(x) = a\sqrt{x}$**

$f_4(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} \quad \left(a = \frac{1}{4}\right)$

\ $Y_1 =$ [.] [2] [5] [2nd] [$\sqrt{}$] [X, T, θ, n]

$g_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$

$h_4(x) = \sqrt{x} \quad (a = 1)$

$i_4(x) = 2\sqrt{x} \quad (a = 2)$

$j_4(x) = -\sqrt{x} \quad (a = -1)$

x	$f_4(x)$	$g_4(x)$	$h_4(x)$	$i_4(x)$	$j_4(x)$
0					
4					
9					
16					

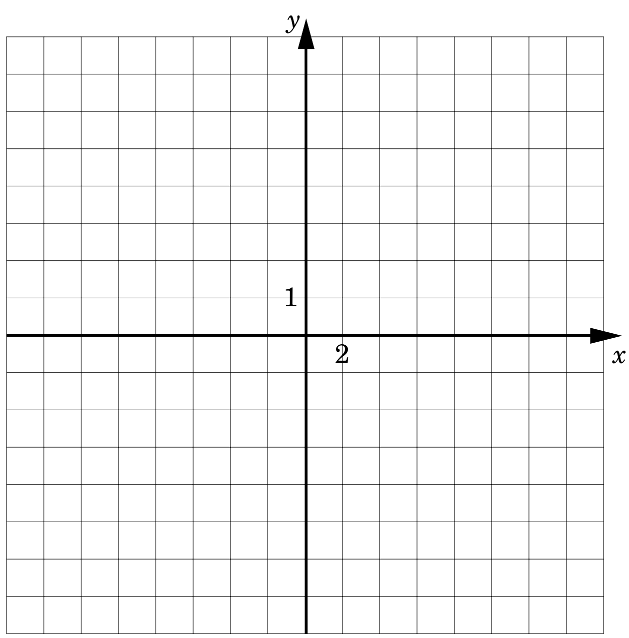


Fig. 1.5 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_4(x)$, $g_4(x)$, $h_4(x)$, $i_4(x)$ et $j_4(x)$

Vous avez sûrement obtenu les résultats suivants.

- **Fonction affine où $f(x) = ax$**

x	$f_1(x)$	$g_1(x)$	$h_1(x)$	$i_1(x)$	$j_1(x)$
−4	−1	−2	−4	−8	4
−2	−0,5	−1	−2	−4	2
0	0	0	0	0	0
2	0,5	1	2	4	−2
4	1	2	4	8	−4

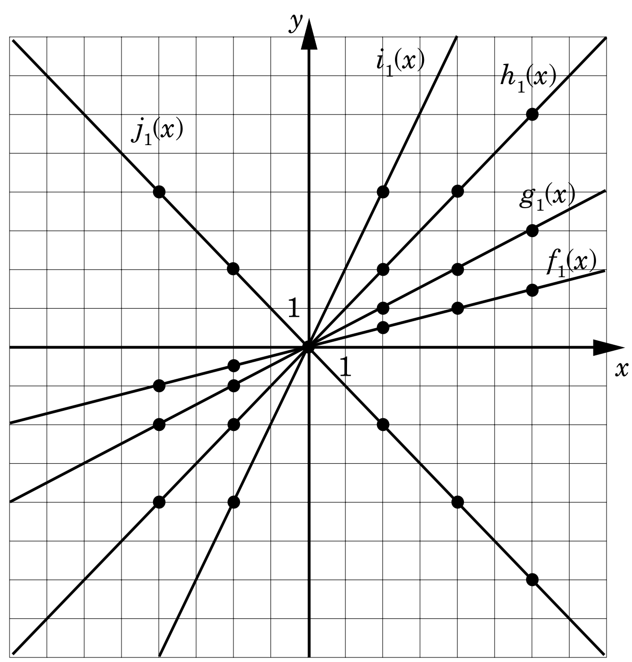


Fig. 1.6 Table de valeurs et représentation graphique des fonctions $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$, $i_1(x)$ et $j_1(x)$

- **Fonction quadratique où $f(x) = ax^2$**

x	$f_2(x)$	$g_2(x)$	$h_2(x)$	$i_2(x)$	$j_2(x)$
−4	4	8	16	32	−16
−2	1	2	4	8	−4
0	0	0	0	0	0
2	1	2	4	8	−4
4	4	8	16	32	−16

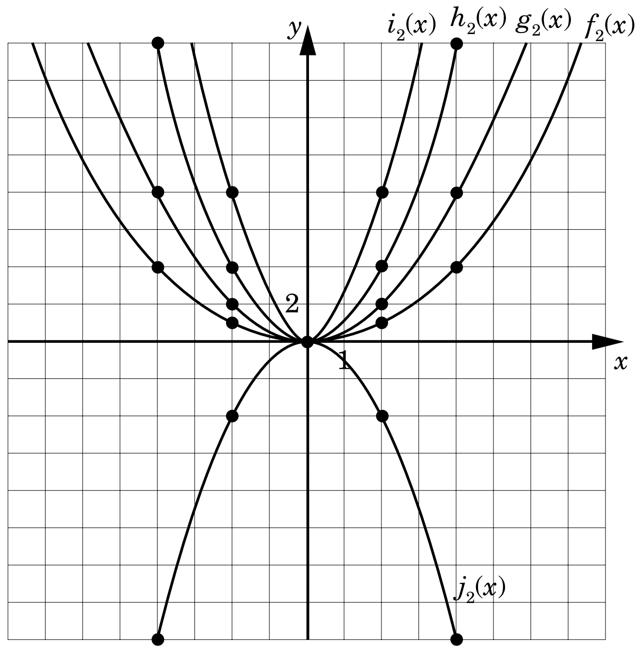


Fig. 1.7 Table de valeurs et représentation graphique des fonctions $f_2(x)$, $g_2(x)$, $h_2(x)$, $i_2(x)$ et $j_2(x)$

- **Valeur absolue $f(x) = a|x|$**

x	$f_3(x)$	$g_3(x)$	$h_3(x)$	$i_3(x)$	$j_3(x)$
−4	1	2	4	8	−4
−2	0,5	1	2	4	−2
0	0	0	0	0	0
2	0,5	1	2	4	−2
4	1	2	4	8	−4

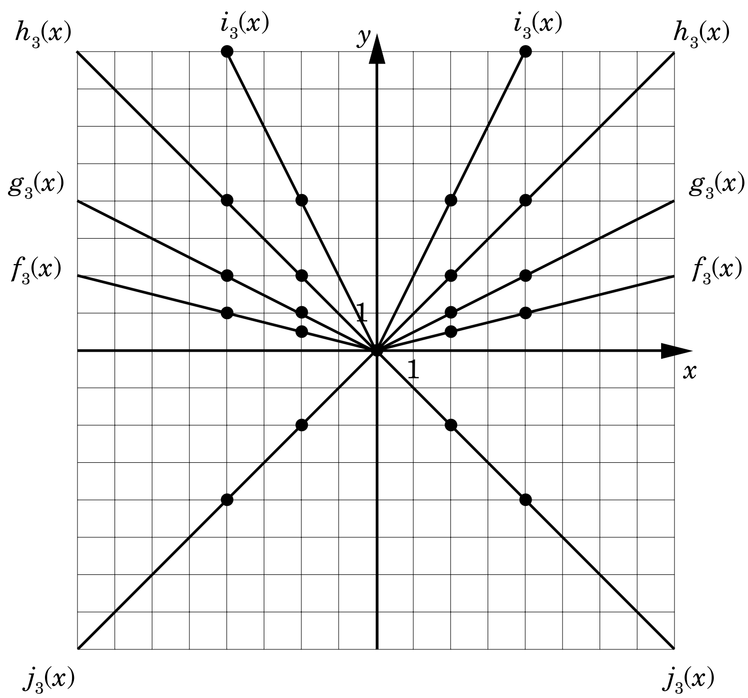


Fig. 1.8 Table de valeurs et représentation graphique des fonctions $f_3(x)$, $g_3(x)$, $h_3(x)$, $i_3(x)$ et $j_3(x)$

- **Racine carrée où $f(x) = a\sqrt{x}$**

x	$f_4(x)$	$g_4(x)$	$h_4(x)$	$i_4(x)$	$j_4(x)$
0	0	0	0	0	0
4	0,5	1	2	4	–2
9	0,75	1,5	3	6	–3
16	1	2	4	8	–4

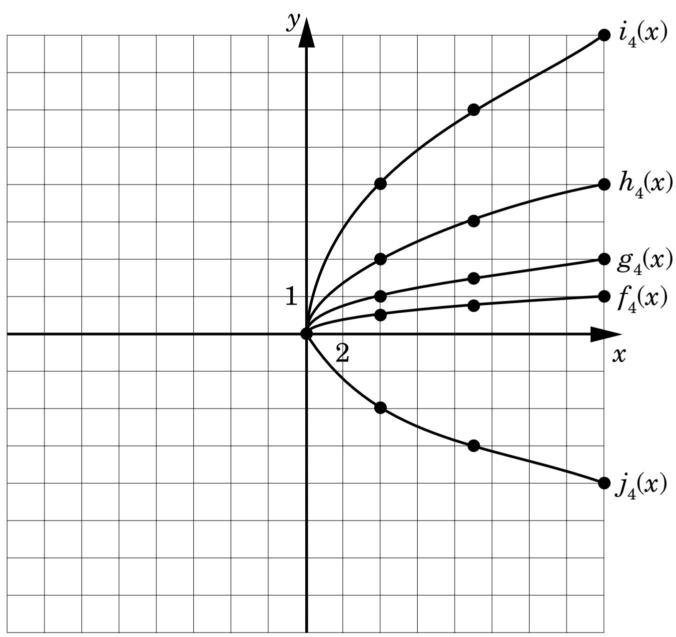


Fig. 1.9 Table de valeurs et représentation graphique des fonctions $f_4(x)$, $g_4(x)$, $h_4(x)$, $i_4(x)$ et $j_4(x)$

Quelles sont vos observations?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

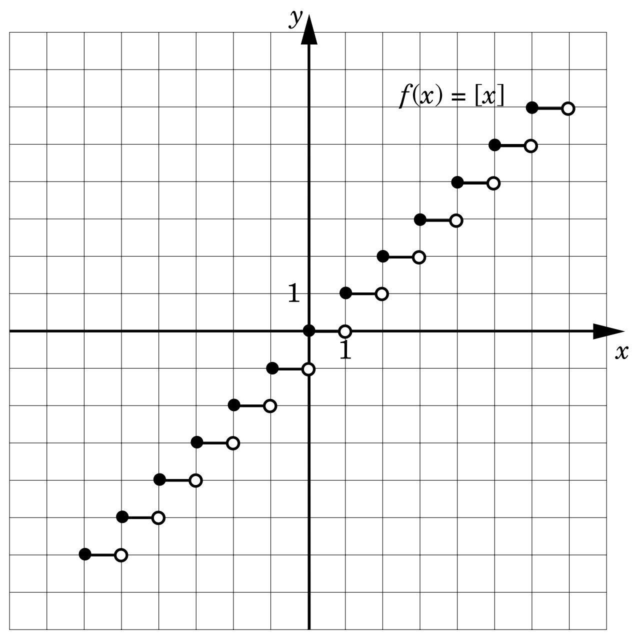
Nous remarquons qu'au fur et à mesure que la valeur du paramètre a augmente, la valeur de y augmente aussi. Nous assistons donc à un changement d'échelle vertical. La mesure de l'angle que forme la droite par rapport à l'abscisse augmente dans le cas de la fonction affine. Les courbes deviennent moins évasées dans le cas des fonctions quadratique et valeur absolue tandis que les points s'éloignent de l'axe des x pour la fonction racine carrée. Enfin, chaque représentation graphique subit une ***réflexion*** par rapport à l'axe des x lorsque a est négatif.

Rôle du paramètre *a*

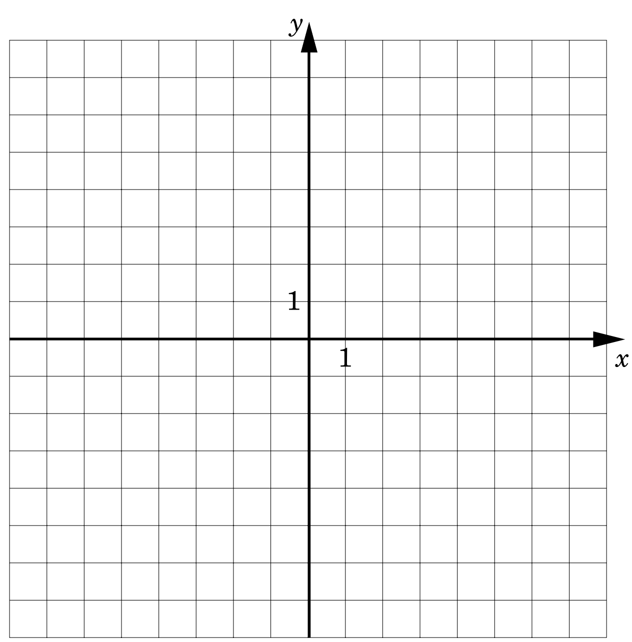
- Il entraîne un changement d'échelle vertical en multipliant par a les ordonnées des couples de la fonction, c'est-à-dire que le couple original (x, y) devient (x, ay).
- Il entraîne une réflexion par rapport à l'axe des x s'il est négatif.

Exercice 1.2

1. Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = [x]$. Sur la calculatrice graphique, elle est obtenue en faisant $\boxed{\text{Y =}}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{X, T, }\theta, n}$.
N.B. – int sur votre calculatrice veut dire « integer » en anglais, soit entier.



Sans calculer, esquissez dans le graphique cartésien ci-dessous les fonctions $g(x) = 2[x]$ et $h(x) = -3[x]$.



2. Sans calculer, complétez le tableau suivant.

x	$f(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$
2	4	2	−1
4	8	4	−2
6	12	6	−3
−2	−4	2	1

3. Voici quelques couples appartenant à une fonction de base où $a = 1$: $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$. Énumérez les couples obtenus lorsque la valeur du paramètre a prend les valeurs suivantes.

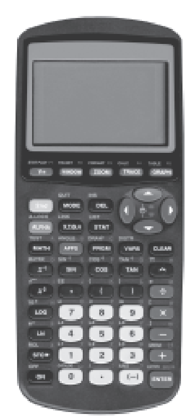
a) $a = -2$: ....

b) $a = \frac{1}{2}$: ....

c) $a = -\frac{3}{4}$: ....

LE PARAMÈTRE *b*

Poursuivons l'étude des paramètres en déterminant le rôle d'un deuxième paramètre, soit b. En utilisant votre calculatrice graphique, complétez les tableaux suivants et représentez graphiquement vos résultats.



- **Fonction racine carrée où $f(x) = \sqrt{bx}$**

$f_1(x) = \sqrt{0{,}5x}$ $(b = 0{,}5)$

$\boxed{\text{Y =}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{X, T, } \theta, n}$

$g_1(x) = \sqrt{x}$ $(b = 1)$

$h_1(x) = \sqrt{2x}$ $(b = 2)$

$i_1(x) = \sqrt{3x}$ $(b = 3)$

x	$f_1(x)$	$g_1(x)$	$h_1(x)$	$i_1(x)$
0				
2				
4				
8				

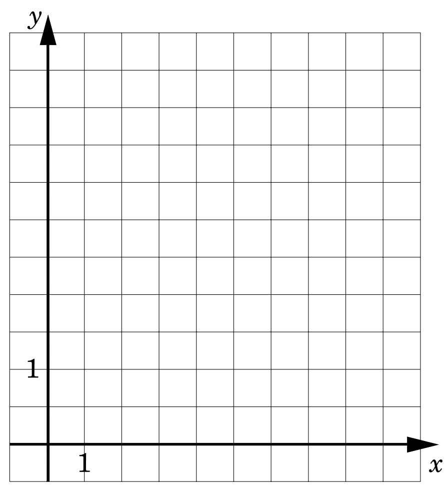


Fig. 1.10 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ et $i_1(x)$

- **Fonction rationnelle où $f(x) = \dfrac{1}{bx}$**

? $f_2(x) = \dfrac{1}{0{,}5x}$ ($b = 0{,}5$)

[Y =] [1] [(] [.] [5] [X, T, θ, *n*] [)]

? $g_2(x) = \dfrac{1}{x}$ ($b = 1$)

? $h_2(x) = \dfrac{1}{2x}$ ($b = 2$)

? $i_2(x) = \dfrac{1}{3x}$ ($b = 3$)

x	$f_2(x)$	$g_2(x)$	$h_2(x)$	$i_2(x)$
−4				
−2				
0				
2				
4				
6				

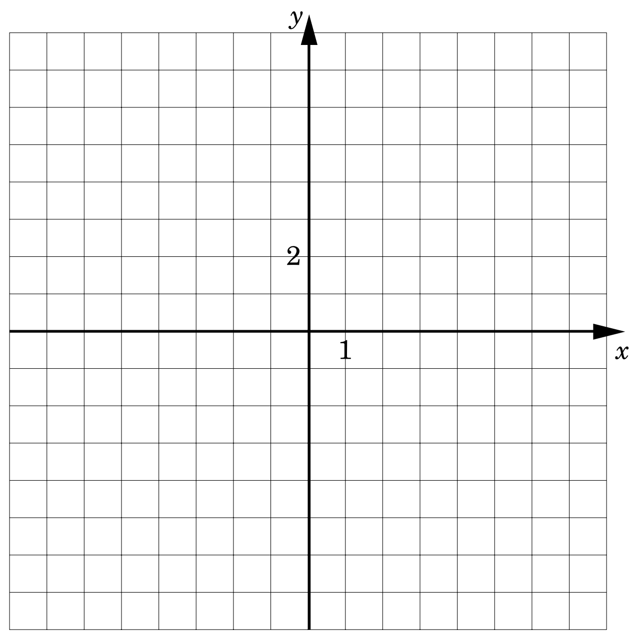


Fig. 1.11 Table de valeurs et graphique cartésien pour $f_2(x)$, $g_2(x)$, $h_2(x)$ et $i_2(x)$

Vous avez sûrement obtenu les résultats suivants.

x	$f_1(x)$	$g_1(x)$	$h_1(x)$	$i_1(x)$
0	0	0	0	0
2	1	1,4	2	2,4
4	1,4	2	2,8	3,5
8	2	2,8	4	4,9

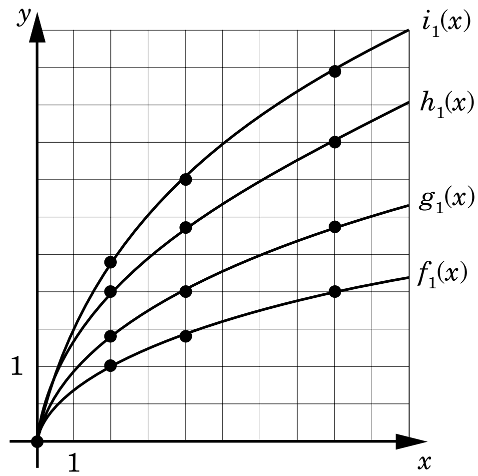


Fig. 1.12 Table de valeurs et représentation graphique de $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ et $i_1(x)$

x	$f_2(x)$	$g_2(x)$	$h_2(x)$	$i_2(x)$
−4	−0,5	−0,25	−0,125	−0,083
−2	−1	−0,5	−0,25	−0,167
0	---	---	---	---
2	1	0,5	0,25	0,167
4	0,5	0,25	0,125	0,083
6	0,333	0,167	0,083	0,056

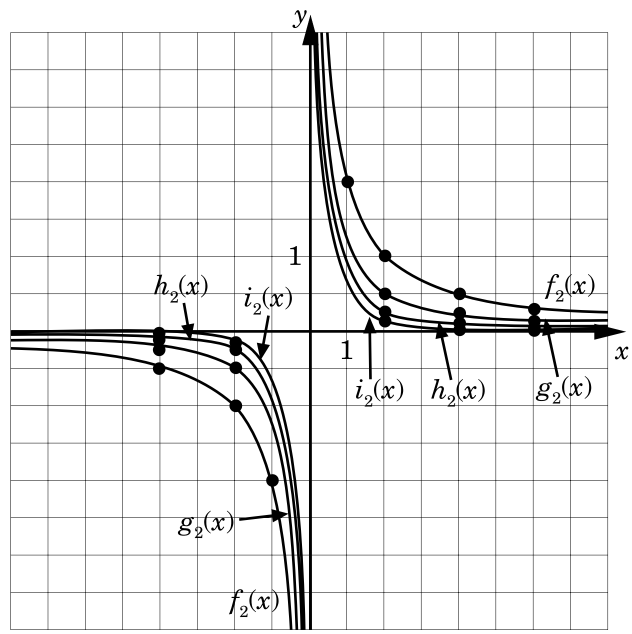


Fig. 1.13 Table de valeurs et représentation graphique de $f_2(x)$, $g_2(x)$, $h_2(x)$ et $i_2(x)$

Quelles sont vos observations? Sur quelle coordonnée agit le paramètre b? Décrivez son effet.

....

....

....

Le paramètre b entraîne un changement d'échelle horizontal en divisant par b les abscisses de chacun des couples (x, y) de la fonction de base.

Dans les deux séries de fonctions précédentes, attribuez au paramètre b sa valeur négative et décrivez la transformation graphique obtenue.

....

....

....

En effet, le paramètre b entraîne une réflexion par rapport à l'ordonnée.

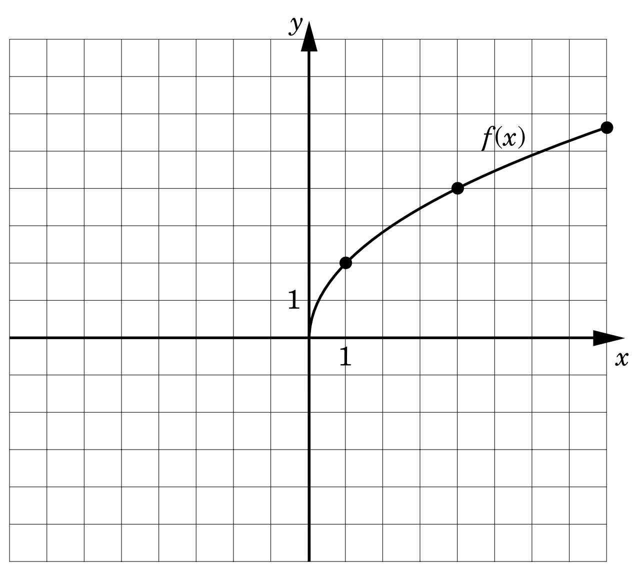
Nous remarquons que dans l'écriture de la fonction, le paramètre b affecte la valeur de $f(x)$ en multipliant la variable x. Il divise l'abscisse du couple, c'est-à-dire que le couple (x, y) devient $\left(\frac{x}{b}, y\right)$.

Rôle du paramètre *b*

- Il entraîne un changement d'échelle horizontal en divisant par b les abscisses des couples de la fonction, c'est-à-dire que le couple original (x, y) devient $\left(\frac{x}{b}, y\right)$.
- Il entraîne une réflexion par rapport à l'axe des y s'il est négatif.

Exercice 1.3

1. Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = \sqrt{4x}$. Sans calculer les points un à un avec la règle de correspondance et sans utiliser votre calculatrice graphique, esquissez sur le même graphique cartésien la fonction $g(x) = \sqrt{x}$.



2. Voici quelques couples appartenant à une fonction de base où $b = 1$: $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(8, 8)$. Énumérez les couples obtenus lorsque b prend les valeurs suivantes.

a) $b = -2$: ....

b) $b = -\frac{1}{2}$: ....

c) $b = 4$: ....

LE PARAMÈTRE h

Procédons de la même façon pour découvrir le rôle du troisième paramètre, soit le paramètre h. En utilisant votre calculatrice graphique, découvrez sur quelle coordonnée agit ce paramètre et quel est son effet.

Voici quelques suggestions de règle de correspondance que vous pouvez utiliser dans vos démarches.

- **Fonction quadratique où $f(x) = (x - h)^2$**

  $f_1(x) = (x - 2)^2$ $(h = 2)$

  [Y =] [(] [X, T, θ, n] [–] [2] [)] [x^2] [GRAPH]

  $g_1(x) = (x - 1)^2$ $(h = 1)$

  $h_1(x) = (x - 0)^2$ $(h = 0)$

  $i_1(x) = (x - (-1))^2$ $(h = -1)$

  $j_1(x) = (x - (-2))^2$ $(h = -2)$

- **Fonction valeur absolue où $f(x) = |x - h|$**

  $f_2(x) = |x - 2|$ $(h = 2)$

  [Y =] [MATH] [▶] [1] [X, T, θ, n] [–] [2] [)] [GRAPH]

  $g_2(x) = |x - 1|$ $(h = 1)$

  $h_2(x) = |x - 0|$ $(h = 0)$

  $i_2(x) = |x - (-1)|$ $(h = -1)$

  $j_2(x) = |x - (-2)|$ $(h = -2)$

- **Fonction partie entière où $f(x) = [x - h]$**

$f_3(x) = [x - 2]$ $(h = 2)$

Y = MATH ▶ 5 X, T, θ, n – 2) GRAPH

$g_3(x) = [x - 1]$ $(h = 1)$

$h_3(x) = [x - 0]$ $(h = 0)$

$i_3(x) = [x - (-1)]$ $(h = -1)$

$j_3(x) = [x - (-2)]$ $(h = -2)$

? Quelles sont vos conclusions? Quel est le rôle du paramètre h?

....

....

....

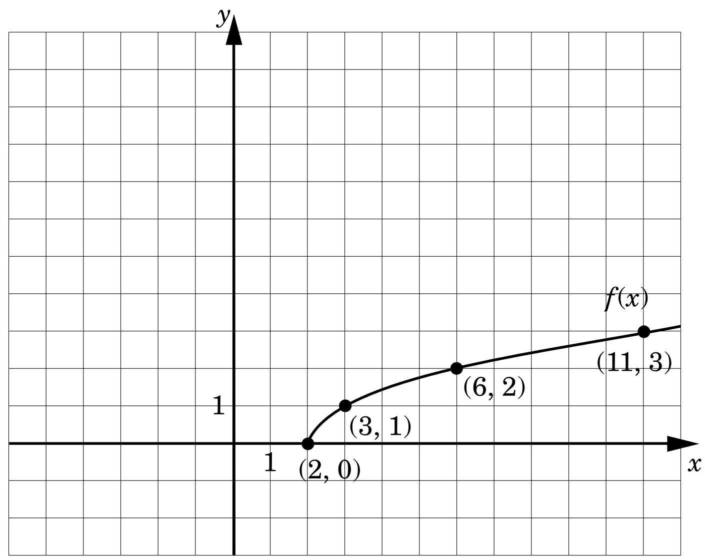
Le paramètre h entraîne une ***translation*** horizontale de h unités vers la gauche si le signe de la variable h est positif ou vers la droite si son signe est négatif.

Rôle du paramètre *h*

Il entraîne une translation horizontale de h unités, c'est-à-dire que le couple original (x, y) devient $(x + h, y)$.

Exercice 1.4

1. Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = \sqrt{x-2}$. Esquissez sur ce même graphique cartésien la fonction $g(x) = \sqrt{x+2}$.



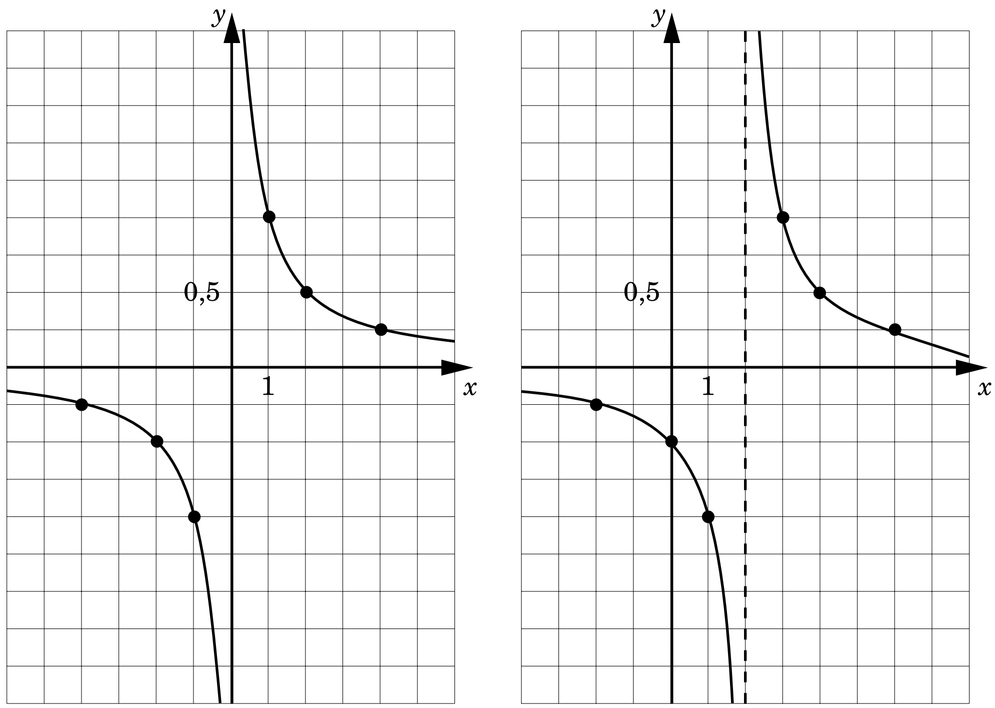
2. Voici quelques couples appartenant à une fonction de base où $h = 0$: $(-3, 25)$, $(-2, 16)$, $(-1, 9)$, $(0, 4)$, $(3, 1)$. Énumérez les couples obtenus lorsque h prend les valeurs suivantes.

   a) $h = -2$: ....

   b) $h = -\frac{1}{2}$: ....

   c) $h = 4$: ....

3. Voici le graphique de deux fonctions de même type. Quelle valeur avons-nous donnée au paramètre h pour obtenir le deuxième graphique? Justifiez votre réponse.



....

....

Le paramètre k

Maintenant que vous connaissez le rôle des paramètres a, b et h vous devriez être capable en observant les équations de base, de formuler une hypothèse à savoir sur quelle coordonnée agit ce quatrième paramètre? Justifiez votre réponse en utilisant votre calculatrice graphique comme vous l'avez fait pour découvrir le rôle des paramètres vus précédemment.

....

....

....

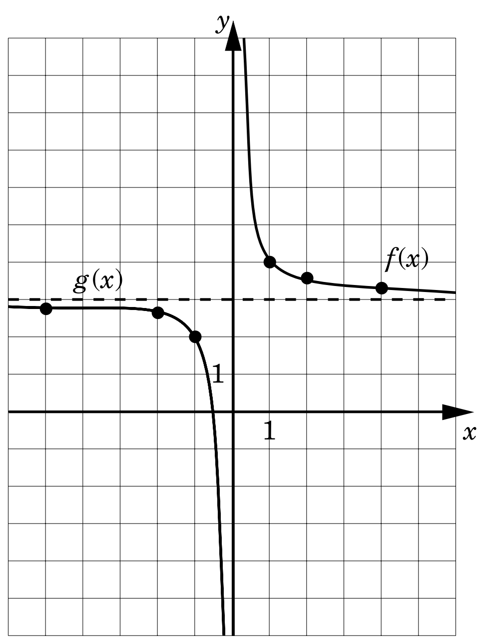
Le paramètre k fait subir une translation verticale de k unités vers le haut si k est positif et de k unités vers le bas si k est négatif. Pour s'en assurer il suffit d'utiliser une fonction réelle quelconque d'équation $f(x) = x^2 + k$ ou $f(x) = |x| + k$ ou $f(x) = [x] + k$ ou $f(x) = \sqrt{x} + k$ ou $f(x) = \frac{1}{x} + k$ et donner à k différentes valeurs négatives ou positives.

Rôle du paramètre *k*

Il entraîne une translation verticale de k unités, c'est-à-dire que le couple original (x, y) devient $(x, y + k)$.

Exercice 1.5

1. Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + 3$. Esquissez sur ce même graphique cartésien la fonction $g(x) = \frac{1}{x} + 2$.



2. Voici quelques couples appartenant à une fonction de base où $k = 0$: $(-3, 13)$, $(-2, 8)$, $(-1, 5)$, $(0, 4)$, $(3, 3)$. Énumérez les couples obtenus lorsque k prend les valeurs suivantes.

   a) $k = -2$: ....

   b) $k = 0$: ....

   c) $k = 4$: ....

3. Voici les couples obtenus pour une certaine fonction : $(0, 3)$, $(1, 4)$, $(4, 5)$, $(9, 6)$. Donnez la valeur du paramètre k dans la règle de correspondance de cette fonction transformée pour obtenir les couples suivants.

   a) $(0, -3)$, $(1, -2)$, $(4, -1)$, $(9, 0)$: ....

   b) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$: ....

Les paramètres *a*, *b*, *h* et *k*

Nous connaissez maintenant le rôle que joue chacun des paramètres a, b, h et k des fonctions réelles. Résumons-les dans le tableau suivant, vous pourrez y revenir au besoin.

- Le paramètre a entraîne un changement d'échelle vertical en multipliant l'ordonnée de chacun des couples par sa valeur numérique.
- Le paramètre b entraîne un changement d'échelle horizontal en divisant l'abscisse de chacun des couples par sa valeur numérique.
- Le paramètre h entraîne une translation horizontale de h unités en s'additionnant à l'abscisse de chacun des couples.
- Le paramètre k entraîne une translation verticale de k unités en s'additionnant à l'ordonnée de chacun des couples.
- Le couple $(x,\ y)$ de la fonction de base devient donc $\left(\frac{x}{b} + h, ay + k\right)$.

Exercice 1.6

1. Voici quelques couples appartenant à une fonction de base : $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(3, 9)$. Énumérez les couples obtenus lorsque a, b, h et k prennent les valeurs suivantes.

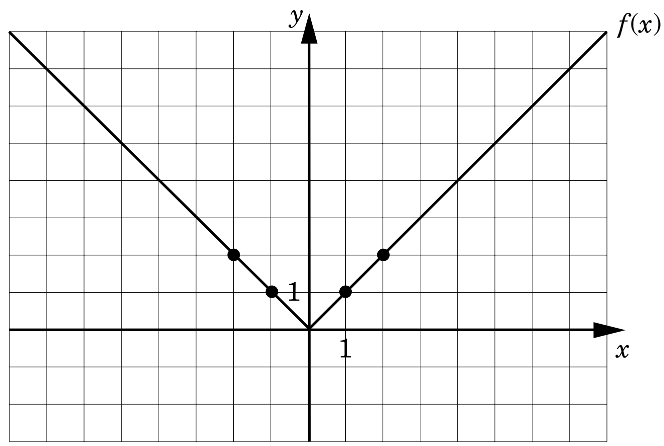
   a) $a = 3$, $b = 1$, $h = 2$ et $k = 0$.

   ....

   b) $a = 1$, $b = 1$, $h = 3$ et $k = 2$.

   ....

2. En utilisant la représentation de la fonction de base ci-dessous, décrivez les transformations occasionnées par l'ajout des paramètres suivants.



a) $a = 2$ et $h = 1$.

....

b) $a = 1$ et $h = -2$.

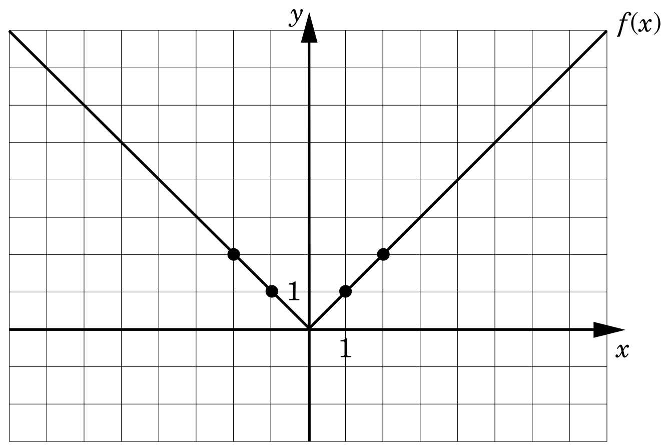
....

c) $h = -1$ et $k = 3$,

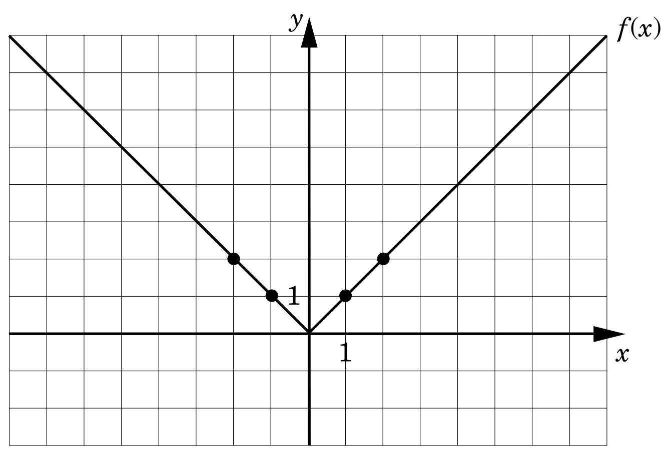
....

3. Représentez graphiquement chacune des fonctions transformées du numéro précédent.

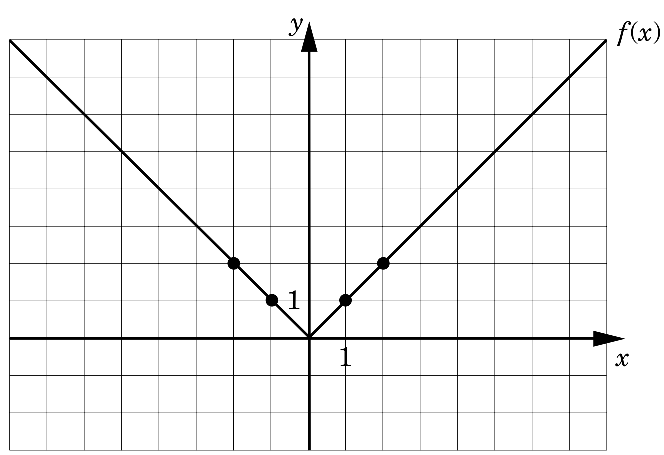
a)

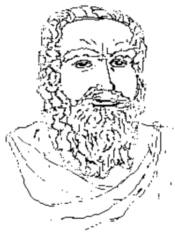


b)



c)





Saviez-vous que...

... si chacun des éléments de l'ensemble d'une fonction est utilisé, nous appelons cette fonction une « application »? Tout comme la fonction est une relation particulière, l'application est aussi une fonction particulière.

Si, par exemple, nous faisons correspondre à chaque élément des réels son double, la fonction obtenue est une application, car tous les éléments des réels possèdent un double.

? 1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Parmi les relations suivantes représentées en extension, déterminez celles qui sont des fonctions et dites pourquoi.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(0, 1), (1, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 0)\}$

....

....

b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

....

....

c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

....

....

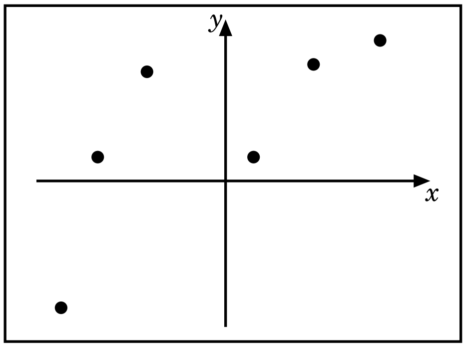
d) $\mathcal{R}_4 = \{(2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$

....

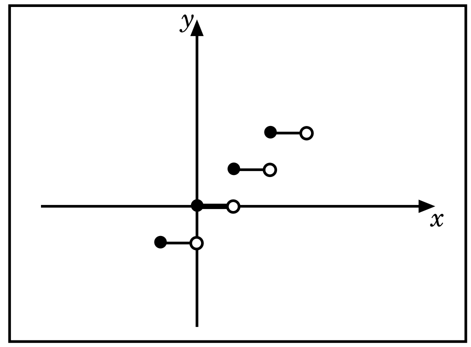
....

2. Chaque graphique cartésien ci-dessous représente une relation. Quels graphiques représentent une situation fonctionnelle? Dites pourquoi.

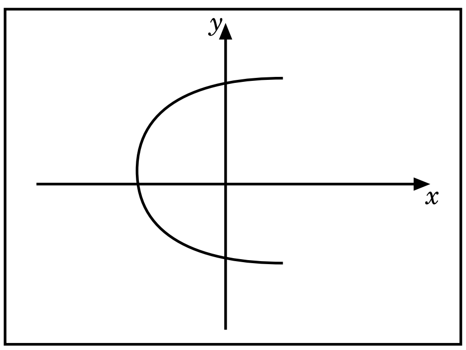
a)



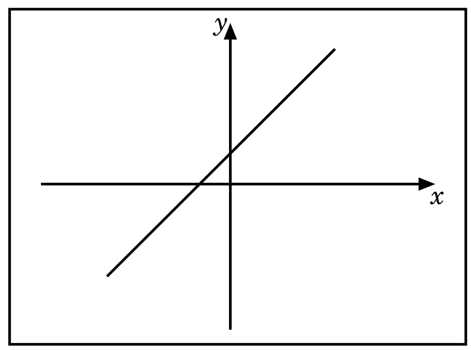
b)



c)



d)



....

....

3. Soit les relations suivantes définies en compréhension. Pour chacune d'elles, déterminez si c'est une fonction et dites pourquoi.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y = 4x^2 + y - 3\}$

....

....

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 3\}$

....

....

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq 2x - 1\}$

....

....

d) $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -2\}$

....

....

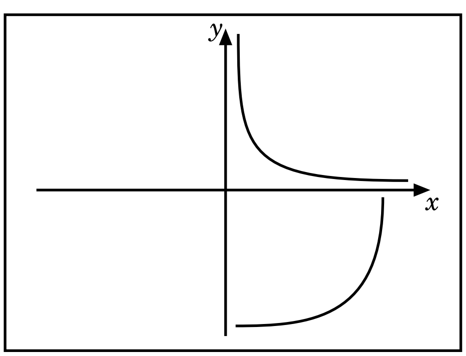
4. Dites si les relations suivantes sont des fonctions. Si elles en sont, donnez le type de fonction et si elles n'en sont pas, expliquez brièvement pourquoi.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 2 = x^2 + 4\}$

....

....

b)



....

....

c) $\mathcal{R}_2 = \{(2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

....

....

5. Voici la règle de correspondance de certaines fonctions, exprimez ces dernières en incorporant les paramètres a, b, h et k.

a) $f(x) = x$: ....

b) $g(x) = x^2$: ....

c) $h(x) = \sqrt{x}$: ....

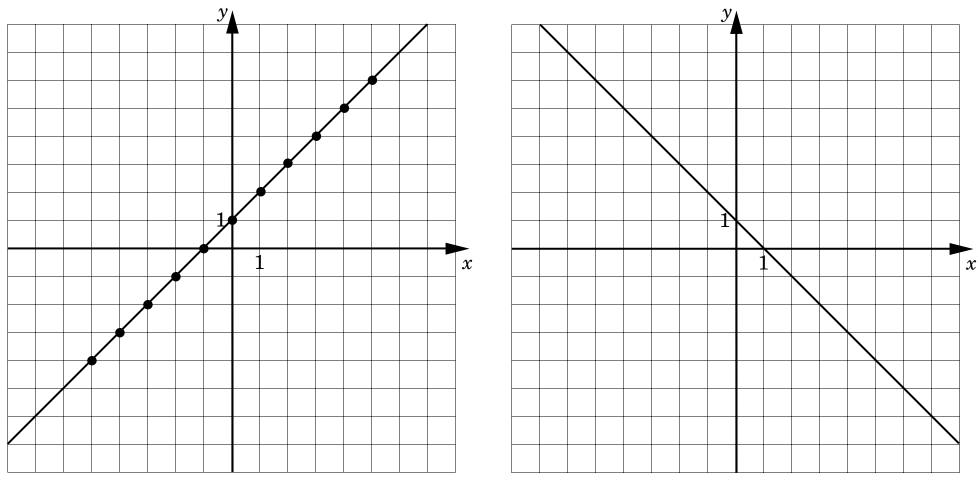
d) $i(x) = |x|$: ....

e) $j(x) = [x]$: ....

f) $k(x) = \frac{1}{x}$: ....

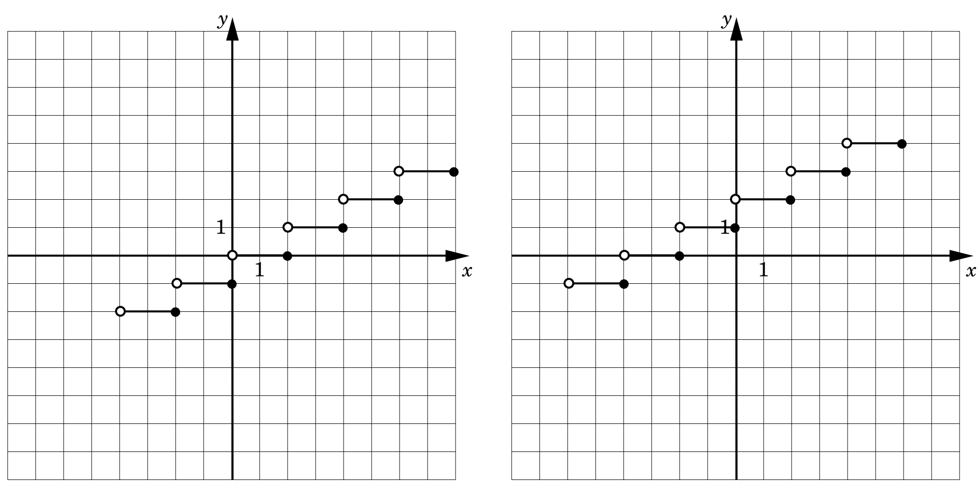
6. Laquelle des transformations (translation verticale, translation horizontale, changement d'échelle vertical, changement d'échelle horizontal) permet de passer du graphique 1 au graphique 2? De quel paramètre s'agit-il?

a)



....

b)



....

7. Voici quelques couples d'une fonction : (1, 2), (2, 3), (5, 4), (10, 5), (17, 6). Énumérez les couples obtenus dans la nouvelle fonction si nous modifions les paramètres suivants.

a) $a = 1$: ....

b) $h = -2$: ....

c) $k = 3$: ....

d) $b = -\frac{1}{2}$: ....

e) $a = -1$ et $h = 2$: ....

f) $b = -\frac{1}{4}$, $h = -1$ et $k = -2$: ....

8. En vous référant aux graphiques ci-dessous, répondez aux questions suivantes.

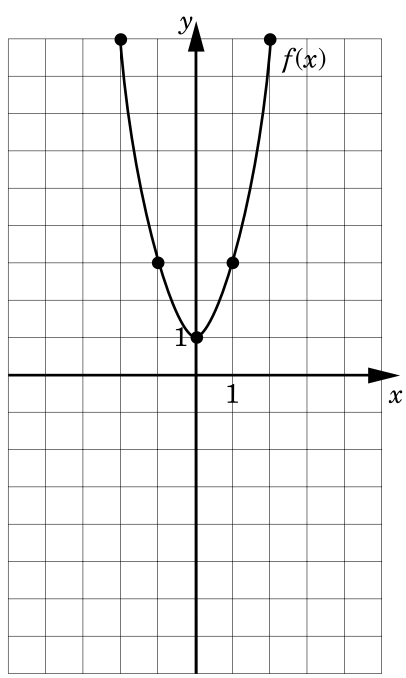
   1° Quelle(s) transformation(s) avons-nous fait subir à la fonction $f(x)$ pour obtenir la fonction $g(x)$?

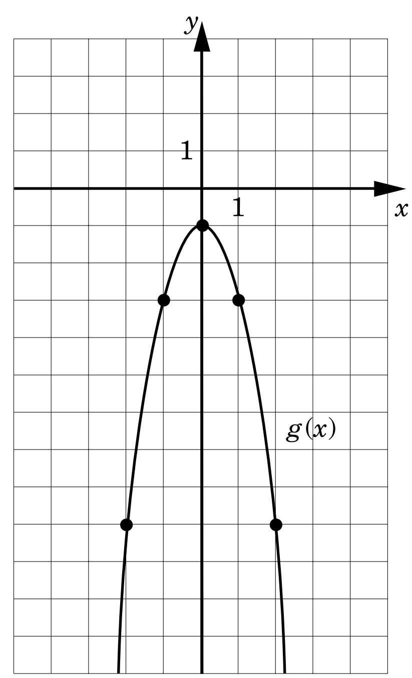
   2° Quel(s) paramètre(s) avons-nous ajouté(s) à $f(x)$ pour obtenir $g(x)$?

   3° Quelle est la valeur de chacun de ces paramètres?

   4° Quel est le type de ces fonctions?

a)





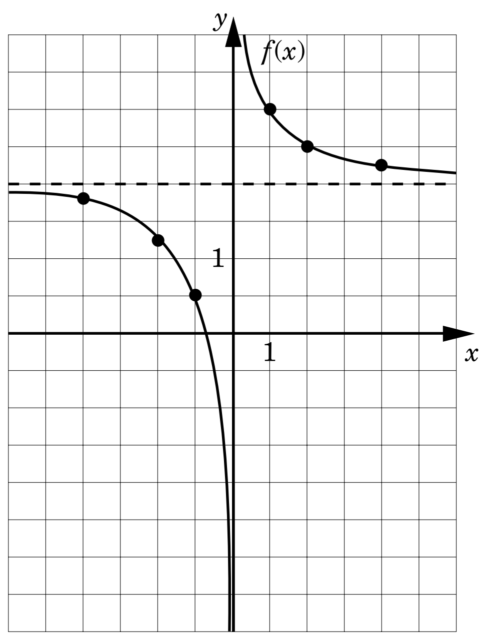
1° ....

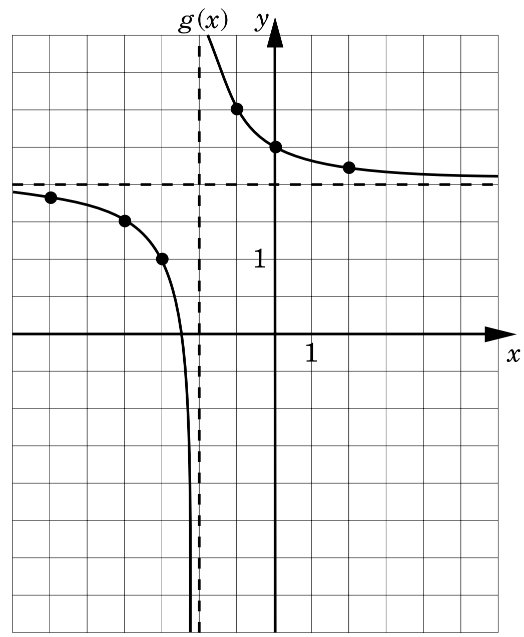
2° ....

3° ....

4° ....

b)





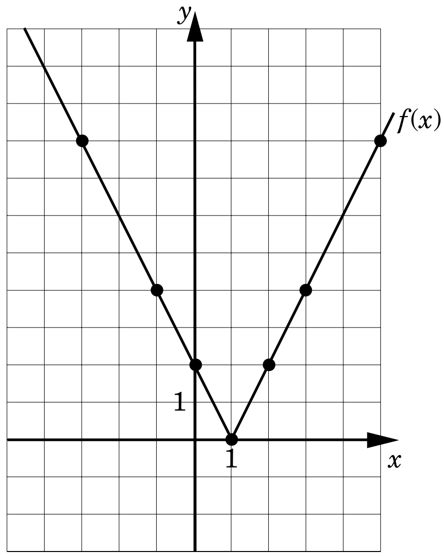
1° ....

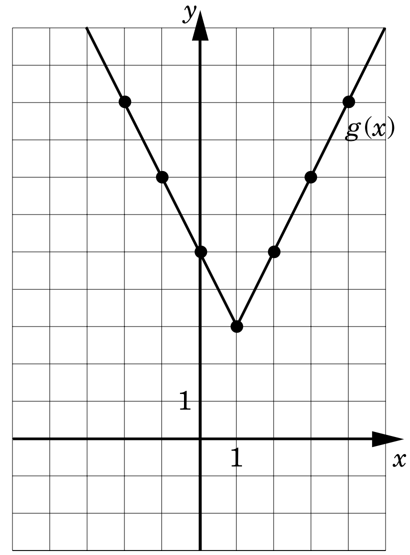
2° ....

3° ....

4° ....

c)





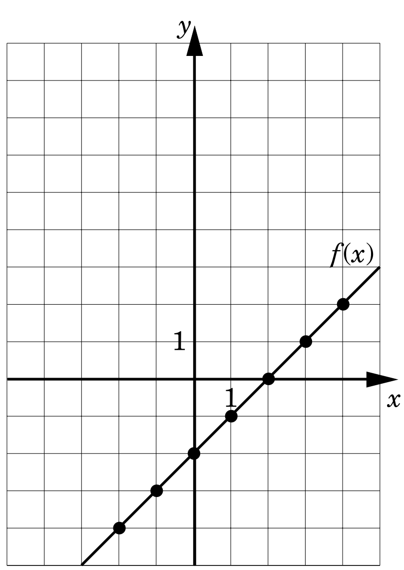
1° ....

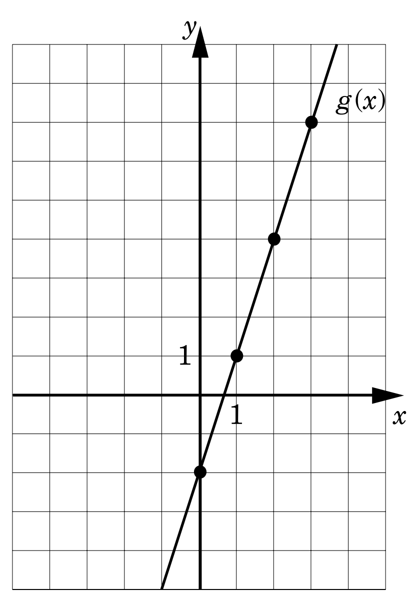
2° ....

3° ....

4° ....

d)





1° ....

2° ....

3° ....

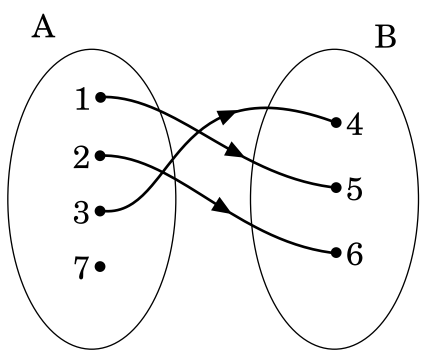
4° ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

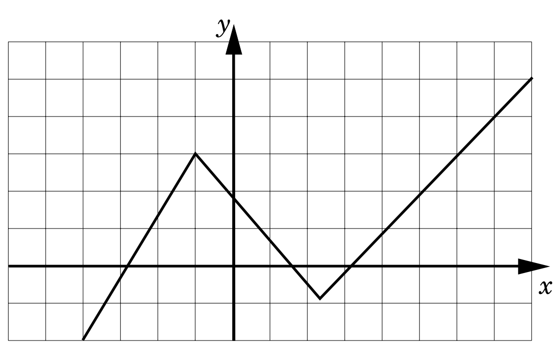
1. Quelle est la différence entre une relation et une fonction?

2. Dites si les relations suivantes sont des fonctions et justifiez votre réponse.

a)



b)



c) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

....

....

3. Écrivez les règles de correspondance de base, incluant tous les paramètres, pour les fonctions suivantes.

a) $f(x) = |x|$: ....

b) $f(x) = [x]$: ....

c) $f(x) = \sqrt{x}$: ....

d) $f(x) = x^2$: ....

e) $f(x) = x$: ....

f) $f(x) = \frac{1}{x}$: ....

4. Déterminez la valeur des quatre paramètres a, b, h et k dans les règles de correspondance suivantes.

a) $f(x) = 3(x + 2)^2 - 4$

....

b) $f(x) = 5\sqrt{2(x - 1)} + 4$

....

c) $f(x) = 2[5(x - 1)] + 3$

....

5. Dites si les énoncés suivants sont vrai ou faux.

   a) Les paramètres h et k entraînent tous deux une translation.

   ....

   b) Dans la règle de base d'une fonction affine, le paramètre a correspond à la pente m. ....

   c) La variation d'un paramètre agit différemment sur une fonction quadratique que sur une fonction racine carrée. ....

   d) La variation du paramètre a entraîne une translation horizontale.

   ....

   e) La variation des paramètres a et b entraîne respectivement un changement d'échelle vertical et horizontal. ....

6. Quel est le rôle du paramètre a?

   ....

   ....

   ....

7. Quel est le rôle du paramètre b?

   ....

   ....

   ....

8. Quel est le rôle du paramètre h?

....

....

....

9. Quel est le rôle du paramètre k?

....

....

....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Fonctions injective, surjective et bijective

Allons un peu plus loin dans l'étude des fonctions et définissons de nouveaux termes.

Soit y, un élément de l'ensemble d'arrivée d'une fonction f. Si, à un élément x de l'ensemble de départ, correspond un élément y de l'ensemble d'arrivée, alors l'élément x est appelé « antécédent de y ».

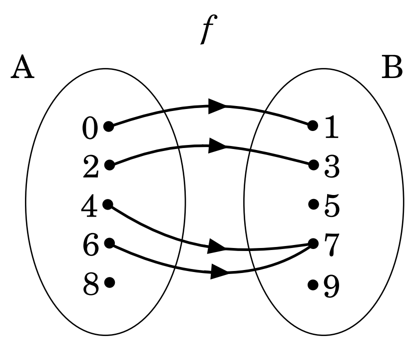


Fig. 1.14 Graphique sagittal d'une fonction f de A vers B

Dans la figure 1.14, 0 est l'antécédent de 1, car $f(0) = 1$; 2 est l'antécédent de 3, car $f(2) = 3$. L'élément 7 a deux antécédents : 4 et 6. Quant aux éléments 5 et 9, ils n'ont pas d'antécédent.

Cette notion nous permet d'en aborder d'autres.

Une fonction f de A vers B est dite **injective** si chaque élément de l'image de f admet un antécédent unique. Ainsi, dans la figure 1.14, f n'est pas injective, car l'élément 7 de l'image a deux antécédents, c'est-à-dire 4 et 6.

Une fonction *f* de A vers B est dite **surjective** si chaque élément de l'ensemble d'arrivée B possède au moins un antécédent, c'est-à-dire ima *f* = B. Ainsi, dans la figure 1.14, *f* n'est pas surjective, car les éléments 5 et 9 n'ont pas d'antécédent.

Soit les fonctions *g* et *h* ci-dessous.

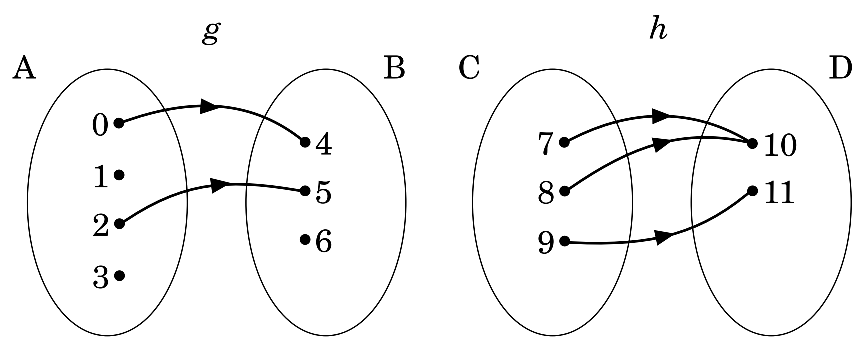


Fig. 1.15 Graphiques sagittaux des fonctions *g* et *h*

? Les fonctions *g* et *h* sont-elles injectives? Justifiez votre réponse.

? Les fonctions g et h sont-elles surjectives? Justifiez votre réponse.

....

....

....

....

Réponses

La fonction g est injective, car chaque élément de l'image {4, 5} a un antécédent unique.

La fonction h n'est pas injective, car l'élément 10 de son image a deux antécédents, soit 7 et 8.

La fonction g n'est pas surjective, car ima $g = \{4, 5\} \neq$ B.

La fonction h est surjective, car ima $h = \{10, 11\} =$ D.

Une dernière notion avant de clore le sujet.

Une fonction f de A vers B telle que dom $f =$ A est dite **bijective** si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si chaque élément de l'ensemble d'arrivée B a un seul antécédent.

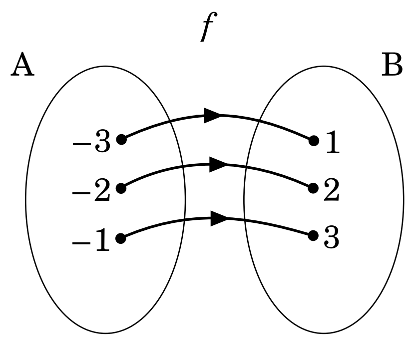
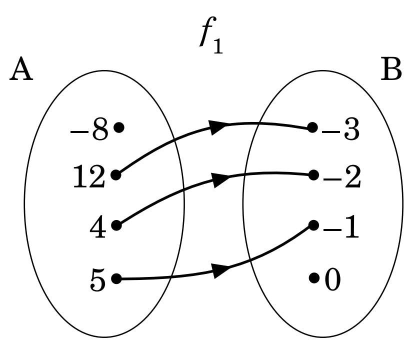


Fig. 1.16 Fonction bijective f

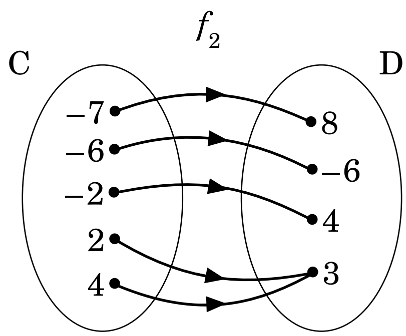
La fonction f de la figure 1.16 est bijective, car dom f = A et elle est injective et surjective.

Dites si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives. Justifiez votre réponse.

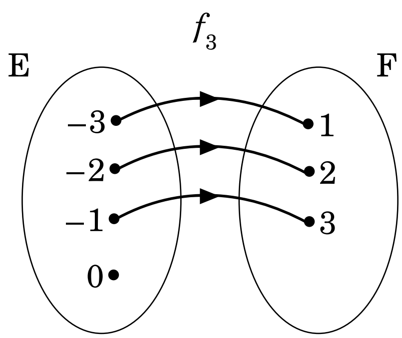
1.



2.



3.



4.