GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

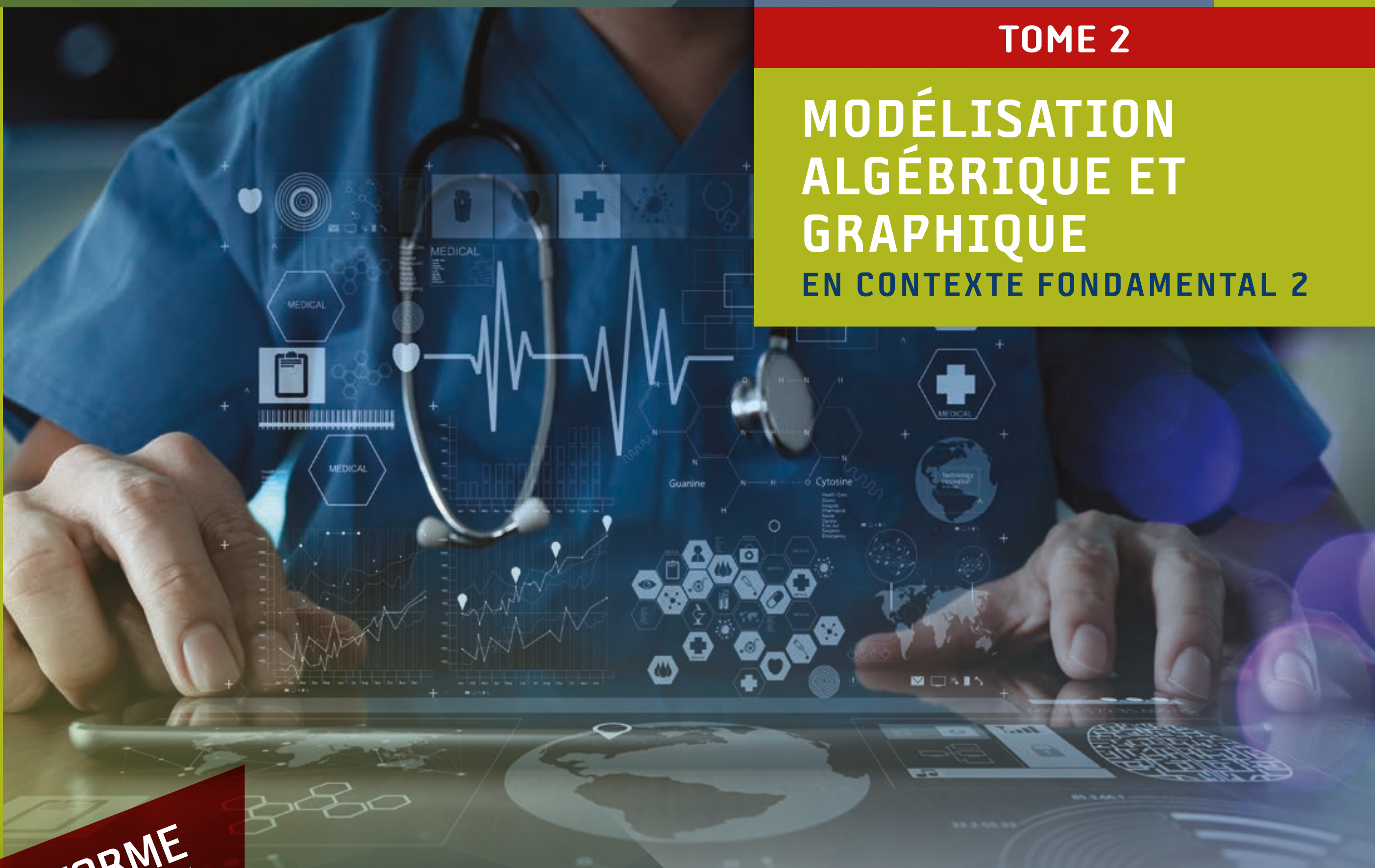
RÉSOLUTION

MAT-5171-2 SN

TOME 2

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE FONDAMENTAL 2



CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

SOFAD

GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-5171-2 SN

TOME 2

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE ET GRAPHIQUE

EN CONTEXTE FONDAMENTAL 2

SOFAD

Gestion de projets :
Nancy Mayrand
Isabelle Tanguay

Conception pédagogique :
Jean-Claude Hamel

Rédaction :
Jean-Claude Hamel
Jonathan Lafond
Jean-François Cardin
Stéphane Laplante

Révision pédagogique :
Valériane Passaro
Déborah Nadeau Parent

Révision docimologique :
Stephan Bertrand

Révision scientifique :
Jean-François Cardin

Révision linguistique :
Nadia Leroux

Conception graphique et couverture :
Mylène Choquette

Commandes graphiques :
Olivier Arsenault
Marie-Chantal Beaulieu

Production et illustrations :
Alphatek

Lecture d'épreuves :
Olivier Arsenault
Marie-Ève Côté
Julie Doyon
Carl-Abel Melançon

Correction d'épreuves :
Ginette Choinière

Cet ouvrage est en partie financé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec.

Dépôt légal – 2018
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN : 978-2-89493-932-1 (imprimé)
ISBN : 978-2-89493-936-9 (PDF)

Septembre 2018

Crédits photos

SHUTTERSTOCK
C1 © everything possible • p. 2 © paulista • p. 3h © Gorodenkoff • p. 3b © Vaclav Volrab • p. 4 © Photo_DDD • p. 7 © JOAT • p. 9 © Zagory • p. 10 © Alejandro J. de Parga • p. 11 © Rost9 • p. 12 © Hermann Danzmayr • p. 13h © KuLouKu • p. 13b © Sirirat • p. 15 © Pla2na • p. 24 © GraphicsRF • p. 26 © Number1411 • p. 27 © shanestillz • p. 28c © Szasz-Fabian Jozsef • p. 28b © Rudmer Zwerver • p. 29 © Nixx Photography • p. 30 © Odua Images • p. 31 © Rawpixel.com • p. 32 © Romaset • p. 33h © Rido • p. 33b © Tiger Images • p. 34h © E. P. Adler • p. 34c © wonderisland • p. 37c © DrimaFilm • p. 37b © VILevi • p. 41 © Galkin Grigory • p. 45 © Andrei Burylov • p. 47 © gualtiero boffi • p. 48 © Victor Moussa • p. 50 © Dusit srisroy • p. 52-53 © boutique • p. 57 © ihor_seamless • p. 60h © Syda Productions • p. 60b © Lotus_studio • p. 61 © Kateryna Kon • p. 64 © Galkin Grigory • p. 70 © Anna Jedynak • p. 71c © Sebastian Duda • p. 71b © Africa Studio • p. 72 © ercan senkaya • p. 74 © Artem Oleshko • p. 76 © Sergey Uryadnikov • p. 78 © Traveller Martin • p. 79h © StudioSmart • p. 79b © Efimova Anna • p. 80 © Astrobobo • p. 83b © DR-images • p. 84 © Triff • p. 86 © Syda Productions • p. 90 © Oleksandr Lytvynenko • p. 96h © FotoDuets • p. 96b © MakDill • p. 100 © Evgeny Atamanenko • p. 102 © YanLev • p. 104 © nasidastudio • p. 105h © Vova Shevchuk • p. 105b © Preto Perola • p. 106 © RomanR • p. 107 © Pixsooz • p. 108 © Shane Myers Photography • p. 109 © Digital Storm • p. 110 © Eric Isselee • p. 112 © fuart • p. 115 © Bashutskyy • p. 118 © linling • p. 120 © Monkey Business Images • p. 125 © Steven Grogger • p. 126h © Passakorn sakulphan • p. 126b © photo.ua • p. 130 © Helder Almeida • p. 132 © vectorfusionart • p. 133 © Oksana Kuzmina • p. 134 © rakoshi • p. 138 © amiak • p. 143 © piick • p. 145 © nuwatchai srikrungplee • p. 146 © PlusONE • p. 147 © santypan • p. 148 © Robert Lucian Crusitu • p. 149 © Everett Historical • p. 150 © Pop_Studio • p. 151 © Daumantas Liekis • p. 152 © ArthurStock • p. 154 © Triff • p. 155h © Sergey Nivens • p. 155b © mahmood alishah • 165 © Clayton Suares • 166 © Ilyshev Dmitry • p. 168 © inavanhateren • p. 173 © Joachim Bago • p. 178 © Vitaly Korovin • p. 180 © QQ7 • p. 184-185 © Victoria Kalinina • p. 189 © Brad77 • p. 190 © Sergey Nivens • p. 193 © windu • p. 194 © Sergey Nivens • p. 199 © LongQuattro • p. 201 © Denis Lightman • p. 203-206 © kenkuza • p. 205 © Marek BiSKI • p. 208 © Mikhail Leonov • p. 209 © Doug Lemke • p. 213 © Ollyy • p. 215c © Korvit • p. 215b © Juergen Faelchle • p. 217 © Natinka • p. 219 © Artistdesign29 • p. 220 © anuwattn • p. 222 © Zhukovskaya Elena • p. 233 © Andriy_A • p. 237h © ESB Professional • p. 237b © Simonas Vaikasas • p. 244 © Vergunova • p. 245 © AntartStock • p. 246 © Vitaly Korovin • p. 248 © Svetlana Rumyantseva • p. 250 © welcomia • p. 252 © Vergunova • p. 263 © Valenty • p. 272 © fim.design • p. 277 © Anita Ponne

WIKIPEDIA COMMONS
p. 83c © PD-NASA • p. 156 © Julian Herzog

ALAMY STOCK PHOTO
p. 238 © sciencephotos

Légende : d = droite c = centre g = gauche
h = haut b = bas

Table des matières TOME 2

Cet aperçu contient :
- la table des matières;
- l'introduction;
- la première situation d'apprentissage.

CHAPITRE 4

CHAPITRE 5

CHAPITRE 6

COMPLÉMENTS

PRÉSENTATION DU GUIDE D'APPRENTISSAGE

Bienvenue dans le guide d'apprentissage du cours ***Modélisation algébrique et graphique en contexte fondamental 2***. Ce cours, le deuxième de la séquence **Sciences Naturelles** en **5e secondaire**, a pour but de développer votre habileté à traiter des situations qui requièrent une représentation algébrique ou graphique exprimant une relation entre des quantités. À cette fin, vous serez amené à étudier huit nouvelles fonctions réelles, soit les fonctions :

- exponentielle ;
- logarithmique ;
- rationnelle ;
- racine carrée ;
- sinusoïdale ;
- tangente ;
- définie par partie ;
- valeur absolue.

Vous compléterez votre formation en approfondissant vos connaissances sur :

- les opérations sur les fonctions ;
- la recherche du type de dépendance à l'aide de la courbe la mieux ajustée ;
- la résolution d'équations et d'inéquations à une variable.

Vous serez amené à utiliser diverses stratégies de résolution afin de comprendre et de modéliser des situations-problèmes. Votre aptitude à déployer un raisonnement mathématique sera sollicitée. Puis, vous aurez à décrire vos démarches de résolution avec clarté et rigueur à l'aide du langage mathématique.

Vous êtes maintenant convié à réaliser les activités d'apprentissage qui vous sont proposées dans les six chapitres des deux guides de ce cours et à enrichir vos connaissances en algèbre.

Portailsofad.com

Sur portailsofad.com, des capsules vidéo, des activités TIC et des versions imprimables des ressources complémentaires au guide de la collection RÉSOLUTION vous accompagneront tout au long de vos apprentissages.

COMPOSANTES D'UN CHAPITRE

La démarche d'apprentissage proposée dans un chapitre permet de progresser en réinvestissant les apprentissages réalisés d'une section à l'autre. Le schéma qui suit illustre cette démarche et précise l'intention pédagogique de chacune des sections.

OUVERTURE DU CHAPITRE

La première page décrit le contexte et la thématique qui serviront de trame de fond à l'acquisition des nouveaux savoirs abordés dans le chapitre.

CHAPITRE 4

La fonction exponentielle et les logarithmes

Des risques pour la santé

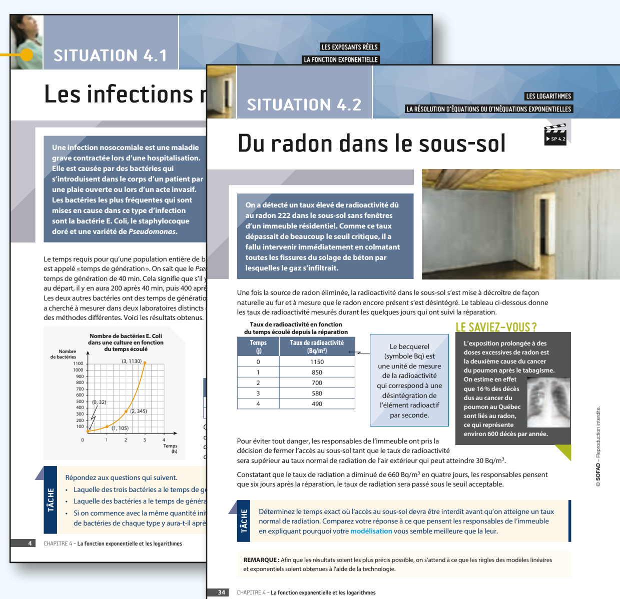
Dans l'histoire de l'humanité, les bactéries ont causé de graves maladies et entraîné la mort de très nombreuses personnes : peste, variole, choléra, tuberculose, etc. Les virus ne sont pas en reste et ont eux aussi causé bien des dégâts : grippe espagnole, SIDA, Ebola, pour n'en nommer que quelques-uns. Depuis le début de l'ère industrielle, d'autres causes de mortalité s'ajoutent à la longue liste, notamment la pollution par radiations nucléaires. Une infection ou une contamination peut se produire à des endroits parfois inattendus. Par exemple, les maladies nosocomiales contractées dans les hôpitaux sont un véritable fléau. Même le sous-sol des maisons peut contenir des gaz radioactifs. Tous ces phénomènes ont un point en commun : ils peuvent se développer à un taux de croissance ou de décroissance constant. Ce type de variation est caractéristique des fonctions exponentielles que vous découvrirez dans ce chapitre avec le concept de logarithme qui leur est lié.

CHAPITRE 4

Une table des matières accompagne cette première page. Les savoirs à acquérir y sont présentés pour chacune des *Situations*, ainsi que le thème des situations-problèmes.

SITUATIONS

De manière générale, il y a deux *Situations* d'apprentissage par chapitre. La démarche proposée dans ces situations permet d'acquérir de nouveaux savoirs et de développer des compétences mathématiques dans des contextes réels, réalistes ou purement mathématiques.



SITUATION 4.1
LES EXPOSANTS RÉELS
LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les infections n

Une infection nosocomiale est une maladie grave contractée lors d'une hospitalisation. Elle est causée par des bactéries qui s'introduisent dans le corps d'un patient par une plaie ouverte ou lors d'un acte invasif. Les bactéries les plus fréquentes qui sont mises en cause dans ce type d'infection sont la bactérie E. Coli, le staphylocoque doré et une variété de *Pseudomonas*.

SITUATION 4.2
LES LOGARITHMES
LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS EXPONENTIELLES

Du radon dans le sous-sol

On a détecté un taux élevé de radioactivité dû au radon 222 dans le sous-sol sans fenêtres d'un immeuble résidentiel. Comme ce taux dépassait de beaucoup le seuil critique, il a fallu intervenir immédiatement en colmatant toutes les fissures du solage de béton par lesquelles le gaz s'infiltrait.

Une fois la source de radon éliminée, la radioactivité dans le sous-sol s'est mise à décroître de façon naturelle au fur et à mesure que le radon encore présent s'est désintégré. Le tableau ci-dessous donne les taux de radioactivité mesurés durant les quelques jours qui ont suivi la réparation.

Taux de radioactivité en fonction du temps écoulé depuis la réparation

Temps (j)	Taux de radioactivité (Bq/m³)
0	1150
1	850
2	700
3	580
4	490

Le becquerel (symbole Bq) est une unité de mesure de la radioactivité qui correspond à une désintégration de l'élément radioactif par seconde.

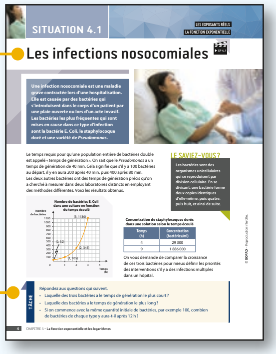
LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour éviter tout danger, les responsables de l'immeuble ont pris la décision de fermer l'accès au sous-sol tant que le taux de radioactivité sera supérieur au taux normal de radiation de l'air extérieur qui peut atteindre 30 Bq/m³.

TÂCHE

Déterminez le temps exact où l'accès au sous-sol devra être interdit avant qu'on atteigne un taux normal de radiation. Comparez votre réponse à ce que pensent les responsables de l'immeuble en expliquant pourquoi votre modélisation vous semble meilleure que la leur.

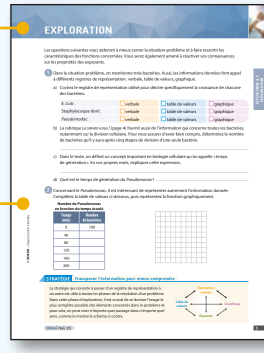
PHASES D'UNE SITUATION


SITUATION 4.1
Les infections nosocomiales

SITUATION–PROBLÈME

Liée au thème principal du chapitre, cette page décrit brièvement le contexte de la situation-problème, ainsi que les données nécessaires à sa résolution.

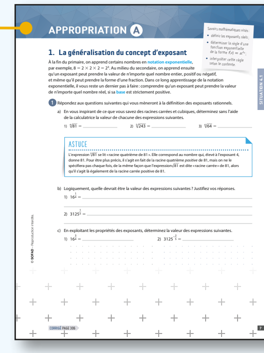
Un encadré décrit la tâche que vous aurez à réaliser plus loin dans la section *Résolution*. Cette tâche est le point de départ vous permettant d'acquérir de nouveaux savoirs en vue de résoudre la situation-problème.


EXPLORATION

EXPLORATION

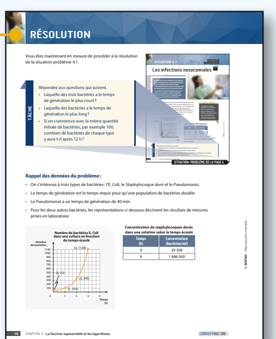
Cette section vous invite à analyser les données de la situation-problème, à déterminer les savoirs que vous possédez et ceux que vous devez acquérir pour réaliser la tâche.

Son questionnement vous guidera vers une stratégie de résolution de problème.


APPROPRIATION A

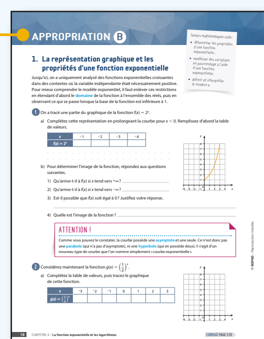
APPROPRIATION A

C'est ici que sont assimilés les savoirs nécessaires pour résoudre la situation-problème. Chaque *Appropriation* stimule la réflexion avant la présentation de nouveaux savoirs mathématiques.


RÉSOLUTION

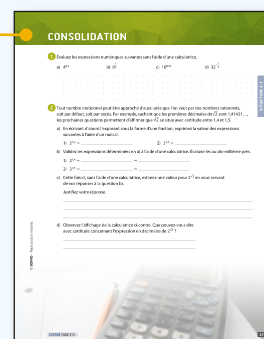
RÉSOLUTION

Arrivé à cette section, vous devriez avoir acquis toutes les connaissances et les stratégies essentielles à la résolution de la situation-problème énoncée au début de la situation.


APPROPRIATION B

APPROPRIATION B

Dans cette deuxième appropriation, vous acquerrez de nouveaux savoirs prescrits au programme en lien avec ceux vus dans l'*Appropriation A*.


CONSOLIDATION

CONSOLIDATION

Cette section vous permettra de consolider les savoirs mathématiques acquis dans les *Appropriations A* et *B*. Tout comme la section *Intégration*, cette *Consolidation* permet aussi de développer les compétences mathématiques.

EN FIN DE CHAPITRE...

SAVOIRS EN RÉSUMÉ

Cette section résume tous les savoirs *À retenir* sous forme de phrases trouées. On vous invite à ajouter les informations manquantes.

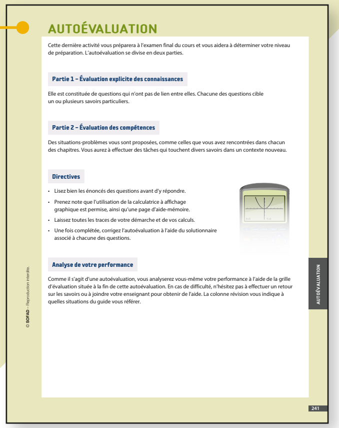
INTÉGRATION

Dans cette section comprenant des exercices et des situations complexes, vous devrez appliquer les savoirs vus dans ce chapitre.

SAÉ

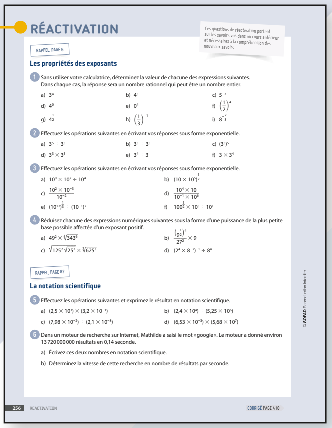
La *SAÉ* est une tâche complexe élaborée selon le modèle des évaluations de sanction. Elle est accompagnée d'une grille d'évaluation des compétences.

COMPLÉMENTS



AUTOÉVALUATION

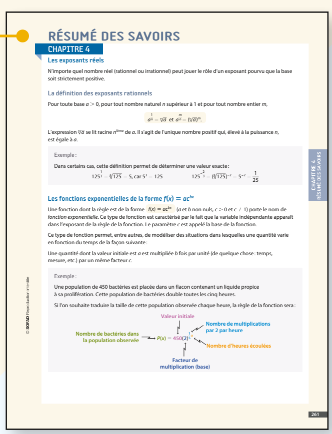
Une *Autoévaluation* est présentée en première partie de ces *Compléments* dans le Tome 2. Elle permet d'évaluer vos connaissances acquises et les compétences mathématiques développées tout au long du cours. Vous pourrez ainsi déterminer les savoirs que vous maîtrisez et ceux pour lesquels une révision s'impose avant de passer à l'*Activité notée synthèse*.



RÉACTIVATION

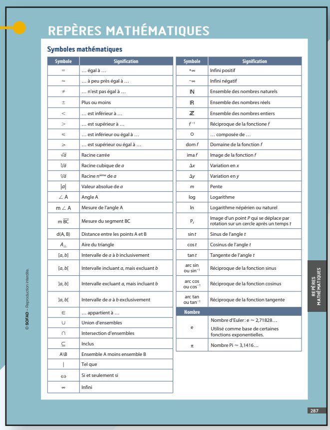
Au cours des *Situations*, vous croiserez des rubriques *Rappel* présentant des savoirs vus dans un cours antérieur et nécessaires à la compréhension du nouveau savoir ou à la résolution de la situation en cours.

Cette *Réactivation* permettra de réviser, à l'aide d'exercices, les règles et les concepts mathématiques qui font l'objet d'un *Rappel*.



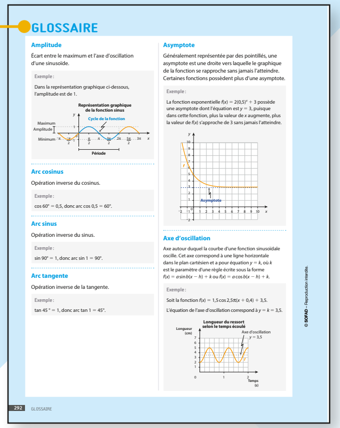
RÉSUMÉ DES SAVOIRS

C'est dans cette section que la version complète des *Savoirs en résumé* se situe. Une version imprimable est aussi disponible en ligne.



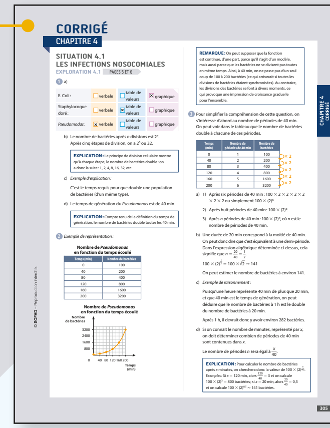
REPÈRES MATHÉMATIQUES

Dans cette section, on présente des symboles mathématiques utilisés dans le guide et certaines abréviations d'unités de mesure. Des formules mathématiques en rappel y sont aussi offertes.



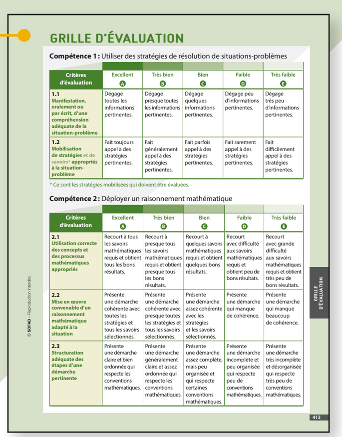
GLOSSAIRE

Les mots et expressions **écrits en bleu** dans le texte courant sont définis dans le *Glossaire*.



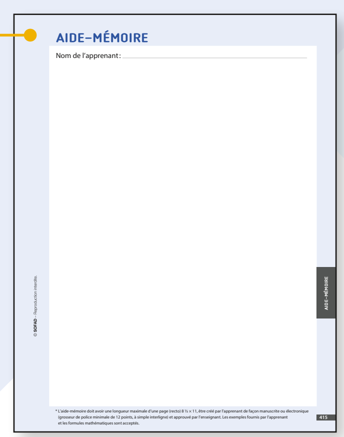
CORRIGÉ

Vers la fin du guide, vous repérerez le *Corrigé*. Il a été conçu non seulement pour valider vos réponses, mais aussi pour vous accompagner dans vos apprentissages. Il contient les réponses aux questions, des explications détaillées sur la démarche ou le raisonnement à mettre en œuvre.



GRILLE D'ÉVALUATION

Une *Grille d'évaluation* des compétences vous est offerte à la fin du guide. À la suite de la résolution d'une *SAÉ*, vous êtes invité à vous évaluer à l'aide de cette grille. Vous pourrez alors compléter la version abrégée située dans le bas de chaque *SAÉ*.



AIDE-MÉMOIRE

Vous pouvez vous constituer un aide-mémoire. Une feuille détachable est prévue à cet effet à la fin du guide dans le Tome 2. Il vous est permis d'utiliser cet aide-mémoire lors de l'épreuve finale.

RUBRIQUES ET PICTOGRAMMES

Invite à visionner une capsule vidéo portant sur la situation-problème.

TÂCHE

Répondez aux questions qui suivent…

Présente la tâche à exécuter dans le cadre de votre situation-problème.

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 138, NUMÉROS 1 À 3

Déterminer la…

La droite qui s'ajuste…

Exemple :

Un site Internet permet…

Réfère à des connaissances que vous avez acquises dans des cours antérieurs et à des exercices de réactivation en lien avec ce *Rappel*.

À RETENIR

Les fonctions…

Une fonction dont la règle…

Exemple :

On reprend la situation …

Présente les savoirs mathématiques que vous devez maîtriser. Ce sont les savoirs prescrits par le programme d'étude.

STRATÉGIE **Représenter une…**

La stratégie qui consiste à passer d'un registre de représentation à un autre est…

Présente des stratégies de résolution de problème qui peuvent s'appliquer dans diverses situations.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Les bactéries sont des organismes unicellulaires qui se reproduisent par…

Permet de découvrir des notes historiques et culturelles liées aux concepts mathématiques à l'étude.

ASTUCE

L'expression $\sqrt[4]{81}$ se lit « racine quatrième de 81 ». Elle correspond au nombre qui, élevé à l'exposant 4, donne 81…

Propose une astuce qui simplifie le travail ou offre une façon différente de traiter le problème ou d'appliquer le concept à l'étude.

ATTENTION !

Il importe de retenir que ces définitions sont valables seulement si la base *a* est strictement positive…

Met en garde sur des pièges à éviter ou des exceptions qui peuvent s'appliquer au concept à l'étude.

TIC

L'activité TIC 4.1.1 permet d'explorer les touches qui servent à manipuler des expressions exponentielles sur la calculatrice à affichage graphique. Elle est disponible…

Incite à effectuer une activité en ligne (GeoGebra ou calculatrice à affichage graphique) qui vous fera explorer la notion travaillée en utilisant des outils technologiques.

ACTIVITÉ NOTÉE

Vous devez maintenant effectuer l'activité notée 1. Elle est accessible sur le site du cours…

Indique que vous êtes prêt à effectuer l'*Activité notée* prévue pour valider votre compréhension en cours d'apprentissage. L'*Activité notée synthèse* se fait, quant à elle, à la toute fin du cours. Ces activités sont présentées dans des fascicules séparés du guide. Vous devrez remettre chaque activité complétée à votre enseignant ou à votre tuteur qui vous fournira une rétroaction à la suite de sa correction.

CHAPITRE 4

La fonction exponentielle et les logarithmes

Des risques pour la santé

Dans l'histoire de l'humanité, les bactéries ont causé de graves maladies et entraîné la mort de très nombreuses personnes : peste, variole, choléra, tuberculose, etc. Les virus ne sont pas en reste et ont eux aussi causé bien des dégâts : grippe espagnole, SIDA, Ebola, pour n'en nommer que quelques-uns. Depuis le début de l'ère industrielle, d'autres causes de mortalité s'ajoutent à la longue liste, notamment la pollution par radiations nucléaires. Une infection ou une contamination peut se produire à des endroits parfois inattendus. Par exemple, les maladies nosocomiales contractées dans les hôpitaux sont un véritable fléau. Même le sous-sol des maisons peut contenir des gaz radioactifs. Tous ces phénomènes ont un point en commun : ils peuvent se développer à un taux de croissance ou de décroissance constant. Ce type de variation est caractéristique des fonctions exponentielles que vous découvrirez dans ce chapitre avec le concept de logarithme qui leur est lié.

CHAPITRE 4

SITUATION 4.1

LES EXPOSANTS RÉELS

LA FONCTION EXPONENTIELLE

Les infections nosocomiales

SP 4.1

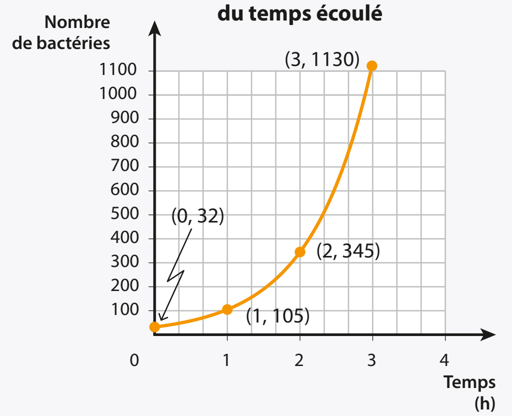
Une infection nosocomiale est une maladie grave contractée lors d'une hospitalisation. Elle est causée par des bactéries qui s'introduisent dans le corps d'un patient par une plaie ouverte ou lors d'un acte invasif. Les bactéries les plus fréquentes qui sont mises en cause dans ce type d'infection sont la bactérie E. Coli, le staphylocoque doré et une variété de *Pseudomonas*.

Le temps requis pour qu'une population entière de bactéries double est appelé « temps de génération ». On sait que le *Pseudomonas* a un temps de génération de 40 min. Cela signifie que s'il y a 100 bactéries au départ, il y en aura 200 après 40 min, puis 400 après 80 min. Les deux autres bactéries ont des temps de génération précis qu'on a cherché à mesurer dans deux laboratoires distincts en employant des méthodes différentes. Voici les résultats obtenus.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Les bactéries sont des organismes unicellulaires qui se reproduisent par division cellulaire. En se divisant, une bactérie forme deux copies identiques d'elle-même, puis quatre, puis huit, et ainsi de suite.

Nombre de bactéries E. Coli dans une culture en fonction du temps écoulé



Concentration de staphylocoques dorés dans une solution selon le temps écoulé

Temps (h)	Concentration (bactéries/ml)
4	29 300
9	1 886 000

On vous demande de comparer la croissance de ces trois bactéries pour mieux définir les priorités des interventions s'il y a des infections multiples dans un hôpital.

TÂCHE

Répondez aux questions qui suivent.

- Laquelle des trois bactéries a le temps de génération le plus court ?
- Laquelle des bactéries a le temps de génération le plus long ?
- Si on commence avec la même quantité initiale de bactéries, par exemple 100, combien de bactéries de chaque type y aura-t-il après 12 h ?

EXPLORATION

Les questions suivantes vous aideront à mieux cerner la situation-problème et à faire ressortir les caractéristiques des fonctions concernées. Vous serez également amené à réactiver vos connaissances sur les propriétés des exposants.

1 Dans la situation-problème, on mentionne trois bactéries. Aussi, les informations données font appel à différents registres de représentation : verbale, table de valeurs, graphique.

a) Cochez le registre de représentation utilisé pour décrire spécifiquement la croissance de chacune des bactéries.

E. Coli :	☐ verbale	☐ table de valeurs	☐ graphique
Staphylocoque doré :	☐ verbale	☐ table de valeurs	☐ graphique
Pseudomodas :	☐ verbale	☐ table de valeurs	☐ graphique

b) La rubrique *Le saviez-vous ?* (page 4) fournit aussi de l'information qui concerne toutes les bactéries, notamment sur la division cellulaire. Pour vous assurer d'avoir bien compris, déterminez le nombre de bactéries qu'il y aura après cinq étapes de division d'une seule bactérie.

____

c) Dans le texte, on définit un concept important en biologie cellulaire qu'on appelle « temps de génération ». En vos propres mots, expliquez cette expression.

____

d) Quel est le temps de génération du *Pseudomonas* ? ________________

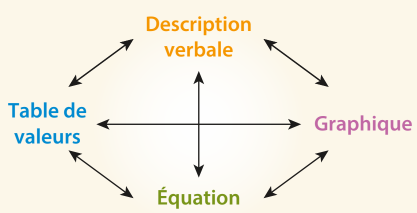
2 Concernant le *Pseudomonas*, il est intéressant de représenter autrement l'information donnée. Complétez la table de valeurs ci-dessous, puis représentez la fonction graphiquement.

Nombre de *Pseudomonas* en fonction du temps écoulé

Temps (min)	Nombre de bactéries
0	100
40	
80	
120	
160	
200	

STRATÉGIE Transposer l'information pour mieux comprendre

La stratégie qui consiste à passer d'un registre de représentation à un autre est utile à toutes les phases de la résolution d'un problème. Dans cette phase d'exploration, il est crucial de se donner l'image la plus complète possible des éléments concernés dans le problème et pour cela, on peut viser n'importe quel passage dans n'importe quel sens, comme le montre le schéma ci-contre.



CORRIGÉ PAGE 305

3 Il peut s'avérer utile d'avoir une expression algébrique qui permet de calculer le nombre de *Pseudomonas,* quel que soit le temps écoulé. Pour définir une telle expression, observez la table de valeurs obtenue à la question précédente.

Notez qu'après une période de 40 min, le nombre de bactéries est égal à 100×2. Après deux périodes de 40 min, ce nombre est passé à $100 \times 2 \times 2$. Après trois périodes de 40 min, il est passé à $100 \times 2 \times 2 \times 2$.

a) Quelle expression représente le nombre de bactéries après :

1) six périodes de 40 min ? ____________________

2) huit périodes de 40 min ? ____________________

3) n périodes de 40 min ? ____________________

b) En vous fiant à l'expression algébrique définie ci-dessus, estimez le nombre de bactéries après 20 min.

____

____

c) Quel devrait être le nombre de bactéries après 1 h ? Expliquez votre raisonnement.

____

____

d) Quel devrait être le nombre de bactéries après x min ? Expliquez votre raisonnement.

____

____

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 256, NUMÉROS 1 À 4

Les propriétés des exposants

Pour toute base a strictement positive et tout exposant m et n, on peut énoncer les définitions et les propriétés suivantes.

Propriété	Description
Définition des exposants négatifs ou nuls :	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$
Définition des exposants fractionnaires :	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ et $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$
Puissance d'une puissance :	$(a^m)^n = a^{mn}$
Produit ou quotient de deux puissances :	$a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Vous avez vu que le nombre de *Pseudomonas,* durant la phase de croissance, est une fonction du temps écoulé et que la règle de cette fonction comporte une variable en exposant. Ce type de fonction, dans laquelle la **variable indépendante** joue le rôle d'un exposant, porte le nom de **fonction exponentielle**. Dans les pages suivantes, vous en apprendrez plus sur ce nouveau modèle.

CORRIGÉ PAGE 305

APPROPRIATION A

Savoirs mathématiques visés :

- définir les exposants réels ;
- déterminer la règle d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ac^{bx}$;
- interpréter cette règle selon le contexte.

1. La généralisation du concept d'exposant

À la fin du primaire, on apprend certains nombres en **notation exponentielle**, par exemple, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$. Au milieu du secondaire, on apprend ensuite qu'un exposant peut prendre la valeur de n'importe quel nombre entier, positif ou négatif, et même qu'il peut prendre la forme d'une fraction. Dans ce long apprentissage de la notation exponentielle, il vous reste un dernier pas à faire : comprendre qu'un exposant peut prendre la valeur de n'importe quel nombre réel, si sa **base** est strictement positive.

1 Répondez aux questions suivantes qui vous mèneront à la définition des exposants rationnels.

a) En vous inspirant de ce que vous savez des racines carrées et cubiques, déterminez sans l'aide de la calculatrice la valeur de chacune des expressions suivantes.

1) $\sqrt[4]{81} =$ ________ 2) $\sqrt[5]{243} =$ ________ 3) $\sqrt[6]{64} =$ ________

ASTUCE

L'expression $\sqrt[4]{81}$ se lit « racine quatrième de 81 ». Elle correspond au nombre qui, élevé à l'exposant 4, donne 81. Pour être plus précis, il s'agit en fait de la racine quatrième *positive* de 81, mais on ne le spécifiera pas chaque fois, de la même façon que l'expression $\sqrt{81}$ est dite « racine carrée » de 81, alors qu'il s'agit là également de la racine carrée positive de 81.

b) Logiquement, quelle devrait être la valeur des expressions suivantes ? Justifiez vos réponses.

1) $16^{\frac{1}{4}} =$ ________

2) $3125^{\frac{1}{5}} =$ ________

c) En exploitant les propriétés des exposants, déterminez la valeur des expressions suivantes.

1) $16^{\frac{3}{4}} =$ ________ 2) $3125^{-\frac{2}{5}} =$ ________

CORRIGÉ PAGE 306

À RETENIR

Les exposants réels

N'importe quel nombre réel (rationnel ou irrationnel) peut jouer le rôle d'un exposant pourvu que la base soit strictement positive.

La définition des exposants rationnels

Pour toute base $a > 0$, pour tout nombre naturel n supérieur à 1 et pour tout nombre entier m,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ et } a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

L'expression $\sqrt[n]{a}$ se lit racine $n^{\text{ième}}$ de a. Il s'agit de l'unique nombre positif qui, élevé à la puissance n, est égale à a.

Exemple :

Dans certains cas, cette définition permet d'obtenir une valeur exacte :

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ car } 2^4 = 16 \qquad 16^{-\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^{-3} = (2)^{-3} = \frac{1}{8}$$

Autrement, on peut obtenir une approximation à l'aide d'une calculatrice : $16^{\frac{1}{5}} = 16^{0,2} \approx 1,7411$.

La définition des exposants irrationnels

Pour toute base $a > 0$ et pour tout nombre irrationnel x, il est possible de déterminer la valeur de a^x avec autant de décimales que l'on veut à l'aide d'une approximation rationnelle de x.

Exemple :

Comme $\pi \approx 3,141\,593$, on peut affirmer que $2^{\pi} \approx 2^{3,141593} \approx 8,8250$.

ATTENTION !

Il importe de retenir que ces définitions sont valables seulement si la base a est strictement positive.

Exemple :
Si on appliquait ces définitions pour $a = -1$, on obtiendrait $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$. Or, il n'existe aucun nombre réel b, tel que $b^2 = -1$, donc la racine carrée de -1 n'est pas un nombre réel.

On peut dire la même chose de toute expression de la forme $(-1)^{\frac{m}{n}}$, où n est un nombre pair.

Exemple :
C'est le cas de $(-1)^{\frac{1}{4}}$ ou $\sqrt[4]{-1}$ qui n'est pas un nombre réel, car il faudrait extraire une racine paire d'un nombre négatif, ce qui est impossible dans l'ensemble des nombres réels.

EXERCEZ-VOUS

2 Déterminez, sans utiliser de calculatrice, la valeur des expressions suivantes en écrivant chacune des étapes de votre calcul. Puis, vérifiez vos réponses à l'aide de celle-ci.

a) $36^{-\frac{3}{2}}$ __________

b) $64^{-\frac{1}{3}}$ __________

c) $81^{\frac{3}{4}}$ __________

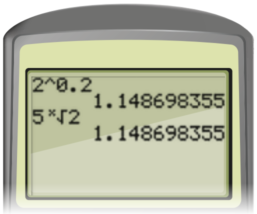
d) $125^{-\frac{2}{3}}$ __________

e) $32^{0,6}$ __________

f) $25^{2,5}$ __________

ASTUCE

Les calculatrices ont habituellement une touche $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{\wedge}$ qui permet d'élever tout nombre positif à un exposant quelconque. Certaines d'entre elles possèdent aussi une touche $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ ou un autre type de commande qui permet d'extraire une racine entière d'un nombre. Repérez-la !



TIC L'activité TIC 4.1.1 permet d'explorer les touches qui servent à manipuler des expressions exponentielles sur la calculatrice à affichage graphique. Elle est disponible sur portailsofad.com.

3 Quelle expression a la plus grande valeur : 3^{π} ou π^3 ?

____

____

2. Les fonctions exponentielles de la forme $f(x) = ac^{bx}$

Lorsque la variable indépendante apparaît dans l'exposant de la règle d'une fonction, on dit qu'il s'agit d'une fonction exponentielle. Dans cette section, on s'intéresse aux fonctions exponentielles écrites sous la forme $f(x) = ac^{bx}$, où a et b sont les **paramètres** multiplicatifs habituels et le paramètre c est la base de la fonction.

On se limitera pour l'instant à des valeurs de a et de b strictement positives et à des valeurs de c supérieures à 1. Dans ce cas, la fonction permet de décrire des phénomènes à croissance exponentielle, comme dans l'exemple suivant.

4 Dans une communauté, cinq personnes présentent les symptômes d'une maladie contagieuse. Les services sanitaires essaient de prévoir le nombre de personnes qui seront infectées dans les prochains jours. Différentes hypothèses sont avancées.

Hypothèse 1	Le nombre de personnes présentant les mêmes symptômes doublera chaque jour.
Hypothèse 2	Le nombre de personnes présentant les mêmes symptômes doublera toutes les 6 h.
Hypothèse 3	Le nombre de personnes présentant les mêmes symptômes sera multiplié par 10 chaque semaine.

a) Soit $P_1(x)$ le nombre de personnes infectées après x jours selon l'hypothèse 1. Après avoir complété le tableau ci-contre, déterminez la règle de cette fonction, sous la forme $f(x) = a(c)^{bx}$.

____

Nombre de personnes infectées en fonction du temps écoulé selon l'hypothèse 1

Temps (j)	Nombre de personnes infectées
0	
1	
2	
3	
4	

b) Dans la règle que vous avez définie, quelle est la valeur des paramètres a, b et c ? Que signifient les valeurs des paramètres a et c dans ce contexte ?

____

____

____

c) Considérez maintenant l'hypothèse 2. Soit $P_2(x)$ le nombre de personnes infectées et x le temps en jours. À l'aide des mêmes paramètres a et c de la fonction précédente, mais avec l'ajout d'un paramètre b, déterminez la règle de cette fonction. Interprétez ce nouveau paramètre selon le contexte.

____

____

d) En tenant compte de ce que vous avez observé jusqu'ici, déterminez la règle de la fonction $P_3(x)$ qui permet d'estimer le nombre de personnes infectées après x jours selon l'hypothèse 3. Expliquez votre raisonnement.

____

____

CORRIGÉ PAGE 306

À RETENIR

Les fonctions exponentielles de la forme $f(x) = ac^{bx}$

Une fonction dont la règle est de la forme $f(x) = ac^{bx}$ (a et b non nuls, $c > 0$ et $c \neq 1$) porte le nom de *fonction exponentielle*. Ce type de fonction est caractérisé par le fait que la variable indépendante apparaît dans l'exposant de la règle de la fonction. Le paramètre c est appelé la base de la fonction.

Ce type de fonction permet, entre autres, de modéliser des situations dans lesquelles une quantité varie en fonction du temps de la façon suivante :

> Une quantité dont la **valeur initiale** est a est multipliée b fois par unité de quelque chose (temps, mesure, etc.) par un même facteur c.

Exemple :

On reprend la situation précédente avec une quatrième hypothèse : on suppose cette fois que le nombre de personnes présentant les mêmes symptômes sera multiplié par trois tous les deux jours.

Comme cinq personnes présentent les symptômes au départ, la règle de la fonction sera :

Valeur initiale

Nombre de multiplications par 3 par jour en moyenne

Nombre de personnes infectées → $P(x) = 5(3)^{\frac{1}{2}x}$

Nombre de jours écoulés

Facteur de multiplication (base)

ASTUCE

Pour une même situation de croissance exponentielle, il y a plusieurs règles équivalentes possibles. Par exemple, sachant que $3^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à $\sqrt{3}$, on pourrait modéliser la situation ci-dessus par la règle $P(x) = 5(\sqrt{3})^x$. Dans ce cas, $b = 1$ et $c = \sqrt{3}$. Cela correspond à une situation dans laquelle le nombre de personnes infectées est multiplié par $\sqrt{3}$ chaque jour.

EXERCEZ-VOUS

5 Une étude a montré que le nombre de personnes au courant d'une rumeur propagée par Internet connaît dans les premières heures une croissance exponentielle. Une personne lance une rumeur sur Internet et on suppose que le nombre de personnes au courant double chaque demi-heure.

Soit $C(t)$ le nombre de personnes au courant de la rumeur après t heures.

a) Quelle est la valeur initiale de cette fonction ? ____________

b) Quel est le facteur de multiplication ? ____________

c) Combien de fois par heure le nombre de personnes est-il multiplié par ce facteur ? ____________

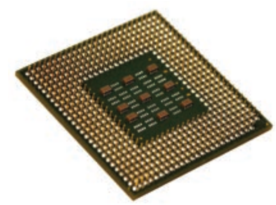
d) Déterminez la règle de la fonction. ____________

e) À l'aide d'une calculatrice, estimez le nombre de personnes qui seront au courant de la rumeur :

1) après 8 h : ____________

2) après 9,5 h : ____________

6 En 1975, le physicien et chimiste américain Gordon Moore a énoncé une **conjecture**, souvent appelée « Loi de Moore », qui prévoyait que la puissance des ordinateurs (mesurée en nombre de transistors par microprocesseur) allait doubler tous les deux ans dans les années futures. Sa prédiction a été remarquablement vérifiée par la suite.



a) Sachant qu'en 1975, un microprocesseur pouvait contenir jusqu'à 10 000 transistors, à combien ce nombre devait-il être rendu en l'an 2000 ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Selon Moore lui-même, la loi qui porte son nom ne pourra pas s'appliquer à l'infini, car un transistor ne peut certainement pas être plus petit qu'un atome dont le rayon a un ordre de grandeur d'environ 10^{-7} mm.

b) Qu'en sera-t-il en 2050 ? Estimez la surface maximale qu'occupera alors chaque transistor sur un microprocesseur de 80 mm^2.

CORRIGÉ PAGE 307

3. La recherche de la règle à partir de données

Parfois, il manque certaines informations pour déterminer directement la règle de la forme $f(x) = ac^x$ à partir du contexte. Ce peut être par exemple que la valeur initiale n'est pas connue ou qu'on ne sait pas par quel facteur la quantité est multipliée à chaque unité de temps. Cependant, s'il y a suffisamment de données fournies, il est possible de définir ces valeurs.

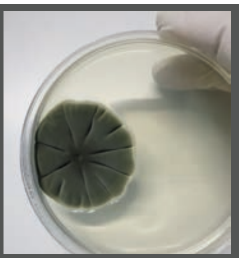
7 En laboratoire, on observe la croissance de la surface couverte par une moisissure depuis son ensemencement dans une boîte de Pétri.

Aire de la moisissure en fonction du temps écoulé

Temps (j)	Aire de la surface (mm^2)
2	8
3	20
4	50
5	125

LE SAVIEZ-VOUS ?

Une boîte de Pétri est une petite boîte cylindrique transparente et peu profonde qui est munie d'un couvercle. Cette boîte est facilement manipulable et peut être en verre ou en plastique. On l'utilise pour y faire la culture de bactéries et de divers organismes.



a) Par quel facteur l'aire de la surface est-elle multipliée :

1) du 2^e au 3^e jour ? ____________________

2) du 3^e au 4^e jour ? ____________________

3) du 4^e au 5^e jour ? ____________________

b) Que constatez-vous ? ____________________

c) Selon ces données, quelle était l'aire de la surface lors de l'ensemencement ?

d) Quelle est la règle de la fonction ? ____________________

e) Sachant que la boîte de Pétri a un diamètre de 6 cm, quel pourcentage de sa surface devrait être couvert de moisissure après 7,5 jours ?

CORRIGÉ PAGE 307

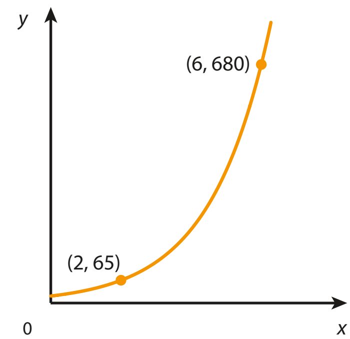
À RETENIR

La règle d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ac^x$

La règle d'une fonction exponentielle peut s'écrire sous la forme simplifiée $f(x) = ac^x$ si on suppose que le paramètre b est égal à 1. Pour déterminer la valeur des deux paramètres a et c, il faut connaître les coordonnées de deux couples de valeurs appartenant à cette fonction.

Exemple 1 :

Voici comment déterminer la règle de la fonction exponentielle représentée ci-contre.



On suppose que la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ac^x$. Les points donnés permettent alors d'établir les deux équations suivantes :

$ac^2 = 65$ (car $f(2) = 65$)

$ac^6 = 680$ (car $f(6) = 680$)

En divisant la deuxième équation par la première, on obtient :

$\frac{\cancel{a}c^6}{\cancel{a}c^2} = \frac{680}{65}$ (élimination du paramètre a)

$c^4 \approx 10,46$ (propriété du quotient de deux puissances)

$c \approx \sqrt[4]{10,46}$ (définition de la racine quatrième d'un nombre)

$c \approx 1,80$ (estimation de $\sqrt[4]{10,46}$ à l'aide d'un exposant rationnel : $10,46^{\frac{1}{4}}$ ou $10,46^{0,25}$)

Pour déterminer la valeur de a, on utilise l'une ou l'autre des deux équations initiales.

$a(1,8)^2 = 65$

$a = \frac{65}{1,8^2} \approx 20$

On peut estimer que la règle de la fonction est $f(x) = 20(1,8)^x$.

ASTUCE

La règle de certaines fonctions exponentielles peut s'écrire sous la forme $f(x) = ac^{bx}$. Ici, trois paramètres décrivent cette règle. Il est toujours plus simple de réduire le nombre de paramètres, lorsque cela est possible. Dans le cas de ces fonctions exponentielles, il suffit de changer la base pour obtenir $b = 1$.

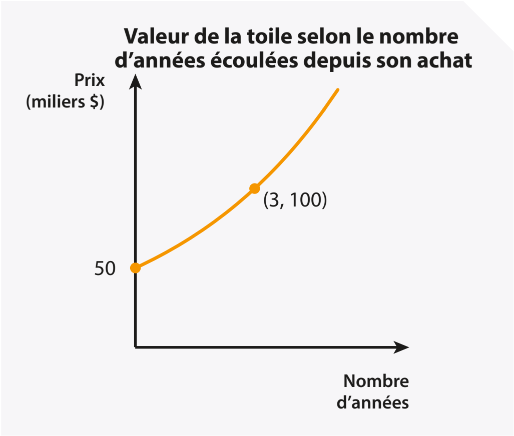
Exemple :
Soit la règle $f(x) = 3(4)^{2x}$.
On peut prendre $4^2 = 16$ comme base et écrire $f(x) = 3(16)^x$. En posant $b = 1$, il reste seulement à déterminer les valeurs de a et de c. Pour cela, les coordonnées de deux points suffisent.

EXERCEZ-VOUS

8 Le graphique d'une fonction exponentielle passe par les points (1, 240) et (5, 1215). Quelle est la règle de cette fonction ?

9 Une toile achetée 50 000 $ d'un artiste peintre connu s'est vendue 100 000 $ trois ans plus tard. Cette situation peut être représentée par le graphique ci-contre, si on suppose que la valeur de la toile dépend du temps écoulé et varie de façon exponentielle.

Selon ce modèle, quel devrait être le prix de la toile cinq ans après son achat ?

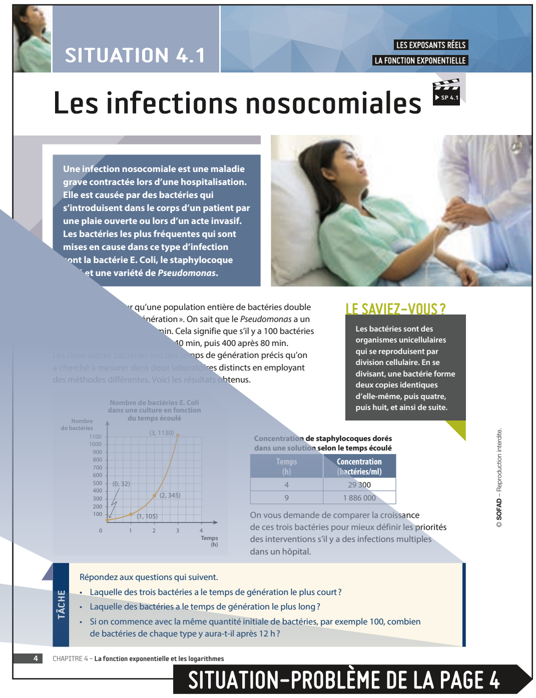


Vous pouvez maintenant déterminer la règle d'une fonction exponentielle à partir d'une table de valeurs ou d'un graphique, ou directement à partir du contexte en tenant compte de la signification des paramètres. Vous pouvez aussi déterminer et interpréter l'**image** de n'importe quel nombre réel par ce type de fonction, en tenant compte notamment de la définition des exposants rationnels et irrationnels. C'est ce dont vous avez besoin pour résoudre la situation-problème 4.1 *Les infections nosocomiales*.

CORRIGÉ PAGE 308

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de procéder à la résolution de la situation-problème 4.1.


SITUATION 4.1
LES EXPOSANTS RÉELS
LA FONCTION EXPONENTIELLE
Les infections nosocomiales

Une infection nosocomiale est une maladie grave contractée lors d'une hospitalisation. Elle est causée par des bactéries qui s'introduisent dans le corps d'un patient par une plaie ouverte ou lors d'un acte invasif. Les bactéries les plus fréquentes qui sont mises en cause dans ce type d'infection sont la bactérie E. Coli, le staphylocoque doré et une variété de *Pseudomonas*.

LE SAVIEZ-VOUS ?
Les bactéries sont des organismes unicellulaires qui se reproduisent par division cellulaire. En se divisant, une bactérie forme deux copies identiques d'elle-même, puis quatre, puis huit, et ainsi de suite.

On vous demande de comparer la croissance de ces trois bactéries pour mieux définir les priorités des interventions s'il y a des infections multiples dans un hôpital.

TÂCHE
Répondez aux questions qui suivent.
- Laquelle des trois bactéries a le temps de génération le plus court ?
- Laquelle des bactéries a le temps de génération le plus long ?
- Si on commence avec la même quantité initiale de bactéries, par exemple 100, combien de bactéries de chaque type y aura-t-il après 12 h ?

SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 4

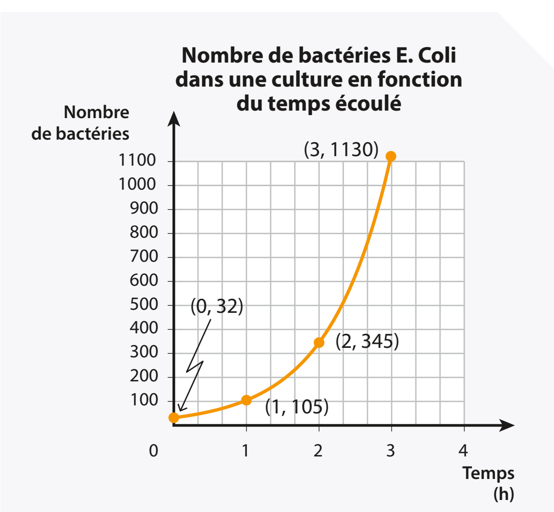
TÂCHE

Répondez aux questions qui suivent.

- Laquelle des trois bactéries a le temps de génération le plus court ?
- Laquelle des bactéries a le temps de génération le plus long ?
- Si on commence avec la même quantité initiale de bactéries, par exemple 100, combien de bactéries de chaque type y aura-t-il après 12 h ?

Rappel des données du problème :

- On s'intéresse à trois types de bactéries : l'E. Coli, le Staphylocoque doré et le *Pseudomonas*.
- Le temps de génération est le temps requis pour qu'une population de bactéries double.
- Le *Pseudomonas* a un temps de génération de 40 min.
- Pour les deux autres bactéries, les représentations ci-dessous décrivent les résultats de mesures prises en laboratoire.



Concentration de staphylocoques dorés dans une solution selon le temps écoulé

Temps (h)	Concentration (bactéries/ml)
4	29 300
9	1 886 000

CORRIGÉ PAGE 308

Résolution

Réponses :

1) ______________________________

2) ______________________________

3) ______________________________

CORRIGÉ PAGE 308

APPROPRIATION B

Savoirs mathématiques visés :

- déterminer les propriétés d'une fonction exponentielle ;
- modéliser des variations en pourcentage à l'aide d'une fonction exponentielle ;
- définir et interpréter le nombre e.

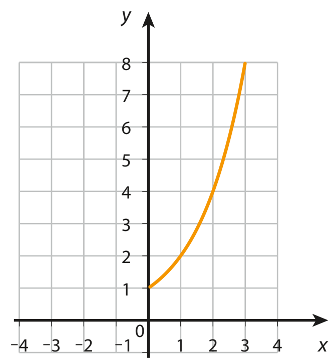
1. La représentation graphique et les propriétés d'une fonction exponentielle

Jusqu'ici, on a uniquement analysé des fonctions exponentielles croissantes dans des contextes où la variable indépendante était nécessairement positive. Pour mieux comprendre le modèle exponentiel, il faut enlever ces restrictions en étendant d'abord le **domaine** de la fonction à l'ensemble des réels, puis en observant ce qui se passe lorsque la base de la fonction est inférieure à 1.

1 On a tracé une partie du graphique de la fonction $f(x) = 2^x$.

a) Complétez cette représentation en prolongeant la courbe pour $x < 0$. Remplissez d'abord la table de valeurs.

x	−1	−2	−3	−4
$f(x) = 2^x$				



b) Pour déterminer l'image de la fonction, répondez aux questions suivantes.

1) Qu'arrive-t-il à $f(x)$ si x tend vers $^+\infty$?

2) Qu'arrive-t-il à $f(x)$ si x tend vers $^-\infty$?

3) Est-il possible que $f(x)$ soit égal à 0 ? Justifiez votre réponse.

4) Quelle est l'image de la fonction ?

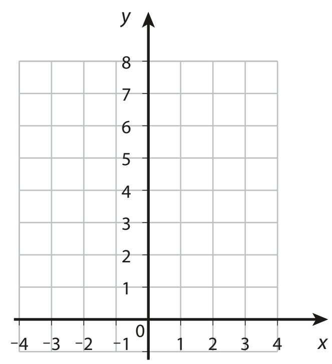
ATTENTION !

Comme vous pouvez le constater, la courbe possède une **asymptote** et une seule. Ce n'est donc pas une **parabole** (qui n'a pas d'asymptote), ni une **hyperbole** (qui en possède deux). Il s'agit d'un nouveau type de courbe que l'on nomme simplement « courbe exponentielle ».

2 Considérez maintenant la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Complétez la table de valeurs, puis tracez le graphique de cette fonction.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$							



CORRIGÉ PAGE 310

b) Comparez cette courbe à celle de la question 1. En quoi est-elle semblable ? En quoi est-elle différente ?

____

____

____

____

ASTUCE

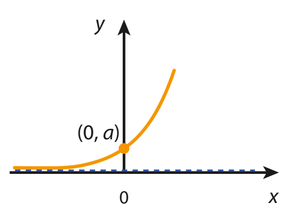
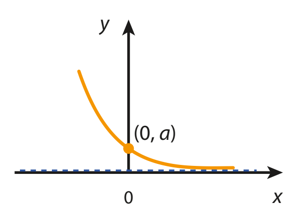
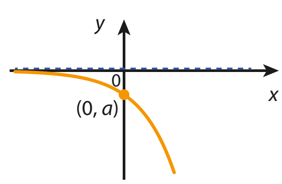
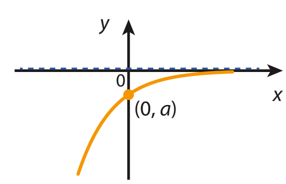
Notez que la règle de la fonction g peut aussi s'écrire $g(x) = 2^{-x}$, car $\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$. La fonction g est donc la fonction qu'on obtient en changeant le signe du paramètre b de la fonction f. Cela vous aide-t-il à répondre à la question ?

À RETENIR

La représentation graphique d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ac^x$ et ses propriétés

Le graphique d'une fonction exponentielle $f(x) = ac^x$ est une courbe qui possède les caractéristiques suivantes :

- elle croise l'axe des ordonnées au point $(0, a)$;
- elle possède une asymptote horizontale qui coïncide avec l'axe des abscisses ($y = 0$) ;
- si $c > 1$, la courbe s'approche de l'asymptote lorsque x tend vers $^{-}\infty$;
- si $0 < c < 1$, la courbe s'approche de l'asymptote lorsque x tend vers $^{+}\infty$;
- si $a > 0$, le graphique de la fonction se situe seulement dans les 1er et 2e quadrants du plan cartésien ; on remarque alors que la fonction est croissante si $c > 1$ et décroissante si $0 < c < 1$;
- si $a < 0$, le graphique de la fonction se situe seulement dans les 3e et 4e quadrants du plan cartésien ; on remarque alors que la fonction est croissante si $0 < c < 1$ et décroissante si $c > 1$.

Valeur de c / Valeur de a	$c > 1$	$0 < c < 1$
$a > 0$	 Courbe croissante s'approchant de l'asymptote lorsque x tend vers $^{-}\infty$	 Courbe décroissante s'approchant de l'asymptote lorsque x tend vers $^{+}\infty$
$a < 0$	 Courbe décroissante s'approchant de l'asymptote lorsque x tend vers $^{-}\infty$	 Courbe croissante s'approchant de l'asymptote lorsque x tend vers $^{+}\infty$

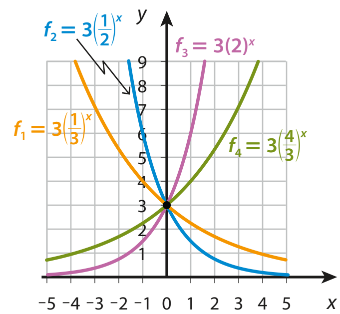
ATTENTION !

Par convention, lorsque l'asymptote d'une fonction exponentielle a pour équation $y = 0$, on ne la trace pas, puisqu'elle est confondue avec l'un des axes déjà tracés. Dans les prochains exemples et corrigés, les asymptotes confondues avec les axes ne seront plus tracées.

CORRIGÉ PAGE 310

Exemple :

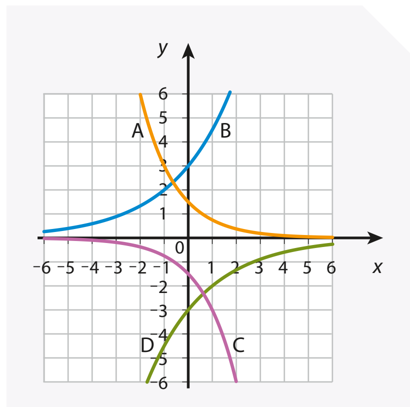
Quatre fonctions sont représentées ci-contre.



- Pour chacune des fonctions, le domaine est ℝ et l'image est $]0, +\infty[$.
- Les fonctions f_1 et f_2 (avec une base comprise entre 0 et 1) sont décroissantes.
- Les fonctions f_3 et f_4 (avec une base supérieure à 1) sont croissantes.
- Toutes les courbes passent par le point (0, 3).
- Les courbes associées aux fonctions f_1 et f_4 sont des réflexions l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Il en est de même des courbes associées aux fonctions f_2 et f_3.

EXERCEZ-VOUS

3 Dans la représentation graphique ci-contre, les courbes A, B, C et D représentent quatre fonctions exponentielles.



a) Associez chacune des fonctions suivantes à son graphique.

1) $f_1(x) = 3\left(\frac{3}{2}\right)^x$: ______________________

2) $f_2(x) = -\frac{3}{2}(2)^x$: ______________________

3) $f_3(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$: ______________________

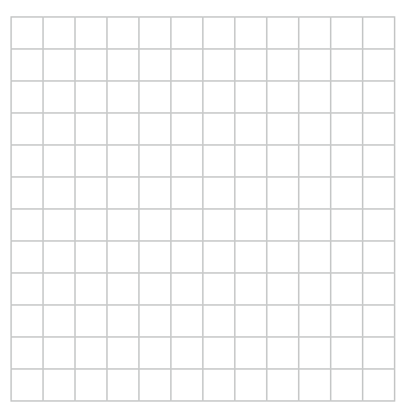
b) Déterminez la règle de la fonction représentée par la courbe restante.

$f_4(x) =$ ______________________

c) À quelles conditions doivent répondre les paramètres a et c pour qu'une fonction exponentielle $f(x) = ac^x$ soit croissante ?

____

4 L'ordonnée à l'origine d'une fonction exponentielle f est 12. Le graphique de la fonction passe par le point (1, 9).



a) Quelle est la règle de cette fonction ?

____

b) Complétez la table de valeurs suivante, puis représentez graphiquement la fonction.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$			12	9	

c) Estimez au millième près la valeur de $f(x)$ si $x = 20$.

____

CORRIGÉ PAGE 310

2. Les variations en pourcentage et la fonction exponentielle

Dans la vie courante, il arrive que pour des **intervalles** de temps constants, la **variable dépendante** soit toujours multipliée par un même facteur pouvant être exprimé en pourcentage. On peut alors modéliser la situation par une fonction exponentielle.

2.1 Des exemples de situations économiques

Pour illustrer ce lien important entre les variations en pourcentage et le modèle exponentiel, on prendra d'abord des exemples dans le monde économique.

5 Vous déposez 10 000 $ dans un compte d'épargne qui offre un taux d'intérêt annuel de 6 %. Cela signifie qu'après un an, le solde du compte augmentera de 6 % et passera donc à 10 600 $. Si vous laissez l'argent dans le compte pour une autre année, 6 % de ce nouveau solde sera ajouté au compte à la fin de la deuxième année.

Solde du compte d'épargne en fonction du temps écoulé

Temps (a)	Solde du compte ($)
0	10 000
1	10 600
2	
3	

a) Complétez la table de valeurs en calculant le solde du compte pour les deux années suivantes.

b) Par quel facteur le solde du compte est-il multiplié chaque année ?

c) Comment ce facteur de multiplication est-il lié au taux d'intérêt ? Expliquez votre réponse.

d) Déterminez la règle de la fonction exponentielle qui représente cette situation.

e) Au centième de dollars près, estimez le solde du compte d'épargne dans dix ans.

6 On suppose que la valeur d'une voiture, qui est initialement de 25 000 $, déprécie de 20 % par année.

a) Complétez la table de valeurs, sachant que la dépréciation est toujours calculée à partir de la valeur de la voiture à la fin de l'année précédente.

Valeur de la voiture en fonction du temps écoulé

Temps (a)	Valeur ($)
0	25 000
1	
2	
3	

b) Par quel facteur la valeur de la voiture est-elle multipliée chaque année ? Quel est le lien avec le taux de dépréciation ?

c) À l'aide d'une fonction exponentielle, estimez à la centaine de dollars près la valeur de la voiture dans dix ans.

CORRIGÉ PAGE 311

2.2 Un exemple de situation avec le taux d'intérêt composé

La prochaine question permet de comprendre la différence entre un taux d'intérêt nominal et un taux d'intérêt composé.

7 On reprend la situation de la question 5 qui précède. Le taux d'intérêt de 6 % dont il y est question est un taux d'intérêt nominal ; c'est le taux annuel qui permet de calculer l'intérêt. Dans cette situation, l'intérêt était versé à la fin de chaque année en calculant 6 % du solde. Pour la première année, cela correspondait à un montant de 600 $.

Supposez maintenant que l'intérêt soit versé chaque trimestre. Évidemment, il ne s'agit pas du montant total de l'intérêt annuel, mais de seulement $\frac{1}{4}$ de ce montant. Ainsi, après trois mois, ou $\frac{1}{4}$ de l'année, l'intérêt versé dans le compte sera de 150 $. Le solde du compte, après trois mois, sera de 10 150 $.

Solde du compte d'épargne à terme en fonction du temps écoulé

Temps (a)	Solde du compte ($)
0	10 000
$\frac{1}{4}$	10 150
$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{4}$	
1	

a) De quel pourcentage le solde a-t-il augmenté après le premier trimestre ?

b) Dans l'entente que vous avez conclue avec la banque, vous avez le choix de retirer le montant d'intérêt reçu ou de le laisser dans le compte pour le faire fructifier. On supposera que vous choisissiez la deuxième option. Quel sera alors le nouveau solde à la fin du trimestre suivant ?

ATTENTION !

Le nouveau solde ne sera pas 10 300 $. Il sera supérieur à ce montant. Comprenez-vous pourquoi ?

c) Complétez la table de valeurs en procédant de la même manière pour chaque nouveau trimestre (arrondissez au centième près, s'il y a lieu).

d) Exprimez le solde du compte en fonction du nombre d'années écoulées.

e) À la dizaine de dollars près, estimez le solde du compte d'épargne dans dix ans.

LE SAVIEZ-VOUS ?

L'expression « taux d'intérêt composé » représente l'augmentation réelle en pourcentage du solde du compte après un an. Dans la situation ci-dessus, ce taux est d'environ 6,14 %. Cet intérêt est appelé « composé », car ce n'est pas seulement de l'intérêt sur le dépôt, mais c'est aussi de l'intérêt sur l'intérêt qui a été versé précédemment.

CORRIGÉ PAGE 311

À RETENIR

Le taux d'augmentation ou de réduction

Lorsque la **variation** de la variable dépendante d'une fonction exponentielle est décrite à l'aide d'un taux d'augmentation ou de réduction en pourcentage, la démarche pour obtenir la règle de la fonction consiste à transformer d'abord ce taux en notation décimale. Si r est le nombre décimal qui en résulte, alors la base de la fonction sera :

$1 + r$	s'il s'agit d'une augmentation ;
$1 - r$	s'il s'agit d'une réduction.

Exemple :

En 2015, il y a eu 361 décès causés par des accidents sur les routes du Québec. On se demande ce que pourrait être le nombre de décès dix ans plus tard, s'il diminue de 5 % par année.

Le taux de réduction en pourcentage étant supposé constant, on peut exprimer le nombre de décès comme une fonction exponentielle du temps écoulé.

La base de la fonction est $1 - 0{,}05 = 0{,}95$ (car il s'agit d'une réduction et $5\,\% = 0{,}05$).

La règle de la fonction est $f(x) = 361(0{,}95)^x$.

Estimation du nombre de décès dans dix ans : $f(10) = 361(0{,}95)^{10} \approx 216$.

Une diminution de 5 % par année pourrait réduire le nombre de décès à 216 en 2025.

EXERCEZ-VOUS

8 On prévoit que la population d'une ville minière, qui est, de 32 000 habitants, diminuera de 25 % par année durant la prochaine décennie, après l'épuisement des ressources de la mine.

a) Exprimez la population de la ville en fonction du nombre d'années écoulées.

b) Quelle devrait être la population de la ville dans dix ans ? Arrondissez à la centaine près.

9 Reprenez la situation du dépôt initial de 10 000 $, cette fois dans un compte d'épargne normal qui offre un taux d'intérêt nominal de 3 %. Pour ce type de compte, l'intérêt est versé chaque mois, soit à chaque $\frac{1}{12}$ d'année. Quel sera le solde du compte dans un an ? dans dix ans ?

CORRIGÉ PAGE 311

3. Le nombre e

On sait que la règle d'une fonction exponentielle peut s'écrire en utilisant différentes bases, ce qui soulève la question suivante : quelle base est préférable ? Il n'y a pas de réponse absolue à cette question. Cela dépend, entre autres, du contexte. Il existe cependant une base particulière qui est très souvent utilisée en sciences. Il s'agit du nombre e. La rubrique suivante vous explique pourquoi.

Les questions suivantes permettent de découvrir et de comprendre la définition du nombre e.

LE SAVIEZ-VOUS ?

La façon dont varie une fonction est elle-même une fonction qu'on appelle la dérivée. Cela fait l'objet d'un cours de niveau collégial, appelé *Calcul différentiel*. Cette notion est très importante en sciences. Par exemple, la dérivée de la fonction $d(t) = 5t^2$ qui représente la distance parcourue par un objet en chute libre est $v(t) = 10t$, qui est sa vitesse. Il existe une seule fonction qui a la particularité d'être égale à sa propre dérivée. Il s'agit de la fonction exponentielle de base e, soit $f(x) = e^x$. Cela facilite beaucoup les calculs en sciences, lorsqu'on utilise cette base pour définir une fonction exponentielle.

10 Imaginez un immense ensemble contenant des millions de jetons, qui pourraient représenter, par exemple, des bactéries. On supposera donc que les jetons, comme les bactéries, puissent se dédoubler spontanément. Différentes situations peuvent se présenter selon le mode de dédoublement.

Situation 1 : Tous les jetons se dédoublent en une heure.

La situation est simple. Après une heure, il y aura deux fois plus de jetons.

Situation 2 : Chaque demi-heure, la moitié des jetons que contient l'ensemble se dédouble.

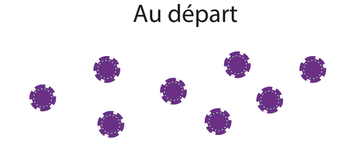
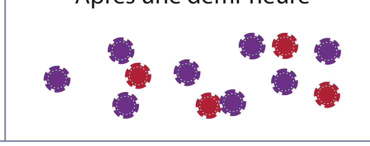
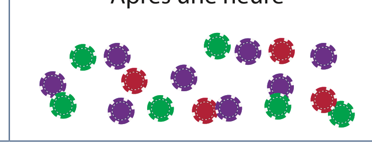
a) 1) Par quel facteur le nombre de jetons est-il multiplié chaque demi-heure ? __________

2) Par quel facteur sera-t-il multiplié après une heure ?

____

ASTUCE

Voici une illustration de ce qui se passe si on commence avec 8 jetons.

Au départ	Après une demi-heure	Après une heure
		

Les jetons ajoutés à la première demi-heure sont en rouge. Les jetons ajoutés à la deuxième demi-heure sont en vert. On est passé de 8 jetons au départ à 18 jetons à la fin.

Situation 3 : Chaque quart d'heure (quatre fois par heure), $\frac{1}{4}$ des jetons que contient l'ensemble se dédouble.

b) 1) Par quel facteur le nombre de jetons est-il multiplié chaque quart d'heure ? __________

2) Par quel facteur sera-t-il multiplié après une heure ? __________

CORRIGÉ PAGE 312

Situation 4 : Chaque minute (60 fois par heure), $\frac{1}{60}$ des jetons que contient l'ensemble se dédouble.

c) 1) Par quel facteur le nombre de jetons est-il multiplié chaque minute ? ______

2) Par quel facteur sera-t-il multiplié après une heure ? ______

d) À partir de vos réponses aux questions précédentes, complétez le tableau suivant. S'il y a lieu, arrondissez au centième près.

	Situation 1	Situation 2	Situation 3	Situation 4
Mode de dédoublement	1 fois par heure, les jetons se dédoublent.	2 fois pas heure, la moitié des jetons se dédouble.	4 fois par heure, le quart des jetons se dédouble.	60 fois par heure, $\frac{1}{60}$ des jetons se dédouble.
Facteur de multiplication après une heure	2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 =$ ______	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx$ ______	$\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60} \approx$ ______

e) On peut établir la règle suivante :

Si n fois par heure, $\frac{1}{n}$ des jetons se dédouble, alors le facteur de multiplication après une heure sera $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

À quatre décimales près, déterminez par quel facteur le nombre de jetons sera multiplié après une heure, si :

1) $n = 1000$; ______ 2) $n = 10\,000$; ______ 3) $n = 100\,000$. ______

4) Que constatez-vous ? ______

À RETENIR

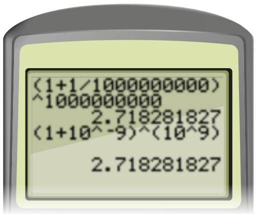
Le nombre e

Le nombre e est défini formellement comme la constante vers laquelle s'approche l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini. Il s'agit d'un nombre irrationnel, approximativement égal à 2,71828, qui est souvent utilisé comme base des fonctions exponentielles en sciences.

Exemple :

Sur une calculatrice, on a estimé la valeur de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n égal à 1 milliard.

Le même calcul a été refait en utilisant la notation exponentielle, soit 10^9.



CORRIGÉ PAGE 312

EXERCEZ-VOUS

11 On dépose 1 million de dollars dans un compte d'épargne imaginaire dont le taux d'intérêt nominal annuel est de 100 %.

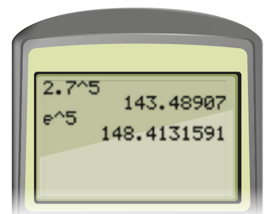
Quel sera le solde du compte au dollar près après un an, si l'intérêt est versé dans le compte :

a) chaque mois ? b) chaque jour ? c) chaque heure ?

12 Voici différentes approximations du nombre e, de la moins précise à la plus précise.

2,7 2,72 2,718 2,7183 2,71828

Comme le montre la calculatrice ci-contre, l'approximation 2,7 n'est pas suffisamment précise pour donner une réponse juste à l'unité près de e^5.



En effet $2{,}7^5 \approx 143$, alors que $e^5 \approx 148$.

a) Laquelle ou lesquelles des approximations ci-dessus donnent une réponse juste à l'unité près si on s'en sert pour calculer e^5 ?

b) Qu'en serait-il si on voulait calculer e^{10} ?

ASTUCE

Comme c'est le cas pour tout nombre irrationnel, le développement décimal de e est infini et non périodique. Il est alors préférable, pour davantage de précision, d'utiliser ce symbole sur la calculatrice pour l'utiliser dans vos divers calculs.

CORRIGÉ PAGE 312

CONSOLIDATION

1 Évaluez les expressions numériques suivantes sans l'aide d'une calculatrice.

a) $4^{0,5}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $16^{0,25}$ d) $32^{-\frac{1}{5}}$

2 Tout nombre irrationnel peut être approché d'aussi près que l'on veut par des nombres rationnels, soit par défaut, soit par excès. Par exemple, sachant que les premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 1,41421…, les prochaines questions permettent d'affirmer que $\sqrt{2}$ se situe avec certitude entre 1,4 et 1,5.

a) En écrivant d'abord l'exposant sous la forme d'une fraction, exprimez la valeur des expressions suivantes à l'aide d'un radical.

1) $2^{1,4} =$ ______________ 2) $2^{1,5} =$ ______________

b) Validez les expressions déterminées en a) à l'aide d'une calculatrice. Évaluez-les au dix-millième près.

1) $2^{1,4} =$ ______________ $\approx$ ______________

2) $2^{1,5} =$ ______________ $\approx$ ______________

c) Cette fois-ci, sans l'aide d'une calculatrice, estimez une valeur pour $2^{\sqrt{2}}$ en vous servant de vos réponses à la question b).

Justifiez votre réponse.

____

____

____

d) Observez l'affichage de la calculatrice ci-contre. Que pouvez-vous dire avec certitude concernant l'expression en décimales de $2^{\sqrt{2}}$?

____

____

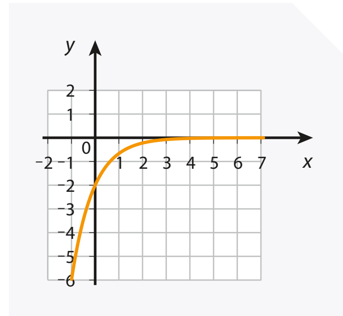
CORRIGÉ PAGE 313

3 Les fonctions *f* et *g* sont des fonctions exponentielles. Déterminez leurs règles respectives à partir des informations données ci-dessous.

a) Fonction *f*

x	y
1	6
3	54

b) Fonction *g*



4 Lorsqu'un ovule est fécondé, l'embryon se développe par un processus de division cellulaire qui suit un modèle exponentiel. La table de valeurs suivante illustre ce développement pour les souris.

Développement d'un embryon selon le temps écoulé

Temps (h)	Nombre de cellules
0	1
15	2
30	4
45	8
60	16

Chez les souris, la période de gestation est d'environ 19 jours.

a) Combien de cellules y a-t-il après une semaine ?

b) Combien de cellules y aura-t-il à la fin de la période de gestation ?

CORRIGÉ PAGE 313

5 Dans chaque cas, représentez les deux fonctions données dans le même plan cartésien. Décrivez les différences entre les deux courbes et expliquez comment on aurait pu prévoir ces différences en comparant les règles des deux fonctions.

a) $f(x) = 2^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $h(x) = 3^x$ et $i(x) = {}^-2(3)^x$

CORRIGÉ PAGE 313

6 Sur les réseaux sociaux, un message (ou une vidéo) peut rapidement devenir viral lorsqu'il est partagé. On a analysé la progression du nombre de partages d'une vidéo pendant une durée de dix heures. Le nombre de partages a suivi la règle $f(x) = 4^x$, où x représente le temps écoulé en heures depuis le lancement de la vidéo, et $f(x)$ le nombre de fois que la vidéo a été partagée à ce moment-là.

a) Selon le contexte, que représentent la valeur initiale et la base de la fonction ?

b) Quel est le domaine de cette fonction dans le contexte ?

c) Quelle est l'image de cette fonction dans le contexte ?

d) Combien de fois la vidéo a-t-elle été partagée après cinq heures ?

7 Marie-Josée rencontre un conseiller en placement à son institution financière. Elle veut faire un placement pour une durée de cinq ans. Elle désire évaluer laquelle des options suivantes est la plus intéressante.

Option 1 : Placer 4 000 $ à un taux annuel de 1,56 %.

Option 2 : Placer 4 000 $ à un taux trimestriel (tous les trois mois) de 0,39 %.

Est-ce que l'une des deux options est plus intéressante pour Marie-Josée ? Si oui, laquelle ? Expliquez pourquoi.

CORRIGÉ PAGE 314

8 Jérôme a emprunté une somme de 2000 $ à un bon ami. Il s'est entendu avec lui pour lui rembourser 15 % du solde de son emprunt chaque mois. Jérôme est certain qu'il va pouvoir rembourser son emprunt en une année. A-t-il raison ? S'il n'a pas raison, quel sera le solde après une année ?

9 Ariane veut acheter un ordinateur qui vaut actuellement 890 $ (taxes incluses). N'ayant pas la possibilité d'emprunter, elle décide de mettre de côté 100 $ par mois pendant les neuf prochains mois.

En supposant qu'un taux d'inflation annuel de 3 % s'applique au prix de cet ordinateur, Ariane aura-t-elle mis assez d'argent de côté dans neuf mois pour payer son achat ? Sinon, combien lui manquera-t-il ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

L'inflation est un phénomène économique qui se manifeste par une augmentation continue des prix des biens de consommation. Un taux d'inflation de 3 % signifie que les prix augmentent en moyenne de 3 % par année.

CORRIGÉ PAGE 314

10 Les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans des circuits et qui emmagasinent des charges électriques. Lorsqu'ils se déchargent, la tension en volts (V) suit une fonction exponentielle ayant comme base « e » et qui est :

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

où,

$V(t)$: différence de potentiel selon le temps (V)

V_0 : différence de potentiel au temps $t = 0$ (V)

t : temps écoulé depuis le début du déchargement (s)

R : résistance du circuit (en ohms (Ω))

C : capacité du condensateur (Farad (F))

Si on a les valeurs suivantes dans un circuit :

$V_0 = 2$ V $\qquad R = 10\,000\ \Omega$

$C = 1\,000\ \mu$F

a) Quelle est la différence de potentiel après cinq secondes ?

b) Après environ combien de secondes la différence de potentiel passe-t-elle à moins de 0,5 V ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

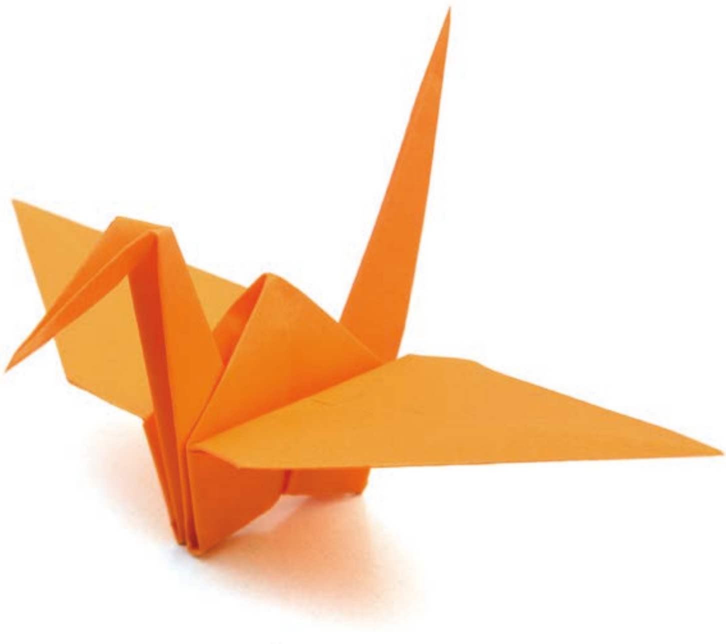
Le symbole « μF » veut dire « micro Farad », et 1μF = 1 × 10^{-6} Farad.

CORRIGÉ PAGE 314

11 On dit qu'il est impossible de plier une feuille de papier plus de sept fois. Dans une émission de télévision de vulgarisation scientifique, les animateurs ont voulu prouver le contraire. À cette fin, ils ont pris une très longue bande de papier de 1 m de largeur, de 80 m de longueur et de 20 µm d'épaisseur. En pliant une première fois cette bande de papier dans le sens de la largeur, ils ont obtenu une bande de même largeur, mais deux fois moins longue et deux fois plus épaisse.

Ils ont ensuite répété le processus autant de fois qu'ils le pouvaient en pliant toujours dans le sens de la largeur. Ils ont arrêté de plier lorsque la bande est devenue plus épaisse que longue.

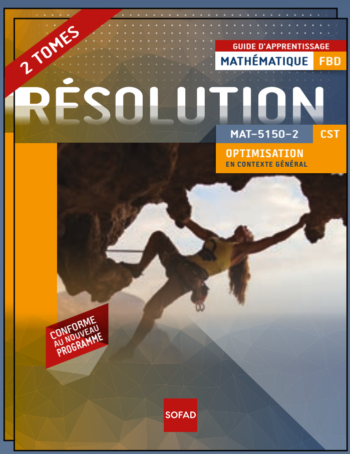
Combien de plis ont-ils réussi à faire ?

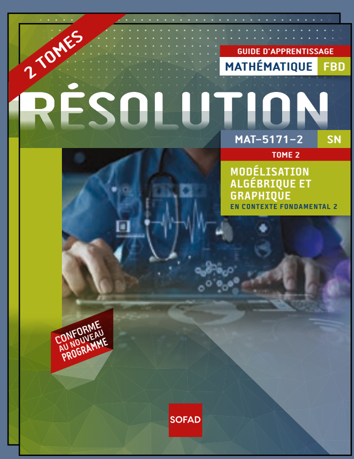


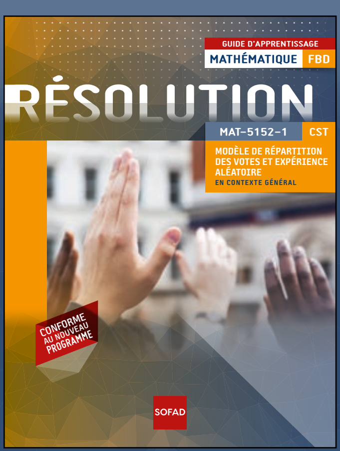
CORRIGÉ PAGE 314

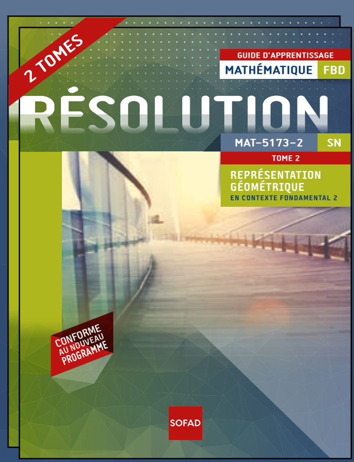
RÉSOLUTION

La collection **RÉSOLUTION** couvre l'ensemble des cours du programme de formation de base commune et diversifiée, dont les séquences *Culture, société et technique* (CST) et *Sciences naturelles* (SN) de 5^{e} secondaire.









SOFAD

RÉSOLUTION propose une démarche d'apprentissage basée sur l'acquisition de tous les savoirs mathématiques prescrits en contexte de résolution de problèmes. La séquence d'apprentissages qui soutient cette approche est la suivante :

PRÉSENTATION D'UNE SITUATION-PROBLÈME
→ EXPLORATION DU PROBLÈME
→ APPROPRIATION DES SAVOIRS
→ RÉSOLUTION DU PROBLÈME
→ CONSOLIDATION DES APPRENTISSAGES

Le questionnement, à la fois inductif et déductif, donne un sens aux savoirs et aux stratégies à acquérir. Les guides d'apprentissage offrent une multitude d'exercices simples et de tâches plus complexes en réponse aux besoins exprimés par les apprenants et les enseignants. Des ressources supplémentaires sont aussi offertes sur portailsofad.com.

Composantes de la collection RÉSOLUTION :

- Guide d'apprentissage : version imprimée et PDF ;
- Guide synthèse d'enseignement (PDF) ;
- Capsules vidéo des situations-problèmes ;
- Activités TIC : GeoGebra, calculatrice à affichage graphique ;
- Activités notées ;
- Corrigés.

ISBN 978-2-89493-933-8

9 782894 939338

Imprimé au Québec 8529-02