GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-5170-2 SN

OPTIMISATION

EN CONTEXTE FONDAMENTAL

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

SOFAD

GUIDE D'APPRENTISSAGE

MATHÉMATIQUE FBD

RÉSOLUTION

MAT-5170-2 SN

OPTIMISATION

EN CONTEXTE FONDAMENTAL

SOFAD

Gestion de projets
Nancy Mayrand
Isabelle Tanguay

Conception pédagogique
Sylvio Guay
(Enseignant, Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie)

Rédaction de contenus
Sylvio Guay
Éric Rouillard
(Enseignant, CSHC)

Révision pédagogique
Karl-Philippe Tremblay
(Chargé de cours en didactique, UQAM et UQAT)

Révision docimologique
Steeve Pinsonneault
(Enseignant, CS Marguerite-Bourgeois)

Révision scientifique
Mathieu Thibault
(Doctorant en éducation, UQAM et vice-président du GRMS)

Révision linguistique
Nadia Leroux

Conception graphique et couverture
Mylène Choquette

Commandes graphiques
Hélène Décoste

Production et illustrations
Alphatek

Lecture d'épreuves
Hélène Décoste
Nathalie Bernard
(Enseignante, CSHC)
Marie-Ève Côté
(Enseignante, CS des Rives-du-Saguenay)

Correction d'épreuves
Ginette Choinière

Crédits photos

Shutterstock :
C1 © Carlos Amarillo • p. 2 © Pack-Shot • p. 3h © Alison Hancock • p. 3b © Alison Hancock • p. 4 © RossHelen • p. 5 © Kartinkin77 • p. 8 © Odua Images • p. 11 © Kittisak Jirasittichai • p. 13 © wavebreakmedia • p. 19 © Elena Elisseeva • p. 21 © Alexey Stiop • p. 22 © Duncan Andison • p. 26 © Photographerrr • p. 32 © Kristi Blokhi • p. 34 © cherezoff • p. 38 © foxie • p. 43 © Nestor Rizhniak • p. 49 © antishock • p. 50 © monticello • p. 53 © Dobermaraner • p. 54 © cluckva • p. 57 © sumkinn • p. 58 © New Line • p. 62h © AYA images • p. 64 © Andrey_Popov • p. 65h © Rawpixel.com • p. 65b © mavo • p. 66h © smallblackcat • p. 66c © Monkey Business Images • p. 67 © LStockStudio • p. 68 © nikkytok • p. 69 © Sladic • p. 70 © TB studio • p. 73 © guruXOX • p. 75 © Yurii Andreichyn • p. 77 © karanik yimpat • p. 80h © nadianb • p. 86h © Wade Vaillancourt • p. 86b © Sylvie Bouchard • p. 87 © Ann Moore • p. 88 © Benoit Daoust • p. 97 © Ankor Light • p. 101 © Far700 • p. 106 © BAIVECTOR • p. 111 © LVM • p. 114 © Dzhafarov Eduard • p. 115 © Alfa Photostudio • p. 16 © ESB Professional • p. 117 © AlenaPo • p. 124 © migrean • p. 128 © Andrey_Popov • p. 133 © Monkey Business Images • p. 134 © BrAt82 • p. 136 © Alf Ribeiro • p. 138 © Kaspars Grinvalds • p. 140 © tynyuk • p. 152 © SharonPhoto • p. 153 © Djem

Légende : d = droite c = centre g = gauche
h = haut b = bas

Cet ouvrage est en partie financé par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur du Québec.

Dépôt légal – 2018
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN : 978-2-89493-931-4 (imprimé)
ISBN : 978-2-89493-935-2 (PDF)

Mai 2018

Table des matières

Présentation du guide d'apprentissage V

CHAPITRE 1

Les contraintes et les systèmes d'inéquations 2
La campagne en ville

SITUATION 1.1

LES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES
LE POLYGONE DE CONTRAINTES

SP 1.1 – La fermette urbaine 4
Exploration 5
Appropriation A 7
- Traduire des contraintes par un système d'inéquations du premier degré à deux variables
- Représenter graphiquement un système d'inéquations par un polygone de contraintes

Résolution 16
Appropriation B 18
- Explorer les systèmes d'inéquations du premier degré à deux variables discrètes
- Interpréter les polygones de contraintes ouverts et fermés
- Rechercher des inéquations équivalentes

Consolidation 26

SITUATION 1.2

LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES

SP 1.2 – Embellir son quartier 32
Exploration 33
Appropriation A 35
- Déterminer les coordonnées des sommets du polygone de contraintes
- Interpréter, en contexte, les coordonnées des sommets du polygone de contraintes

Résolution 44
Consolidation 46

SAVOIRS EN RÉSUMÉ 53
INTÉGRATION 56
SAÉ 62

CHAPITRE 2

La programmation linéaire 64
Être son propre patron

SITUATION 2.1

LA FONCTION À OPTIMISER

SP 2.1 – L'impression 3D 66
Exploration 67
Appropriation A 69
- Définir et interpréter la fonction à optimiser
- Représenter graphiquement la fonction à optimiser

Résolution 78
Consolidation 80

SITUATION 2.2

LA DROITE BALADEUSE
L'OPTIMISATION À L'AIDE DE LA RÉGION SOLUTION ET DES SOMMETS
LA MODIFICATION DE CONDITIONS

SP 2.2 – La cabane de Louis 86
Exploration 87
Appropriation A 89
- Optimiser une situation à l'aide de la droite baladeuse

Résolution 98
Appropriation B 100
- Optimiser à l'aide des sommets du polygone de contraintes
- Modifier des conditions de la situation

Consolidation 110

SAVOIRS EN RÉSUMÉ 119
INTÉGRATION 123
SAÉ 128

Cet aperçu contient :
- la table des matières;
- l'introduction;
- la première situation d'apprentissage.

COMPLÉMENTS

AUTOÉVALUATION 131

RÉACTIVATION 146

RÉSUMÉ DES SAVOIRS 150

REPÈRES MATHÉMATIQUES 157

GLOSSAIRE 158

CORRIGÉ 162

GRILLE D'ÉVALUATION 243

AIDE-MÉMOIRE 245

PRÉSENTATION DU GUIDE D'APPRENTISSAGE

Bienvenue dans le guide d'apprentissage du cours ***Optimisation en contexte fondamental.*** Ce cours, le premier de la séquence **Sciences naturelles** en **5e secondaire**, a pour but de développer votre habileté à traiter des situations qui recherchent des solutions optimales. À cette fin, vous serez amené à étudier la programmation linéaire, soit :

- les systèmes d'inéquations du premier degré à deux variables ;
- la représentation de contraintes ;
- la région solution ;
- la fonction objective ou économique.

Vous compléterez votre formation en formulant des modifications possibles à émettre sur les conditions d'une situation de façon à la rendre plus efficiente.

Vous serez amené à utiliser diverses stratégies de résolution afin de comprendre et de modéliser des situations-problèmes. Votre aptitude à déployer un raisonnement mathématique sera sollicitée. Puis, vous aurez à décrire vos démarches de résolution avec clarté et rigueur à l'aide du langage mathématique.

Vous êtes maintenant convié à réaliser les activités d'apprentissage qui vous sont proposées dans les deux chapitres de ce guide et à enrichir vos connaissances en optimisation.

Portailsofad.com

Sur portailsofad.com, des capsules vidéo, des activités TIC et des versions imprimables des ressources complémentaires au guide de la collection RÉSOLUTION vous accompagneront tout au long de vos apprentissages.

COMPOSANTES D'UN CHAPITRE

La démarche d'apprentissage proposée dans un chapitre permet de progresser en réinvestissant les apprentissages réalisés d'une section à l'autre. Le schéma qui suit illustre cette démarche et précise l'intention pédagogique de chacune des sections.

OUVERTURE DU CHAPITRE

La première page décrit le contexte et la thématique qui serviront de trame de fond à l'acquisition des nouveaux savoirs abordés dans le chapitre.


CHAPITRE 1

Les contraintes et les systèmes d'inéquations

La campagne en ville

Avec l'augmentation constante de la population mondiale, on sait que de plus en plus de gens vivront dans les métropoles au cours des années à venir. Ce phénomène influe sur la façon de les concevoir et modifie les plans d'urbanisation. De nos jours, la plupart des villes se transforment pour offrir davantage d'espaces verts. On peut penser aux jardins communautaires, à des fermettes urbaines ou encore aux toits aménagés en potagers. Les avantages sont nombreux : santé, bien-être, bienfaits sur l'environnement, etc. L'espace étant plus restreint en ville qu'à la campagne, des problèmes de gestion du territoire s'imposent et demandent une plus grande planification. Dans ce chapitre, vous verrez comment la représentation algébrique et la représentation graphique de différentes contraintes permettent d'obtenir une vue d'ensemble d'une situation et facilitent ainsi la prise de décisions lorsque les contraintes à considérer sont nombreuses.

SITUATION 1.1
LES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES
LE POLYGONE DE CONTRAINTES
SP 1.1 – La fermette urbaine p. 4

SITUATION 1.2
LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES
SP 1.2 – Embellir son quartier p. 32

SAVOIRS EN RÉSUMÉ p. 53
INTÉGRATION p. 56
SAÉ
Un potager sur le toit p. 62

CHAPITRE 1

© SOFAD – Reproduction interdite.

2 CHAPITRE 1 – Les contraintes et les systèmes d'inéquations

Une table des matières accompagne cette première page. Les savoirs à acquérir y sont présentés pour chacune des *Situations*, ainsi que le thème des situations-problèmes.

SITUATIONS

De manière générale, il y a deux *Situations* d'apprentissage par chapitre. La démarche proposée dans ces situations permet d'acquérir de nouveaux savoirs et de développer des compétences mathématiques dans des contextes réels, réalistes ou purement mathématiques.


SITUATION 1.1
LES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES
LE POLYGONE DE CONTRAINTES

SITUATION 1.2
LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES

Embellir son quartier

SP 1.2

Certaines municipalités ont des programmes ayant pour but d'encourager les citoyens à participer à l'embellissement de leur environnement. Par exemple, des citoyens vivant à proximité de ruelles mal entretenues ont créé un environnement sain et vert. Le rôle des municipalités est, entre autres, de fournir le matériel nécessaire pour atteindre cet objectif.

Victor est à la tête d'un regroupement de parents qui ont pris l'initiative d'embellir la cour de l'école primaire de leurs enfants. Il a déniché un programme d'aide de la municipalité qui leur permet d'acheter des boîtes à fleurs à 22 $ chacune et des arbustes à 50 $ chacun. Pour participer à ce programme, ils doivent acheter, un minimum total de 25 arbustes et boîtes à fleurs, mais sans atteindre 60. De plus, la commande doit contenir au moins 5 boîtes à fleurs de plus que le nombre d'arbustes.

Dans son budget, le regroupement de parents prévoit un montant maximal de 1 500 $ pour l'achat des boîtes à fleurs et des arbustes. Victor demande à la personne responsable des achats dans le regroupement de trouver un nombre d'arbustes et de boîtes à fleurs qui permettrait d'utiliser tout le montant prévu au budget et dont la commande comporterait précisément 5 boîtes à fleurs de plus que le nombre d'arbustes.

TÂCHE

Déterminez si la demande de Victor est possible. Si oui, indiquez les nombres de boîtes à fleurs et d'arbustes qui respectent les conditions de Victor. Sinon, déterminez une solution par laquelle le nombre de boîtes à fleurs et d'arbustes permettrait d'utiliser tout le montant prévu en respectant toutes les contraintes du programme d'aide municipal. Justifiez votre réponse à l'aide d'une représentation appropriée.

© SOFAD – Reproduction interdite.

32 CHAPITRE 1 – Les contraintes et les systèmes d'inéquations

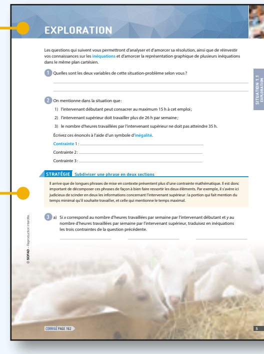
PHASES D'UNE SITUATION


SITUATION 1.1
La fermette urbaine

SITUATION–PROBLÈME

Liée au thème principal du chapitre, cette page décrit brièvement le contexte de la situation-problème, ainsi que les données nécessaires à sa résolution.

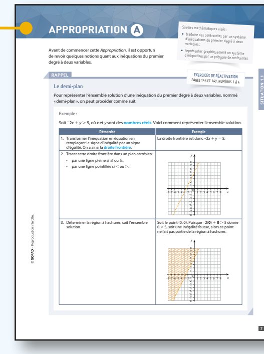
Un encadré décrit la tâche que vous aurez à réaliser plus loin dans la section *Résolution*. Cette tâche est le point de départ vous permettant d'acquérir de nouveaux savoirs en vue de résoudre la situation-problème.


EXPLORATION

EXPLORATION

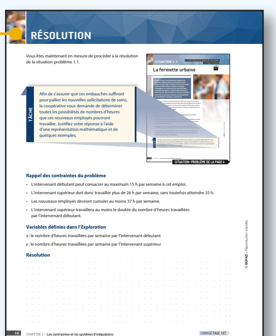
Cette section vous invite à analyser les données de la situation-problème, à déterminer les savoirs que vous possédez et ceux que vous devez acquérir pour réaliser la tâche.

Son questionnement vous guidera vers une stratégie de résolution de problème.


APPROPRIATION A

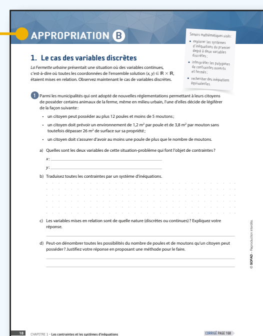
APPROPRIATION A

C'est ici que sont assimilés les savoirs nécessaires pour résoudre la situation-problème. Chaque *Appropriation* stimule la réflexion avant la présentation de nouveaux savoirs mathématiques.


RÉSOLUTION

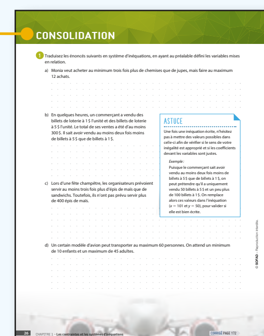
RÉSOLUTION

Arrivé à cette section, vous devriez avoir acquis toutes les connaissances et les stratégies essentielles à la résolution de la situation-problème énoncée au début de la situation.


APPROPRIATION B

APPROPRIATION B

Dans cette deuxième appropriation, vous acquerrez de nouveaux savoirs prescrits au programme en lien avec ceux vus dans l'*Appropriation A*.


CONSOLIDATION

CONSOLIDATION

Cette section vous permettra de consolider les savoirs mathématiques acquis dans les *Appropriations A* et *B*. Tout comme la section *Intégration*, cette *Consolidation* permet aussi de développer les compétences mathématiques.

EN FIN DE CHAPITRE...

SAVOIRS EN RÉSUMÉ

Cette section résume tous les savoirs *À retenir* sous forme de phrases trouées. On vous invite à ajouter les informations manquantes.

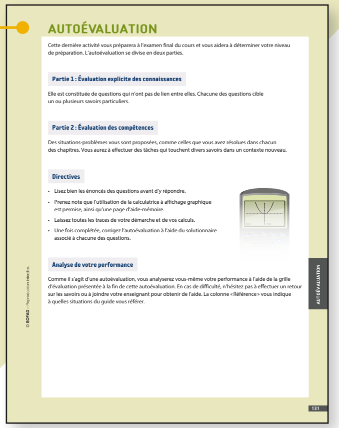
INTÉGRATION

Dans cette section comprenant des exercices et des situations complexes, vous devrez appliquer les savoirs vus dans ce chapitre.

SAÉ

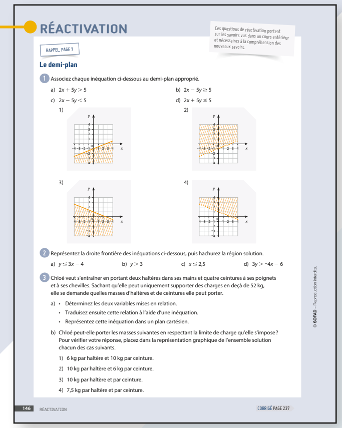
La *SAÉ* est une tâche complexe élaborée selon le modèle des évaluations de sanction. Elle est accompagnée d'une grille d'évaluation des compétences.

COMPLÉMENTS



AUTOÉVALUATION

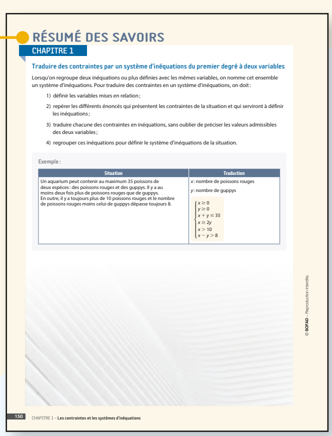
Une *Autoévaluation* est présentée en première partie de ces *Compléments*. Elle permet d'évaluer vos connaissances acquises et les compétences mathématiques développées tout au long du cours. Vous pourrez ainsi déterminer les savoirs que vous maîtrisez et ceux pour lesquels une révision s'impose avant de passer à l'*Activité notée synthèse*.



RÉACTIVATION

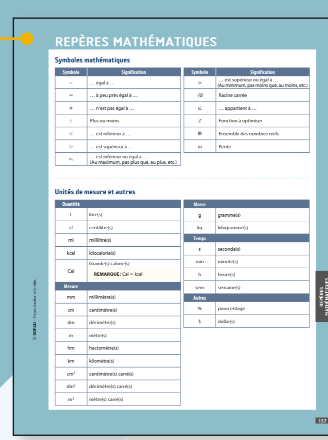
Au cours des *Situations*, vous croiserez des rubriques *Rappel* présentant des savoirs vus dans un cours antérieur et nécessaires à la compréhension du nouveau savoir ou à la résolution de la situation en cours.

Cette *Réactivation* permettra de réviser, à l'aide d'exercices, les règles et les concepts mathématiques qui font l'objet d'un *Rappel*.



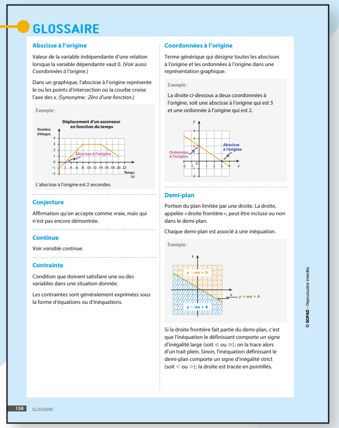
RÉSUMÉ DES SAVOIRS

C'est dans cette section que la version complète des *Savoirs en résumé* se situe. Une version imprimable est aussi disponible en ligne.



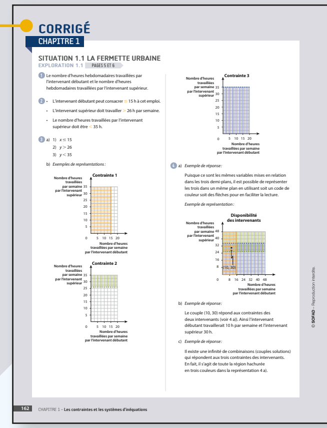
REPÈRES MATHÉMATIQUES

Dans cette section, on présente des symboles mathématiques utilisés dans le guide et certaines abréviations d'unités de mesure. Des formules mathématiques en rappel y sont aussi offertes.



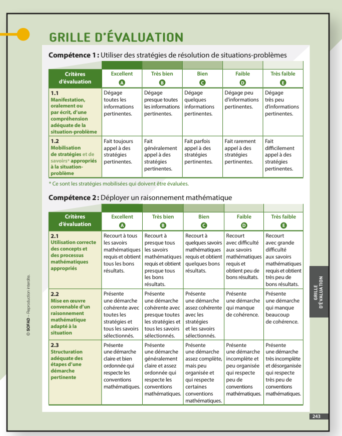
GLOSSAIRE

Les mots et expressions **écrits en bleu** dans le texte courant sont définis dans le *Glossaire*.



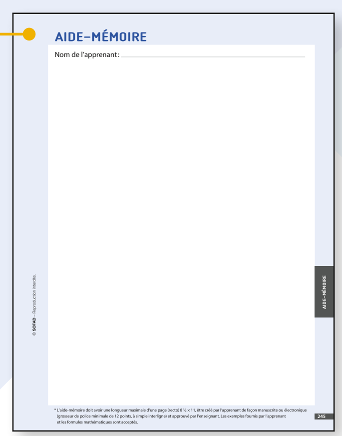
CORRIGÉ

Vers la fin du guide, vous repérerez le *Corrigé*. Il a été conçu non seulement pour valider vos réponses, mais aussi pour vous accompagner dans vos apprentissages. Il contient les réponses aux questions, des explications détaillées sur la démarche ou le raisonnement à mettre en œuvre.



GRILLE D'ÉVALUATION

Une *Grille d'évaluation* des compétences vous est offerte à la fin du guide. À la suite de la résolution d'une *SAÉ*, vous êtes invité à vous évaluer à l'aide de cette grille. Vous pourrez alors compléter la version abrégée située dans le bas de chaque *SAÉ*.



AIDE-MÉMOIRE

Vous pouvez vous constituer un aide-mémoire. Une feuille détachable est prévue à cet effet à la fin du guide. Il vous est permis d'utiliser cet aide-mémoire lors de l'épreuve finale.

RUBRIQUES ET PICTOGRAMMES

▶ SP 1.1

Invite à visionner une capsule vidéo portant sur la situation-problème.

TÂCHE

Afin de s'assurer que ces embauches suffiront pour…

Présente la tâche à exécuter dans le cadre de votre situation-problème.

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGES 146 ET 147, NUMÉROS 1 À 4

Le demi-plan

Pour représenter l'ensemble solution d'une inéquation du premier degré à deux variables, nommé « demi-plan », on peut procéder comme suit.

Réfère à des connaissances que vous avez acquises dans des cours antérieurs et à des exercices de réactivation en lien avec ce *Rappel*.

À RETENIR

Traduire des contraintes…

Lorsqu'on regroupe deux inéquations ou plus définies avec les mêmes variables, on nomme cet ensemble un système d'inéquations.

Présente les savoirs mathématiques que vous devez maîtriser. Ce sont les savoirs prescrits par le programme d'étude.

STRATÉGIE **Subdiviser une phrase…**

Il arrive que de longues phrases de mise en contexte présentent plus d'une…

Présente des stratégies de résolution de problème qui peuvent s'appliquer dans diverses situations.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Au Québec, on utilise les **centiles** pour comparer la croissance (la masse, la taille…

Permet de découvrir des notes historiques et culturelles liées aux concepts mathématiques à l'étude.

ASTUCE

Si une variable de la situation n'admet que des valeurs positives, on doit en tenir compte dans le système d'inéquations.

Propose une astuce qui simplifie le travail ou offre une façon différente de traiter le problème ou d'appliquer le concept à l'étude.

ATTENTION !

Il est toujours important de préciser les unités de mesure lorsqu'on définit les variables d'une situation. Aussi, il faut préciser…

Met en garde sur des pièges à éviter ou des exceptions qui peuvent s'appliquer au concept à l'étude.

TIC

L'activité TIC 1.2.1 vous montre comment utiliser la touche zoom sur la calculatrice à affichage graphique afin de déterminer, au besoin, des points de remplacement…

Incite à effectuer une activité en ligne (GeoGebra ou calculatrice à affichage graphique) qui vous fera explorer la notion travaillée en utilisant des outils technologiques.

ACTIVITÉ NOTÉE

Vous devez maintenant effectuer l'activité notée 1 portant sur le chapitre 1. Elle est accessible sur le site…

Indique que vous êtes prêt à effectuer l'*Activité notée* prévue pour valider votre compréhension en cours d'apprentissage. L'*Activité notée synthèse* se fait, quant à elle, à la toute fin du cours. Ces activités sont présentées dans des fascicules séparés du guide. Vous devrez remettre chaque activité complétée à votre enseignant ou à votre tuteur qui vous fournira une rétroaction à la suite de sa correction.

CHAPITRE 1

Les contraintes et les systèmes d'inéquations

La campagne en ville

Avec l'augmentation constante de la population mondiale, on sait que de plus en plus de gens vivront dans les métropoles au cours des années à venir. Ce phénomène influe sur la façon de les concevoir et modifie les plans d'urbanisation. De nos jours, la plupart des villes se transforment pour offrir davantage d'espaces verts. On peut penser aux jardins communautaires, à des fermettes urbaines ou encore aux toits aménagés en potagers. Les avantages sont nombreux : santé, bien-être, bienfaits sur l'environnement, etc. L'espace étant plus restreint en ville qu'à la campagne, des problèmes de gestion du territoire s'imposent et demandent une plus grande planification. Dans ce chapitre, vous verrez comment la représentation algébrique et la représentation graphique de différentes contraintes permettent d'obtenir une vue d'ensemble d'une situation et facilitent ainsi la prise de décisions lorsque les contraintes à considérer sont nombreuses.

CHAPITRE 1

SITUATION 1.1

LES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES

LE POLYGONE DE CONTRAINTES

SP 1.1 – La fermette urbaine p. 4

SITUATION 1.2

LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES

SP 1.2 – Embellir son quartier p. 32

SAVOIRS EN RÉSUMÉ p. 53

INTÉGRATION p. 56

SAÉ

Un potager sur le toit p. 62

La fermette urbaine

SP 1.1

De plus en plus de municipalités adoptent de nouvelles réglementations permettant à leurs citoyens de posséder certains animaux de la ferme, même en milieu urbain. Parmi les avantages écologiques, il y a la gestion des restes de table, l'entretien des gazons, l'opportunité d'avoir des œufs frais, etc. Afin d'aider leurs citoyens à prendre soin de leurs nouveaux animaux, les municipalités se sont affiliées à certaines coopératives.

Pour répondre à la hausse des demandes pour des soins d'animaux de ferme en milieu urbain, la coopérative *La ferme des petits soins* engage deux nouveaux étudiants en soins vétérinaires. L'un d'eux est en début de formation et reçoit le titre d'intervenant débutant, alors que l'autre est finissant du programme et il reçoit le titre d'intervenant supérieur.

De plus :

- pour ne pas nuire à ses études, l'intervenant débutant peut consacrer au maximum 15 h à cet emploi ;
- l'intervenant supérieur profite quant à lui de cette opportunité pour réaliser son stage de fin d'études ; il doit donc travailler plus de 26 h par semaine, sans toutefois atteindre 35 h ;
- la coopérative estime que pour répondre aux demandes croissantes, ces deux nouveaux employés devront cumuler au moins 37 h par semaine ;
- comme plus de la moitié des demandes de soins exigent un intervenant supérieur, ce dernier travaillera au moins le double du nombre d'heures travaillées par l'intervenant débutant.

TÂCHE

Afin de s'assurer que ces embauches suffiront pour pallier les nouvelles sollicitations de soins, la coopérative vous demande de déterminer toutes les possibilités de nombres d'heures que ces nouveaux employés pourront travailler. Justifiez votre réponse à l'aide d'une représentation mathématique et de quelques exemples.

EXPLORATION

Les questions qui suivent vous permettront d'analyser et d'amorcer sa résolution, ainsi que de réinvestir vos connaissances sur les **inéquations** et d'amorcer la représentation graphique de plusieurs inéquations dans le même plan cartésien.

1 Quelles sont les deux variables de cette situation-problème selon vous ?

____

____

2 On mentionne dans la situation que :

1) l'intervenant débutant peut consacrer au maximum 15 h à cet emploi ;
2) l'intervenant supérieur doit travailler plus de 26 h par semaine ;
3) le nombre d'heures travaillées par l'intervenant supérieur ne doit pas atteindre 35 h.

Écrivez ces énoncés à l'aide d'un symbole d'**inégalité**.

Contrainte 1 : ______________________________

Contrainte 2 : ______________________________

Contrainte 3 : ______________________________

STRATÉGIE Subdiviser une phrase en deux sections

Il arrive que de longues phrases de mise en contexte présentent plus d'une contrainte mathématique. Il est donc important de décomposer ces phrases de façon à bien faire ressortir les deux éléments. Par exemple, il s'avère ici judicieux de scinder en deux les informations concernant l'intervenant supérieur : la portion qui fait mention du temps minimal qu'il souhaite travailler, et celle qui mentionne le temps maximal.

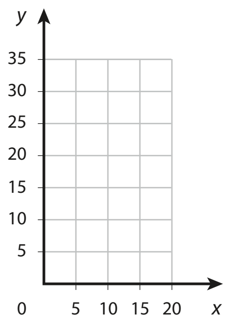
3 a) Si x correspond au nombre d'heures travaillées par semaine par l'intervenant débutant et y au nombre d'heures travaillées par semaine par l'intervenant supérieur, traduisez en inéquations les trois contraintes de la question précédente.

__________ __________ __________

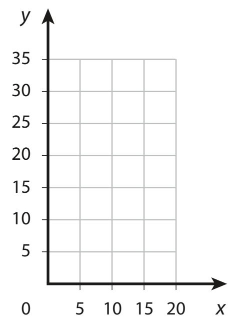
CORRIGÉ PAGE 162

b) Représentez graphiquement par un **demi-plan** ces trois contraintes.

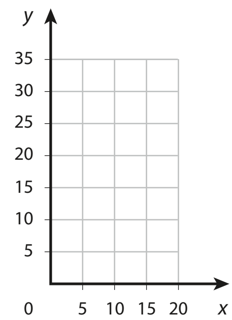
Contrainte 1 : ______________



Contrainte 2 : ______________

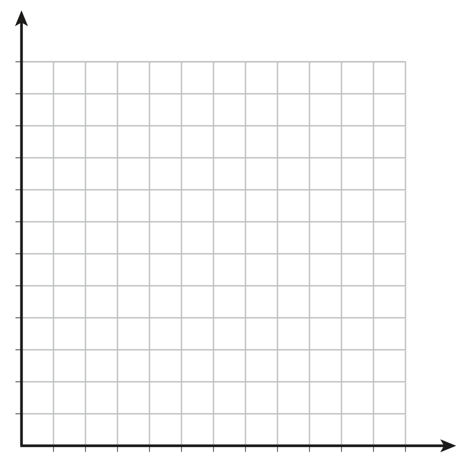


Contrainte 3 : ______________



4 À la question précédente, les inéquations sont représentées séparément sur trois demi-plans distincts.

a) Selon vous, peut-on les représenter dans un même plan cartésien ? Expliquez votre réponse, puis reproduisez votre démarche dans ce plan cartésien.



b) Si on ne considère que les contraintes demandées par les deux intervenants, quel exemple de couple de valeurs répondrait aux restrictions quant à leur disponibilité de temps travaillé (h) hebdomadairement ?

c) Selon vous, combien de couples de valeurs répondent à ces trois contraintes ?

5 D'autres contraintes sont mentionnées dans la situation-problème. Traduisez chacune d'elles par une inéquation.

Lorsqu'une situation comporte plusieurs contraintes, il peut s'avérer efficace de les représenter dans le même plan cartésien afin d'avoir une vue d'ensemble. Que les **variables** soient **continues** ou **discrètes**, le demi-plan demeure le moyen le plus efficace pour présenter l'ensemble solution d'une inéquation, surtout lorsque le nombre de couples solution est considérable. Reste maintenant à voir comment nommer cette représentation lorsqu'on combine plusieurs demi-plans dans une même représentation graphique. C'est ce qui sera exploré dans l'*Appropriation A* qui suit.

CORRIGÉ PAGE 162

APPROPRIATION A

Savoirs mathématiques visés :

- traduire des contraintes par un système d'inéquations du premier degré à deux variables ;
- représenter graphiquement un système d'inéquations par un polygone de contraintes.

Avant de commencer cette *Appropriation*, il est opportun de revoir quelques notions quant aux inéquations du premier degré à deux variables.

RAPPEL

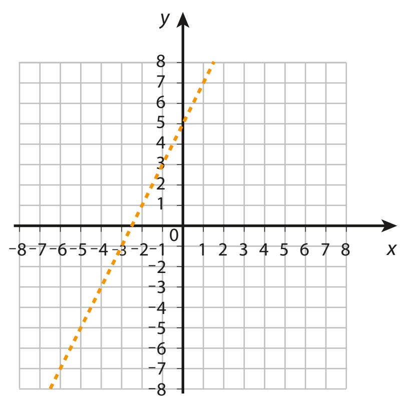
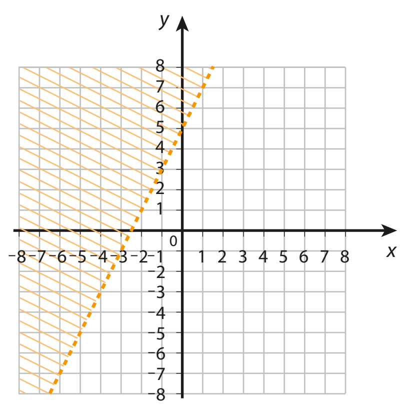
EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGES 146 ET 147, NUMÉROS 1 À 4

Le demi-plan

Pour représenter l'ensemble solution d'une inéquation du premier degré à deux variables, nommé « demi-plan », on peut procéder comme suit.

Exemple :

Soit $^-2x + y > 5$, où x et y sont des **nombres réels**. Voici comment représenter l'ensemble solution.

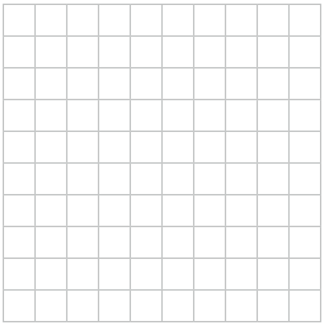
Démarche	Exemple
1. Transformer l'inéquation en équation en remplaçant le signe d'inégalité par un signe d'égalité. On a ainsi la **droite frontière**.	La droite frontière est donc $^-2x + y = 5$.
2. Tracer cette droite frontière dans un plan cartésien : • par une ligne pleine si $\leq$ ou $\geq$; • par une ligne pointillée si $<$ ou $>$.	
3. Déterminer la région à hachurer, soit l'ensemble solution.	Soit le point (0, 0). Puisque $^-2(\mathbf{0}) + \mathbf{0} > 5$ donne $0 > 5$, soit une inégalité fausse, alors ce point ne fait pas partie de la région à hachurer. 

EXERCEZ-VOUS

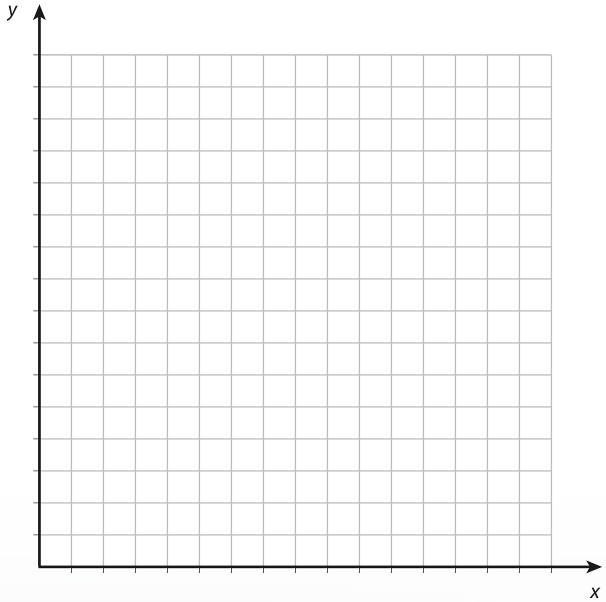
1 Représentez dans le plan cartésien l'ensemble solution des inéquations suivantes pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $^-3x + 2y > 12$

b) $x + 8 \geq 2y$



2 Même si l'on ajoute 5 $/h à la moyenne des salaires horaires de Claudia et de Maxim, celle-ci reste inférieure à 20 $/h. Représentez l'ensemble solution de cette situation.



CORRIGÉ PAGE 163

1. Traduire par un système d'inéquations

Vous savez comment traduire un énoncé par une inéquation du premier degré à deux variables. Dans les pages qui suivent, vous apprendrez à repérer les contraintes d'une situation, puis à les traduire en un **système d'inéquations**.

3 Luis a deux emplois à temps partiel. Il travaille dans une épicerie et aussi dans une pâtisserie. Au total, il travaille toujours moins de 20 h par semaine, ce qui lui permet de se concentrer sur ses études. Il travaille au maximum deux fois plus de temps à l'épicerie qu'à la pâtisserie. Cependant, même si l'on double le temps hebdomadaire travaillé à l'épicerie, cela n'excédera jamais 8 h de plus que le temps travaillé à la pâtisserie chaque semaine.

a) Définissez les variables mises en relation.

____

____

____

____

ATTENTION !

Il est toujours important de préciser les unités de mesure lorsqu'on définit les variables d'une situation. Aussi, il faut préciser dans le cas de variables de temps si la mesure est quotidienne, hebdomadaire, mensuelle, etc.

b) Réorganisez ce texte de façon à bien mettre en évidence toutes les contraintes mentionnées dans cette situation. Surlignez les expressions qui permettent de reconnaître la présence d'une inéquation.

Contrainte 1 : ______________________

Contrainte 2 : ______________________

Contrainte 3 : ______________________

c) Dans chacun des énoncés précédents, repérez et surlignez les expressions qui permettent de choisir les opérateurs arithmétiques à inclure dans l'écriture des inéquations.

d) Définissez chacune des inéquations de cette situation.

1) ____________ 2) ____________ 3) ____________

STRATÉGIE Remplacer les variables par diverses valeurs dans l'inéquation

Une fois l'inéquation déterminée, choisissez différentes valeurs possibles pour l'ensemble solution. À l'aide de ces différentes valeurs, validez si l'inéquation fonctionne. Souvent, on s'aperçoit ainsi que le symbole de l'inéquation n'est pas dans le bon sens ou encore que le coefficient multiplicateur n'est pas associé à la bonne variable.

Exemple :

Supposez, à la question 3, que Luis travaille 8 h/sem à l'épicerie et 7 h/sem à la pâtisserie.

1) Validez dans le texte si ces valeurs respectent les contraintes énoncées.

2) Si c'est le cas, validez que vos trois inéquations définies sont vraies lorsqu'on y insère ces valeurs.

CORRIGÉ PAGE 164

À RETENIR

Traduire des contraintes par un système d'inéquations du premier degré à deux variables

Lorsqu'on regroupe deux inéquations ou plus définies avec les mêmes variables, on nomme cet ensemble un système d'inéquations. Pour traduire des contraintes en un système d'inéquations, on doit :

1) définir les variables mises en relation ;
2) repérer les différents énoncés qui présentent les contraintes de la situation et qui serviront à définir les inéquations ;
3) traduire chacune des contraintes en inéquation, sans oublier de préciser les valeurs admissibles des deux variables ;
4) regrouper ces inéquations pour définir le système d'inéquations de la situation.

Exemple :

Alex utilise beaucoup son ordinateur et son téléphone intelligent. Il passe plus de 20 h par semaine sur l'un ou l'autre de ses appareils. À chaque semaine, le temps passé sur son ordinateur est toujours supérieur à celui passé sur son téléphone, sans toutefois dépasser le double du temps d'utilisation de son téléphone. Il n'utilise jamais son ordinateur plus de 18 h par semaine.

Voici comment traduire cette situation en système d'inéquations.

Les variables définies

x : temps d'utilisation de l'ordinateur par semaine (h/sem)

y : temps d'utilisation du téléphone par semaine (h/sem)

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y > 20 \\ x > y \\ x \leq 2y \\ x \leq 18 \end{cases}$$

Parfois, une seule des deux variables est impliquée dans une contrainte.

ASTUCE

Si une variable de la situation n'admet que des valeurs positives, on doit en tenir compte dans le système d'inéquations. Dans l'exemple, les contraintes $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont ajoutées au système d'inéquations. Il s'agit des contraintes de positivité.

EXERCEZ-VOUS

4 Pour chacune des situations suivantes, vous devez :

1) définir les deux variables mises en relation dans la situation ;
2) traduire les contraintes par un système d'inéquations du premier degré à deux variables.

a) Simon a acheté des amandes et des arachides en vrac dans une épicerie. Il a moins de 100 g d'amandes et plus de 150 g d'arachides. S'il double la masse des amandes achetées et qu'il lui ajoute celle des arachides, la masse totale est supérieure à 300 g. Cependant, la masse des arachides n'excède pas quatre fois la masse des amandes.

ASTUCE

Puisque les variables définies peuvent autant être représentées par *x* que par *y*, il existe une convention selon laquelle la première variable relevée dans le texte devient automatiquement celle traduite par *x*.

b) Pour que Loïc apprécie son lait fouetté, il doit respecter certaines relations entre les quantités de lait et de crème glacée : la quantité de crème glacée doit être d'une fois et demie à trois fois la quantité de lait utilisée. Il n'utilise jamais plus de 250 ml de lait ni plus de 450 ml de crème glacée.

STRATÉGIE Surligner pour repérer

Pour repérer plus facilement toutes les contraintes d'une situation, vous pouvez surligner lors de votre lecture, à l'aide d'un code de couleurs, chaque énoncé qui constitue une contrainte. Vous verrez alors que certaines phrases contiennent parfois plus d'une contrainte, alors que d'autres, n'en contiennent aucune. Cela facilitera grandement la traduction éventuelle de la situation en système d'inéquations.

CORRIGÉ PAGE 164

2. Le polygone de contraintes

Chaque inéquation se représente par un demi-plan. Quand on représente graphiquement un système d'inéquations, on a alors plusieurs demi-plans dans un même plan cartésien. La section suivante vous indique comment faire une telle représentation et comment l'interpréter.

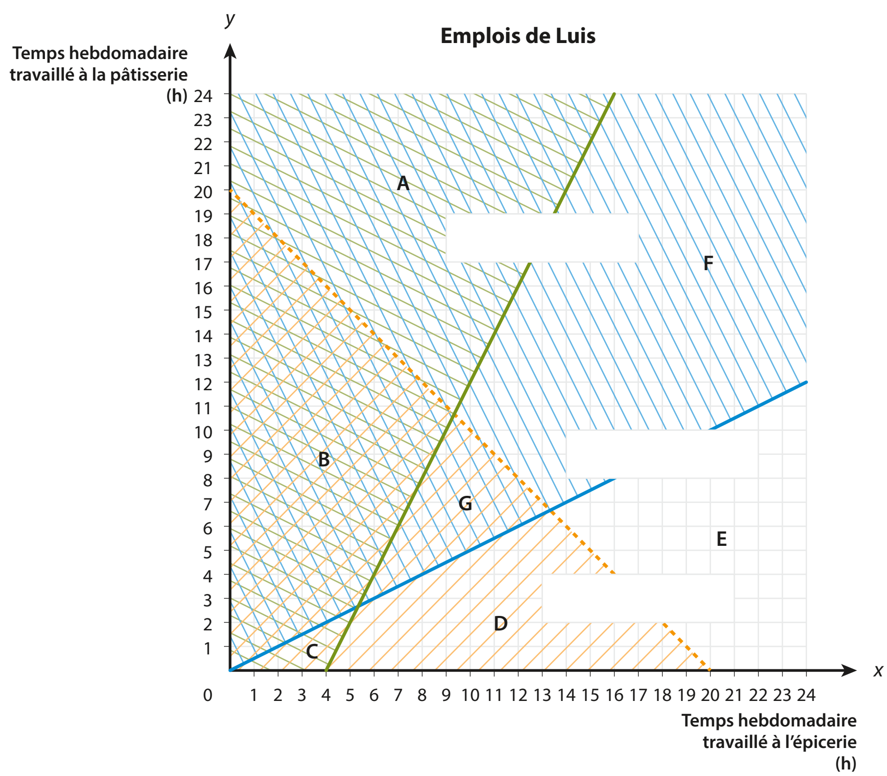
5 Reprenez la situation de Luis et de ses deux emplois. Si x représente le temps hebdomadaire, en heures, travaillé à l'épicerie et y le temps hebdomadaire, en heures, travaillé à la pâtisserie, voici le système d'inéquations traduit précédemment.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y < 20 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ 2x \leq y + 8 \end{cases}$$

ATTENTION !

Bien que les deux contraintes de positivité soient nommées dans le système, on ne les présentera pas par des demi-plans. Ces contraintes servent à assurer une représentation dans le premier **quadrant**, étant donné le contexte.

Si l'on représente chaque demi-plan défini par les inéquations de ce système, on obtient la représentation graphique ci-dessous.



a) Associez à chaque droite frontière du demi-plan l'inéquation qui lui correspond. Inscrivez ces inéquations dans les encadrés.

STRATÉGIE **Repérer à l'aide de paramètres ou de caractéristiques**

Pour associer une droite frontière avec une équation qui la définit, plusieurs stratégies sont possibles. Par exemple, lorsque l'équation est sous la forme canonique ($y = ax + b$), on peut se servir des valeurs des paramètres a et b pour repérer la droite. Ou encore, on peut déterminer les **coordonnées à l'origine** d'une **équation** pour localiser rapidement la droite. On a ainsi recours à ces stratégies pour valider la représentation graphique d'un système d'inéquations.

CORRIGÉ PAGE 164

b) Une des droites frontière de la situation est tracée en pointillés. À quelle contrainte est associée cette droite frontière ? Que signifient les pointillés dans le contexte ?

6 Dans la représentation précédente, différentes régions sont nommées par les lettres de A à G.

REMARQUE : Pour les quatre questions suivantes, les contraintes de positivité ne sont pas considérées.

a) Indiquez la région composée de points dont les coordonnées ne respectent aucune contrainte.

b) Indiquez les régions composées de points dont les coordonnées respectent une seule des trois contraintes. Pour chaque région déterminée, indiquez la contrainte respectée en inscrivant son inéquation.

c) Indiquez les régions composées de points dont les coordonnées respectent exactement deux des trois contraintes. Pour chaque région déterminée, indiquez les deux contraintes respectées en inscrivant leur inéquation.

d) Indiquez la région composée de points dont les coordonnées respectent toutes les contraintes. Quel nom pourrait porter cette région géométrique ?

CORRIGÉ PAGE 164

À RETENIR

Le polygone de contraintes

Le **polygone de contraintes** est le nom donné à la région du plan cartésien qui appartient à tous les demi-plans d'un système d'inéquations. Les points qui composent le polygone de contraintes sont les couples de valeurs qui respectent toutes les inéquations du système et, par conséquent, toutes les contraintes de la situation. Cet ensemble de points représente les couples solutions du système d'inéquations.

Exemple :

La famille de Laurent possède une petite automobile et une fourgonnette. La distance parcourue annuellement par l'automobile est toujours supérieure à celle parcourue par la fourgonnette, sans jamais en dépasser le triple. De plus, la distance annuelle totale parcourue par les deux véhicules est toujours inférieure à 18 000 km.

Voici comment représenter l'ensemble solution de cette situation.

Les variables définies

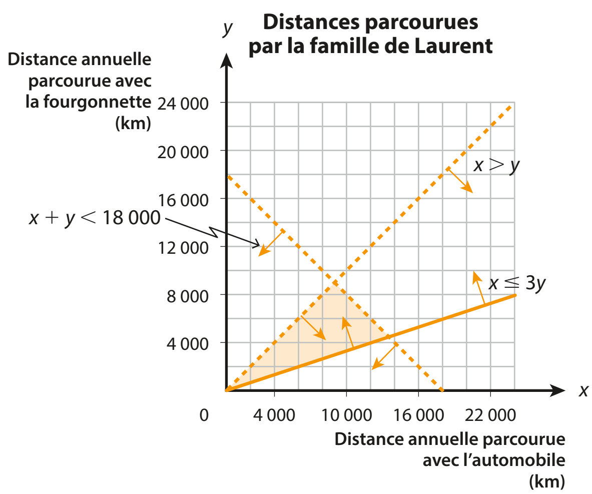
x : distance annuelle parcourue avec l'automobile (km)

y : distance annuelle parcourue avec la fourgonnette (km)

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x > y \\ x \leq 3y \\ x + y < 18\,000 \end{cases}$$

Polygone de contraintes



ASTUCE

Pour déterminer les graduations des axes, il est important d'avoir une idée de l'étendue des valeurs impliquées dans la représentation des contraintes. Avant de faire la représentation graphique des demi-plans, on peut se fier à la valeur des coordonnées à l'origine de chacune des droites frontière pour évaluer quelles sont les graduations à faire sur les axes. Ici, la valeur de 18 000 est importante à considérer.

ASTUCE

Quand un système d'inéquations contient plusieurs inéquations, il peut devenir visuellement difficile de différencier les régions du plan cartésien qui respectent plusieurs contraintes. Pour simplifier la représentation de chaque demi-plan, on indique uniquement des petites flèches pointant dans la direction du demi-plan approprié.

EXERCEZ-VOUS

7 À la question 4 de la rubrique *Exercez-vous* précédente (p. 11), vous avez traduit deux situations en système d'inéquations. Représentez maintenant leur polygone de contraintes.

a) Rappel de la situation : Simon a acheté des amandes et des arachides.

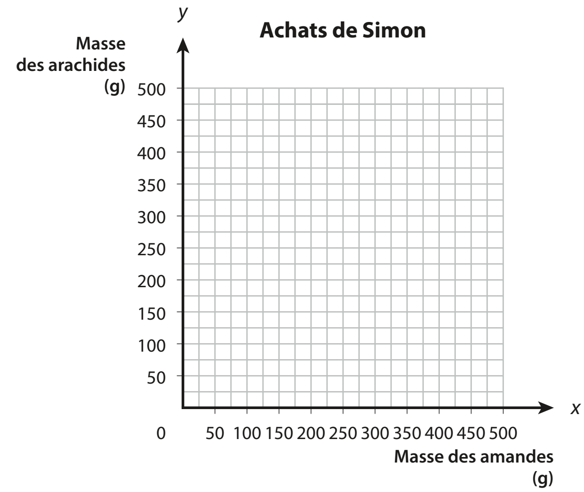
Les variables définies

x : masse des amandes (g)

y : masse des arachides (g)

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x < 100 \\ y > 150 \\ 2x + y > 300 \\ y \leq 4x \end{cases}$$



b) Rappel de la situation : Loïc souhaite un lait fouetté qui respecte certaines contraintes.

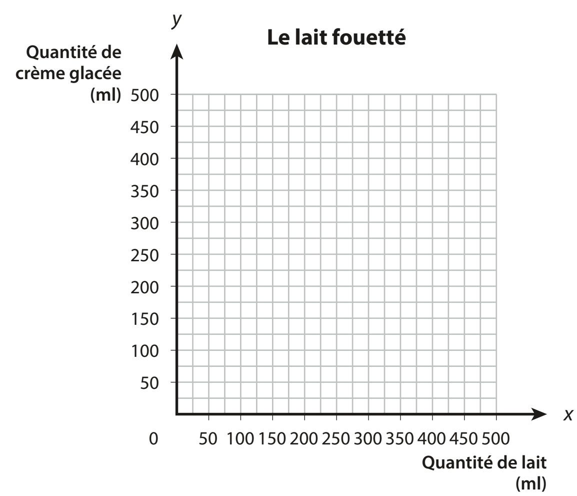
Les variables définies

x : quantité de lait (ml)

y : quantité de crème glacée (ml)

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 1{,}5x \\ y \leq 3x \\ x \leq 250 \\ y \leq 450 \end{cases}$$



TIC À l'aide de la calculatrice à affichage graphique, l'activité TIC 1.1.1 vous fait découvrir comment représenter graphiquement un polygone de contraintes défini par un système d'inéquations. Cette activité est accessible sur portailsofad.com.

STRATÉGIE Utiliser un outil technologique pour faire une représentation graphique

La représentation graphique d'un polygone de contraintes sollicite une attention particulière et comprend plusieurs étapes de calcul. Utiliser un outil technologique pour produire une telle représentation graphique permet de se concentrer sur l'analyse de la situation et la recherche de solutions. De plus, ces outils permettent souvent une utilisation dynamique de la représentation, par le biais d'un « zoom » par exemple, ce qui peut être d'un grand secours dans la recherche de solutions possibles.

Vous venez de voir comment traduire les contraintes d'une situation par un système d'inéquations du premier degré à deux variables. De plus, vous savez maintenant comment représenter graphiquement celui-ci par un polygone de contraintes. Ces savoirs vous seront utiles dans la résolution de la situation-problème 1.2.

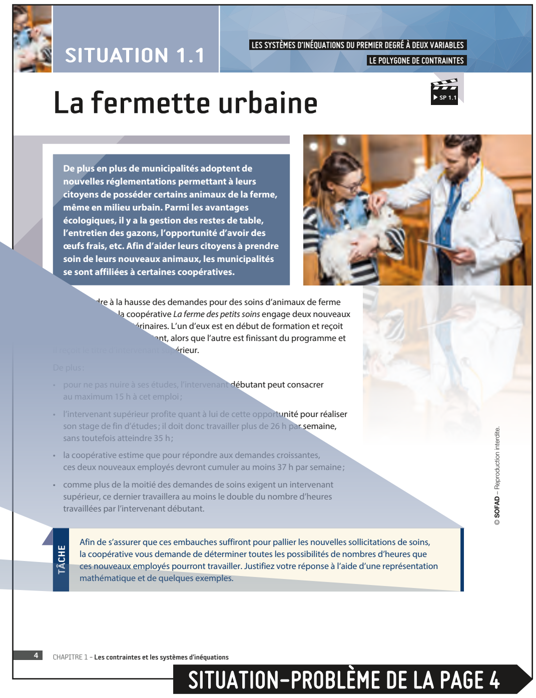
CORRIGÉ PAGE 165

RÉSOLUTION

Vous êtes maintenant en mesure de procéder à la résolution de la situation-problème 1.1.

TÂCHE

Afin de s'assurer que ces embauches suffiront pour pallier les nouvelles sollicitations de soins, la coopérative vous demande de déterminer toutes les possibilités de nombres d'heures que ces nouveaux employés pourront travailler. Justifiez votre réponse à l'aide d'une représentation mathématique et de quelques exemples.


SITUATION 1.1

LES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES

LE POLYGONE DE CONTRAINTES

La fermette urbaine

De plus en plus de municipalités adoptent de nouvelles réglementations permettant à leurs citoyens de posséder certains animaux de la ferme, même en milieu urbain. Parmi les avantages écologiques, il y a la gestion des restes de table, l'entretien des gazons, l'opportunité d'avoir des œufs frais, etc. Afin d'aider leurs citoyens à prendre soin de leurs nouveaux animaux, les municipalités se sont affiliées à certaines coopératives.

Afin de s'assurer que ces embauches suffiront pour pallier les nouvelles sollicitations de soins, la coopérative vous demande de déterminer toutes les possibilités de nombres d'heures que ces nouveaux employés pourront travailler. Justifiez votre réponse à l'aide d'une représentation mathématique et de quelques exemples.

4 CHAPITRE 1 – Les contraintes et les systèmes d'inéquations

SITUATION-PROBLÈME DE LA PAGE 4

Rappel des contraintes du problème

- L'intervenant débutant peut consacrer au maximum 15 h par semaine à cet emploi.
- L'intervenant supérieur doit donc travailler plus de 26 h par semaine, sans toutefois atteindre 35 h.
- Les nouveaux employés devront cumuler au moins 37 h par semaine.
- L'intervenant supérieur travaillera au moins le double du nombre d'heures travaillées par l'intervenant débutant.

Variables définies dans l'*Exploration*

x : le nombre d'heures travaillées par semaine par l'intervenant débutant

y : le nombre d'heures travaillées par semaine par l'intervenant supérieur

Résolution

CORRIGÉ PAGE 167

Résolution (*suite*)

Réponse :

STRATÉGIE Organiser pour interpréter des données

Lorsqu'on représente un ou des ensembles solutions à l'aide d'un même graphique, il faut que la représentation soit claire et précise. Le graphique doit être facile à lire pour que l'on puisse en tirer certaines informations.
En outre, il est important de bien nommer les axes pour définir ce que chaque variable représente.

CORRIGÉ PAGE 167

APPROPRIATION B

Savoirs mathématiques visés :

- explorer les systèmes d'inéquations du premier degré à deux variables discrètes ;
- interpréter les polygones de contraintes ouverts et fermés ;
- rechercher des inéquations équivalentes.

1. Le cas des variables discrètes

La Fermette urbaine présentait une situation où des variables continues, c'est-à-dire où toutes les coordonnées de l'ensemble solution $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, étaient mises en relation. Observez maintenant le cas de variables discrètes.

1 Parmi les municipalités qui ont adopté de nouvelles réglementations permettant à leurs citoyens de posséder certains animaux de la ferme, même en milieu urbain, l'une d'elles décide de légiférer de la façon suivante :

- un citoyen peut posséder au plus 12 poules et moins de 5 moutons ;
- un citoyen doit prévoir un environnement de 1,2 m^2 par poule et de 3,8 m^2 par mouton sans toutefois dépasser 26 m^2 de surface sur sa propriété ;
- un citoyen doit s'assurer d'avoir au moins une poule de plus que le nombre de moutons.

a) Quelles sont les deux variables de cette situation-problème qui font l'objet de contraintes ?

x : ____________________

y : ____________________

b) Traduisez toutes les contraintes par un système d'inéquations.

c) Les variables mises en relation sont de quelle nature (discrètes ou continues) ? Expliquez votre réponse.

d) Peut-on dénombrer toutes les possibilités du nombre de poules et de moutons qu'un citoyen peut posséder ? Justifiez votre réponse en proposant une méthode pour le faire.

CORRIGÉ PAGE 168

e) Calculez le nombre de couples solutions à l'aide d'une représentation graphique.

CORRIGÉ PAGE 168

À RETENIR

Le polygone de contraintes dans le cas de variables discrètes

Lorsqu'une situation met en relation des variables discrètes, le dénombrement manuel peut devenir très fastidieux à faire. Pour simplifier le processus, il est possible de représenter l'ensemble solution d'un système d'inéquations à l'aide du polygone de contraintes. Par contre, il faut tenir compte du fait que ce polygone présente des coordonnées en trop ne faisant pas partie de l'ensemble solution. Seules les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ font partie des solutions possibles.

Exemple :

Les organisateurs d'une fête foraine ont ramassé plusieurs cannettes et bouteilles vides. Ils ont au moins deux fois plus de cannettes que de bouteilles. En obtenant la consigne de 0,05 $ par cannette et de 0,10 $ par bouteille, ils ont accumulé plus de 5,00 $. Finalement, ils ont ramassé au plus 120 contenants consignés.

Voici comment représenter l'ensemble solution.

Les variables définies

x : nombre de cannettes ramassées

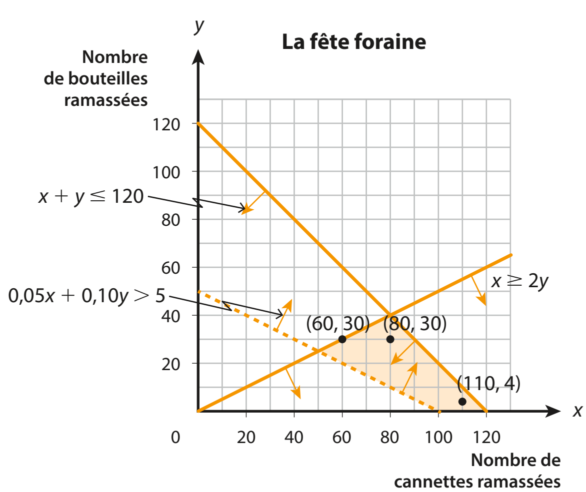
y : nombre de bouteilles ramassées

Ces variables sont discrètes, donc $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 0{,}05x + 0{,}10y > 5 \\ x + y \leq 120 \end{cases}$$

Le polygone de contraintes



ATTENTION !

Comme c'est souvent le cas, il peut être impossible de dessiner un plan où le pas de graduation est de 1 unité sur les deux axes. Par exemple, pour représenter toutes les solutions possibles visuellement dans la présente situation, il faudrait un plan cartésien ayant une grille de 120 sur 120. On accepte alors de ne pouvoir mettre des points sur chaque coordonnée possible. L'interprétation du polygone devient alors très importante.

L'ensemble solution correspond à toutes les coordonnées incluses dans le polygone de contraintes telles que $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ici, par exemple, les points (60, 30), (80, 30) et (110, 4) sont des couples solutions, car ils possèdent des coordonnées entières.

EXERCEZ-VOUS

2 Un groupe d'au plus 32 personnes se rend dans un parc d'attractions. Il y a au maximum quatre fois plus d'enfants que d'adultes. Le tarif pour enfant est de 20 $ et celui pour adulte est de 35 $. Le budget pour l'admission au parc ne doit pas dépasser 900 $. Le groupe comporte moins de 15 adultes.

Voici le système d'inéquations défini :

x : nombre d'enfants dans le groupe

y : nombre d'adultes dans le groupe

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 32 \\ x \leq 4y \\ 25x + 35y \leq 900 \\ y < 15 \end{cases}$$

Représentez l'ensemble solution et donnez quelques couples solutions possibles. Puis, validez à l'aide du système d'inéquations quelques-uns de vos couples solutions.

CORRIGÉ PAGE 170

2. Les polygones de contraintes ouverts et fermés

Jusqu'à présent, seuls des polygones de contraintes fermés ont été présentés. Voici une situation où celui-ci sera ouvert.

3 Dans le potager de Jasmine, on retrouve un minimum de 5 plants de concombres et un minimum de 20 plants de tomates. Il y a au moins 10 plants de tomates de plus que de plants de concombres. Lorsqu'elle entretient ses plants, en consacrant 2 min par plant de concombres et 1 min par plant de tomates, Jasmine a besoin d'au moins une heure pour faire l'entretien de son potager.

Les variables définies

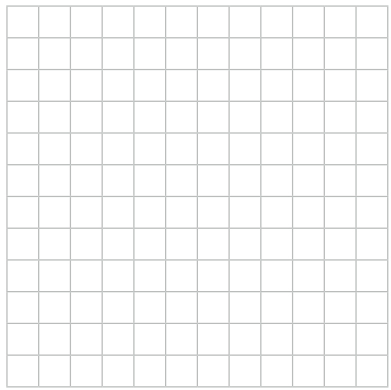
x : nombre de plants de concombres

y : nombre de plants de tomates

Les variables sont discrètes

Le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 5 \\ y \geq 20 \\ y \geq x + 10 \\ 2x + y \geq 60 \end{cases}$$



a) Représentez graphiquement l'ensemble solution.

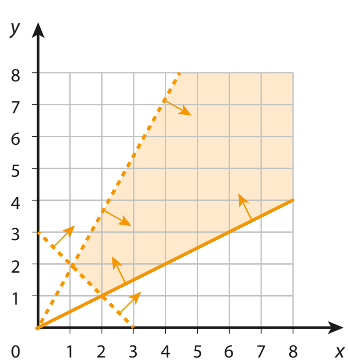
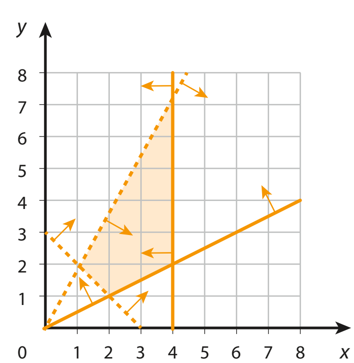
b) Selon vous, s'agit-il ici d'un polygone de contraintes ouvert ou fermé ? Expliquez votre réponse.

À RETENIR

Les polygones de contraintes (ouverts ou fermés)

On dit d'un polygone de contraintes qu'il est ouvert, dès qu'il n'est pas borné par l'un de ses côtés. Tandis qu'un polygone de contraintes dit « fermé » présente une région délimitée, donc bornée par tous ses côtés.

Exemple :

Polygone de contraintes ouvert	Polygone de contraintes fermé
	

CORRIGÉ PAGE 170

EXERCEZ-VOUS

4 Inventez une situation dans laquelle le polygone de contraintes est ouvert. Celui-ci doit avoir au moins trois contraintes.

Situation :

Les variables définies :

Le système d'inéquations :

Le polygone de contraintes :

5 Chacun des systèmes d'inéquations suivants définit un polygone de contraintes. Dites dans chaque cas s'il s'agit d'un polygone ouvert ou fermé.

a) x : nombre naturel
y : nombre naturel

$$\begin{cases} y > 50 \\ y > 2x - 3 \\ x > 15 \end{cases}$$

b) x : nombre naturel
y : nombre naturel

$$\begin{cases} y + x < 12 \\ y < x + 3 \\ y > 2 \end{cases}$$

c) x : nombre naturel
y : nombre naturel

$$\begin{cases} x - y < 6 \\ y > 5 \\ x > 8 \end{cases}$$

ASTUCE

Les signes d'inégalités dans le système d'inéquations aident à visualiser les bornes d'un polygone de contraintes. Par exemple, dans le système a) de la question 5, il n'y a pas d'inéquation qui borne supérieurement l'ensemble solution. D'ailleurs, on remarque qu'aucune inéquation ne s'intéresse aux valeurs de y qui sont « plus petites que » ($<$) quelque chose. Sans même faire la représentation visuelle, on peut affirmer qu'il s'agit d'un polygone de contraintes ouvert.

3. Les inéquations équivalentes

Dans les pages qui suivent, vous aurez à consolider tous les apprentissages faits dans cette activité d'appropriation. À l'occasion, il se peut que votre système d'inéquations ne soit pas le même que celui présenté dans le corrigé. Voici un petit rappel sur les inéquations équivalentes.

6 Dans une rubrique *À Retenir* précédente, on a fait mention d'une fête foraine où l'on a ramassé des bouteilles et des canettes vides.

Voici le système défini par Francis	Voici le système défini par Maïté
x : nombre de cannettes ramassées y : nombre de bouteilles ramassées $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 0{,}05x + 0{,}10y > 5 \\ x + y \leq 120 \end{cases}$	x : nombre de cannettes ramassées y : nombre de bouteilles ramassées $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} \geq y \\ 0{,}05x + 0{,}10y > 5 \\ y \leq {}^{-}x + 120 \end{cases}$

Francis et Maïté sont en désaccord par rapport à qui d'entre eux présente le système d'inéquations adéquat.

a) Qui a raison ? Justifiez votre réponse.

b) Imaginez maintenant que Francis définisse ses variables telles que :

x : nombre de bouteilles ramassées

y : nombre de cannettes ramassées

Obtiendra-t-il le même système d'inéquations ? Justifiez votre réponse en précisant ce système.

CORRIGÉ PAGE 171

RAPPEL

EXERCICES DE RÉACTIVATION
PAGE 147, NUMÉROS 5 À 7

La résolution d'une inéquation

La résolution d'inéquations suit les mêmes principes que la résolution d'équations.

Par contre, lorsqu'on divise ou multiplie les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, il est impératif de changer le sens de l'inégalité en plus d'appliquer la loi des signes.

Exemple :

On demande de résoudre l'inéquation suivante : $3x - 2 < 5x + 7$. Observez la démarche.

1. Additionner 2 de chaque côté de l'inéquation.	$3x - 2 + \mathbf{2} < 5x + 7 + \mathbf{2}$ $3x < 5x + 9$
2. Soustraire $5x$ de chaque côté.	$3x - \mathbf{5x} < 5x + 9 - \mathbf{5x}$ $^-2x < 9$
3. Diviser par $^-2$ chaque côté et changer le sens de l'inégalité.	$\frac{^-2x}{\mathbf{^-2}} > \frac{9}{\mathbf{^-2}}$ $x > \frac{^-9}{2}$ ou $x > {}^-4,5$
4. Vérifier l'inégalité avec un nombre. Avec $^-4$ par exemple, puisque $^-4$ est plus grand que $^-4,5$.	$3x - 2 < 5x + 7$ $3(\mathbf{^-4}) - 2 < 5(\mathbf{^-4}) + 7$ $^-12 - 2 < {}^-20 + 7$ $^-14 < {}^-13$ C'est vrai.

EXERCEZ-VOUS

7 Trois étudiants présentent à leur enseignante leur système d'inéquations. Voici chacun d'eux.

Étudiant A

x : quantité d'eau (ml)

y : quantité de colorant (ml)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 25x < 30y + 675 \\ y + 1,6x \leq 120 \\ 15y > 3x + 600 \end{cases}$$

Étudiant B

x : quantité d'eau (ml)

y : quantité de colorant (ml)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 25x - 30y < 675 \\ 2y \leq {}^-3,2x + 240 \\ ^-10y < {}^-2x - 400 \end{cases}$$

Étudiant C

x : quantité d'eau (ml)

y : quantité de colorant (ml)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5 < 1,2y + 32 \\ ^-10y - 16x + 258 \geq {}^-942 \\ 5y - 2x > 200 - x \end{cases}$$

Démontrez que ces trois systèmes s'équivalent.

CONSOLIDATION

1 Traduisez les énoncés suivants en système d'inéquations, en ayant au préalable défini les variables mises en relation.

a) Monia veut acheter au minimum trois fois plus de chemises que de jupes, mais faire au maximum 12 achats.

b) En quelques heures, un commerçant a vendu des billets de loterie à 1 $ l'unité et des billets de loterie à 5 $ l'unité. Le total de ses ventes a été d'au moins 300 $. Il sait avoir vendu au moins deux fois moins de billets à 5 $ que de billets à 1 $.

c) Lors d'une fête champêtre, les organisateurs prévoient servir au moins trois fois plus d'épis de maïs que de sandwichs. Toutefois, ils n'ont pas prévu servir plus de 400 épis de maïs.

> **ASTUCE**
>
> Une fois une inéquation écrite, n'hésitez pas à mettre des valeurs possibles dans celle-ci afin de vérifier si le sens de votre inégalité est approprié et si les coefficients devant les variables sont justes.
>
> *Exemple :*
> Puisque le commerçant sait avoir vendu au moins deux fois moins de billets à 5 $ que de billets à 1 $, on peut prétendre qu'il a uniquement vendu 50 billets à 5 $ et un peu plus de 100 billets à 1 $. On remplace alors ces valeurs dans l'inéquation ($x = 101$ et $y = 50$), pour valider si elle est bien écrite.

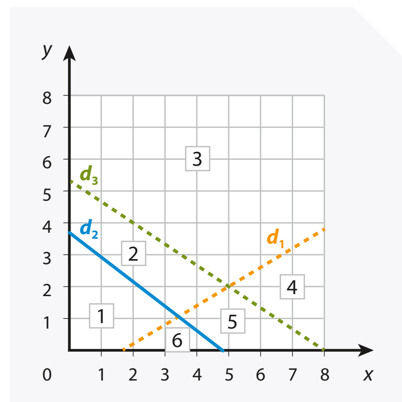
d) Un certain modèle d'avion peut transporter au maximum 60 personnes. On attend un minimum de 10 enfants et un maximum de 45 adultes.

CORRIGÉ PAGE 172

2 Associez les expressions de gauche aux inéquations de droite. Inscrivez le numéro de l'inéquation correspondante à côté de l'expression.

a) Le nombre de plants de tomates et de poivrons n'excède pas 25.	◯	1.	$x \geq 3y$
b) Ce chien n'atteindra jamais l'âge de 25 ans.	◯	2.	$x > 3y$
c) Le total de chiens et de chats sera de plus que 25.	◯	3.	$x < 25$
d) La somme de deux nombres sera d'au moins 25.	◯	4.	$x + y < 25$
e) Ensemble, l'âge des deux enfants sera moins que 25.	◯	5.	$x \leq 3y$
f) Un nombre est au maximum trois fois plus grand qu'un autre.	◯	6.	$x + y \geq 25$
g) Un nombre surpasse trois fois un autre.	◯	7.	$x + y > 25$
h) Un nombre est supérieur ou égal au triple d'un autre.	◯	8.	$x + y \leq 25$

3 a) À l'aide de la représentation graphique ci-contre, déterminez si chacune des six régions dans le plan cartésien appartient ou non à l'ensemble solution des inéquations suivantes. Inscrivez *oui* ou *non* dans les cases du tableau.



Région du plan	$d_1 : 3x - 5y > 5$	$d_2 : 2{,}5x + 3{,}25y \geq 12$	$d_3 : 4x + 6y < 32$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

b) Quelle région représente le polygone de contraintes ? De quelle nature est ce polygone ? Expliquez votre réponse.

CORRIGÉ PAGE 172

4 Pour chacun de ces systèmes d'inéquations, complétez la représentation graphique afin d'y présenter clairement les demi-plans et le polygone de contraintes.

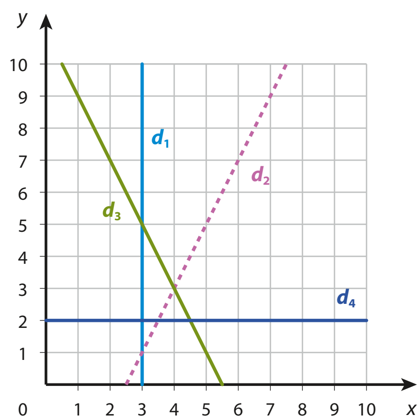
a)

$d_1: x \geq 3$

$d_2: 2x - y < 5$

$d_3: 2x + y \leq 11$

$d_4: y \geq 2$



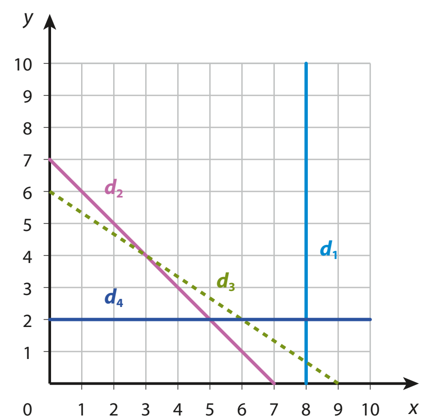
b)

$d_1: x \leq 8$

$d_2: x + y \geq 7$

$d_3: 2x + 3y > 18$

$d_4: y \geq 2$



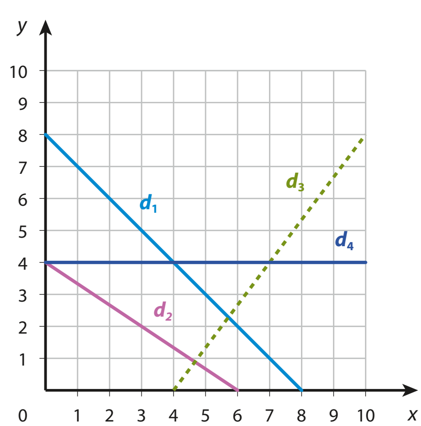
c)

$d_1: x + y \leq 8$

$d_2: 2x + 3y \geq 12$

$d_3: 4x - 3y < 16$

$d_4: y \leq 4$



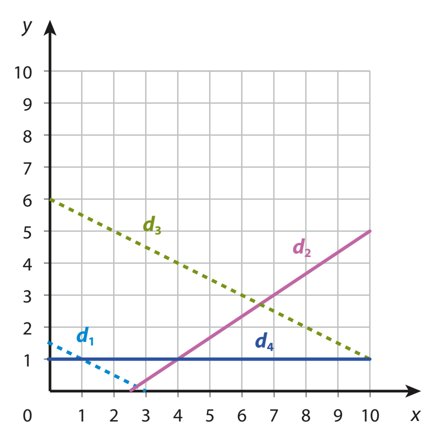
d)

$d_1: x + 2y > 3$

$d_2: 2x - 3y \geq 5$

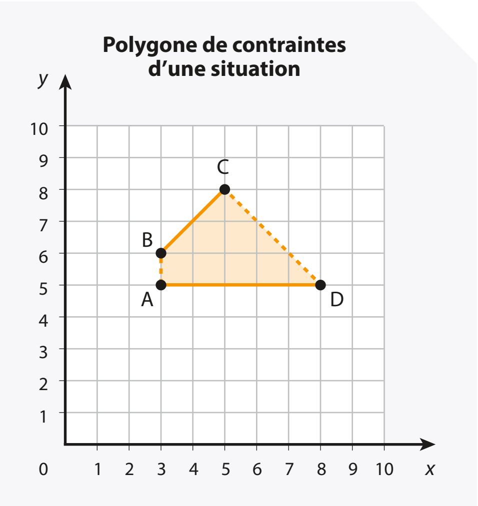
$d_3: x + 2y < 12$

$d_4: y \geq 1$



CORRIGÉ PAGE 173

5 Déterminez un système d'inéquations qui pourrait être associé au polygone de contraintes ci-contre. Puis, décrivez en mots une situation dont les contraintes correspondent à ce système d'inéquations.



6 Laëtitia veut s'inscrire à un programme scientifique. Elle a un budget maximal de 1200 $ pour ses choix de cours. Elle doit choisir un horaire d'une durée comprise entre 12 et 20 heures inclusivement, pour avoir un statut d'étudiante à temps plein. Les cours théoriques durent 2 heures/semaine et coûtent 100 $ chacun, alors que les cours en laboratoire durent 3 heures/semaine et coûtent 150 $ chacun. Laëtitia
doit avoir à son horaire plus de cours théoriques que de cours en laboratoire.

a) À l'aide du contexte et du système d'inéquations déjà traduit :

1) définissez les variables x et y ;

2) associez les inéquations aux droites frontières de la représentation graphique ;

3) indiquez par des flèches les demi-plans de ces inéquations ;

4) colorez le polygone de contraintes.

1) x : ____

y : ____

(Les variables sont positives.)

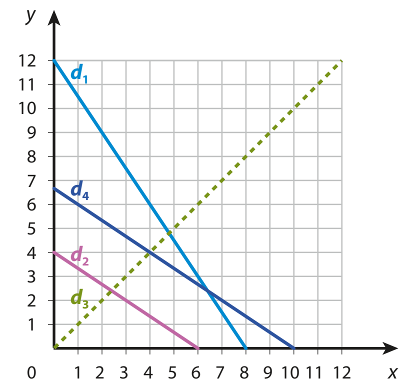
2) $150x + 100y \leq 1200$: ____

$x > y$: ____

$2x + 3y \geq 12$: ____

$2x + 3y \leq 20$: ____

3-4)



b) Quel est l'ensemble solution de cette situation ?
Nommez deux couples solutions possibles.

____

____

ATTENTION !

Afin de bien interpréter une situation représentée par un polygone de contraintes, il est important de ne pas perdre de vue le type de variables (discrètes ou continues) avec lesquelles les inéquations du système sont définies.

CORRIGÉ PAGE 173

7 La maison des jeunes de votre localité organise une soirée récréative afin de recueillir des fonds pour une activité spéciale. En raison de la dimension de la salle, le nombre total de billets est limité à 200. Au moins 75 billets seront vendus aux membres de la maison des jeunes. On prévoit qu'il y aura au moins trois fois plus de membres de la maison des jeunes que de non-membres qui assisteront à cette soirée.

Sachant que *x* représente la quantité de billets vendus aux membres et *y* la quantité de billets vendus aux non-membres de la maison des jeunes, construisez le polygone de contraintes représentant la composition possible de la soirée. Puis, donnez deux de ces compositions possibles.

8 Roberto est fleuriste. Il veut profiter d'une réduction offerte par son grossiste pour l'achat de roses et de marguerites. L'espace réfrigéré dont il dispose lui permet d'acheter au plus 24 douzaines de fleurs. Le grossiste exige qu'un minimum de 2 douzaines de roses et de 3 douzaines de marguerites soient achetées pour profiter de la réduction proposée. Sachant que les roses se vendent mieux que les marguerites, Roberto pense acheter au moins deux fois plus de roses que de marguerites.

a) Après avoir défini les variables et traduit la situation en système d'inéquations, construisez le polygone de contraintes qui représente le nombre de douzaines de fleurs de chaque sorte que Roberto peut acheter.

b) Est-ce que tous les points (*x*, *y*) du polygone de contraintes sont des couples solutions de la situation ? Justifiez votre réponse.

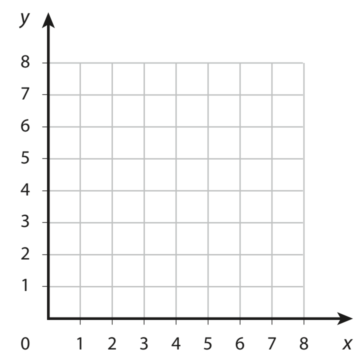
CORRIGÉ PAGE 174

9 Un candidat à une élection municipale veut faire distribuer un journal publicitaire partout dans le quartier où il se présente. L'imprimeur demande 0,30 $ pour l'impression d'une page en couleurs et 0,15 $ pour une page en noir et blanc. Pour démontrer son sérieux, le candidat pense que le journal devra contenir au moins 5 pages, et au plus 15 pages, afin de ne pas ennuyer les électeurs. Il veut avoir au moins deux pages contenant de la couleur, sans que le coût total ne dépasse 2 $ par journal publicitaire.

a) Après avoir défini les variables et traduit la situation en système d'inéquations, construisez le polygone de contraintes qui représente les nombres possibles de pages en couleurs et en noir et blanc.

x : ______________________________

y : ______________________________



b) Est-ce que tous les points (x, y) du polygone de contraintes sont des couples solutions de la situation ? Justifiez votre réponse.

____

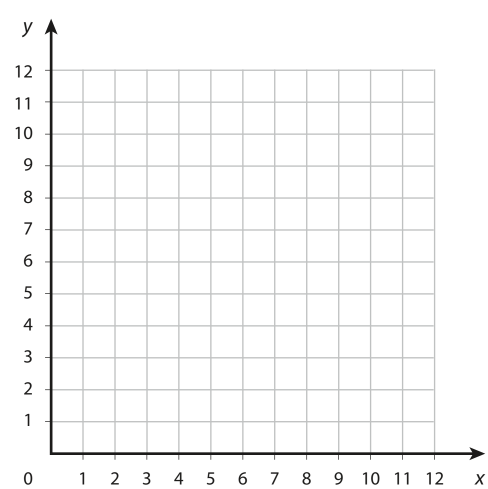
____

10 Une compagnie pharmaceutique veut produire une nouvelle crème pour la peau. Elle sera composée d'hydratant et d'émollient. La nouvelle formule aura un format compris entre 327 et 447 ml inclusivement. Au moins le tiers de la crème sera composé d'hydratant et il y aura au moins 150 ml d'émollient.

Après avoir défini les variables et traduit les contraintes en inéquations, construisez le polygone de contraintes qui représente les compositions possibles de la nouvelle crème.

x : ______________________________

y : ______________________________



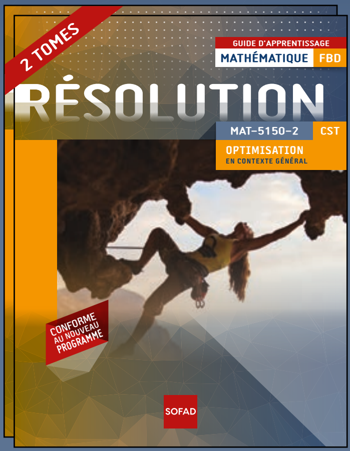
____

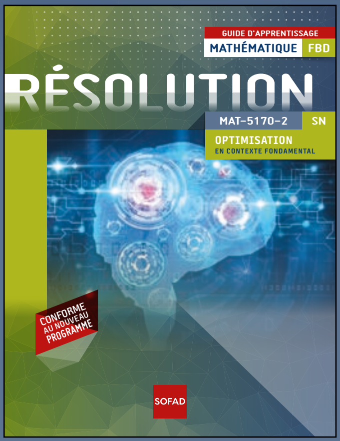
____

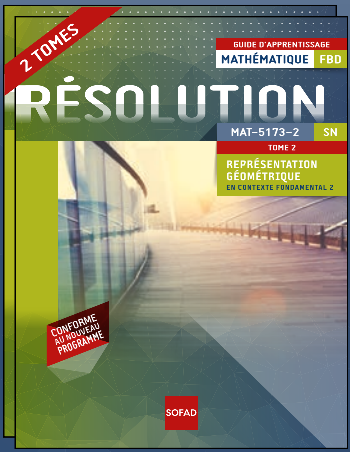
CORRIGÉ PAGE 175

RÉSOLUTION

La collection **RÉSOLUTION** couvre l'ensemble des cours du programme de formation de base commune et diversifiée, dont les séquences *Culture, société et technique* (CST) et *Sciences naturelles* (SN) de 5e secondaire.







SOFAD

RÉSOLUTION propose une démarche d'apprentissage basée sur l'acquisition de tous les savoirs mathématiques prescrits en contexte de résolution de problèmes. La séquence d'apprentissages qui soutient cette approche est la suivante :

PRÉSENTATION D'UNE SITUATION-PROBLÈME

EXPLORATION DU PROBLÈME

→ APPROPRIATION DES SAVOIRS

→ RÉSOLUTION DU PROBLÈME

→ CONSOLIDATION DES APPRENTISSAGES

Le questionnement, à la fois inductif et déductif, donne un sens aux savoirs et aux stratégies à acquérir. Les guides d'apprentissage offrent une multitude d'exercices simples et de tâches plus complexes en réponse aux besoins exprimés par les apprenants et les enseignants. Des ressources supplémentaires sont aussi offertes sur portailsofad.com.

Composantes de la collection RÉSOLUTION :

- Guide d'apprentissage : version imprimée et PDF ;
- Guide synthèse d'enseignement (PDF) ;
- Capsules vidéo des situations-problèmes ;
- Activités TIC : GeoGebra, calculatrice à affichage graphique ;
- Activités notées ;
- Corrigés.

8528-01