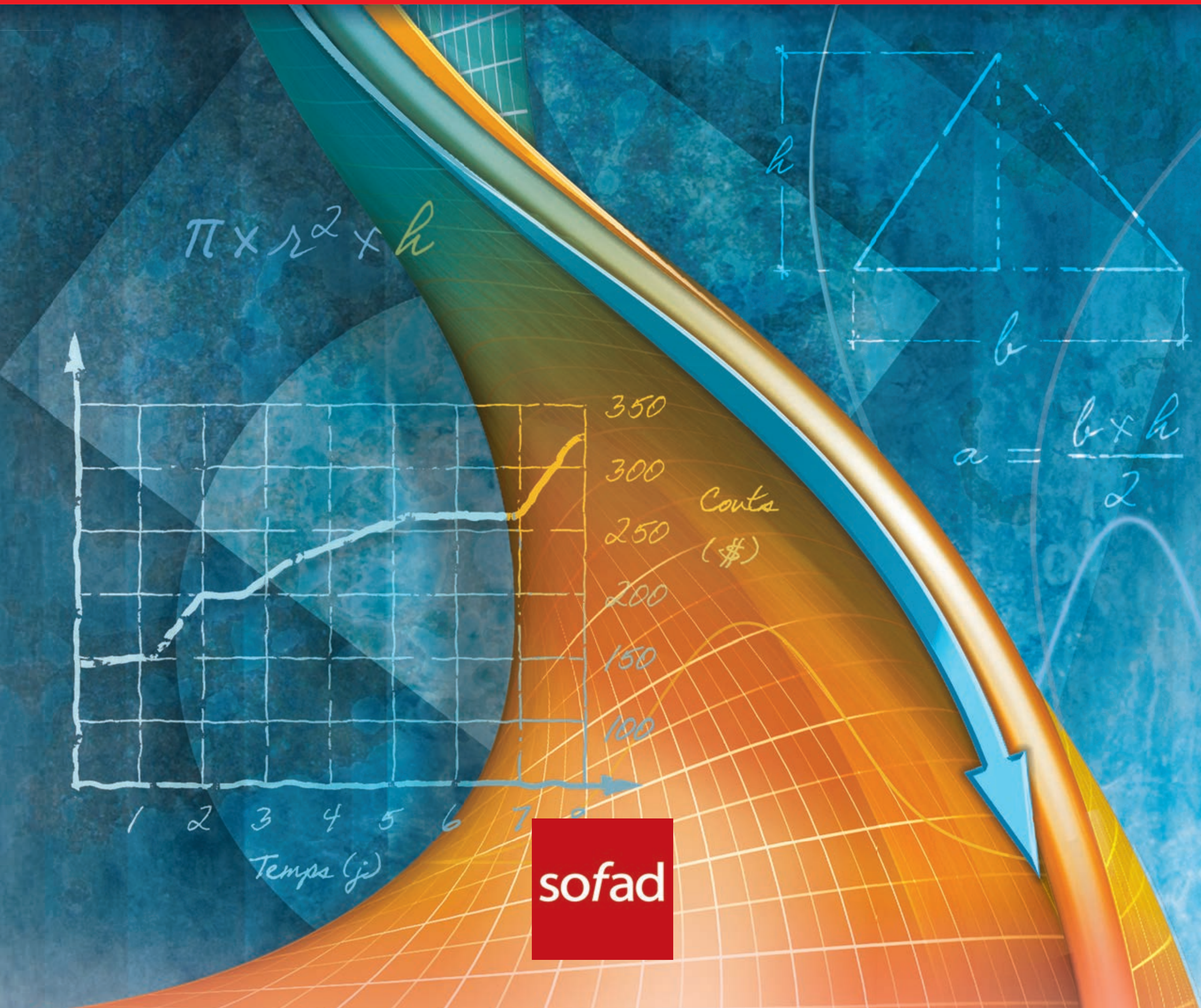
MAT-2101-3

MODÉLISATION ALGÉBRIQUE



sofad

MODÉLISATION

ALGÉBRIQUE

MAT-2101-3

Guide d'apprentissage

sofad

Programme de la formation de base commune (premier cycle du secondaire)
Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie
Programme d'études : Mathématique

1re secondaire
MAT-1101-3 Arithmétique appliquée aux finances
MAT-1102-3 Étude statistique et probabiliste

2e secondaire
MAT-2101-3 Modélisation algébrique
MAT-2102-3 Représentations et transformations géométriques

Modélisation algébrique

Ce guide a été réalisé par la Société de formation à distance des commissions scolaires du Québec (SOFAD).

Chargé de projets :	Ronald Côté (SOFAD)
Rédaction :	André Dumas Gilles Gascon
Révision de contenu :	Louise Lachapelle Alain Bombardier
Révision linguistique :	Michelle Côté
Montage infographique :	Serge Mercier
Page couverture :	Marc Tellier
Correction d'épreuves :	Johanne St-Martin
Première parution :	Avril 2013

Équipe de production de la version préliminaire

Chargé de projets :	Charles Camirand (SOFAD)
Rédaction :	Isabelle Lemay et Nadine Martin
Révision :	Gilles St-Louis

Dans cette production, le masculin est utilisé sans aucune discrimination et uniquement dans le but d'alléger le texte.

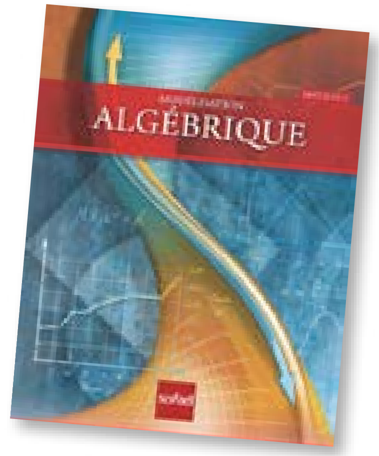
Dépôt légal – 2013

Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN : 978-2-89493-373-2

Avril 2013

Table des matières

Introduction



Présentation

Bienvenue dans le cours *Modélisation algébrique*. Ce cours a pour but de vous initier aux rudiments de l'algèbre et de vous permettre de construire et d'utiliser des modèles algébriques pour résoudre des situations de la vie courante. L'algèbre est une forme de simplification des calculs mathématiques qui servent à résoudre des problèmes où sont mis en lien différentes quantités comme la vitesse et la distance, le salaire et les heures de travail, le total d'une facture et les taxes, etc. Comprendre l'utilisation de modèles algébriques facilite le calcul et permet de gagner du temps. C'est donc une habileté qu'il est important de maîtriser. En algèbre, on utilise des lettres, appelées variables, pour remplacer les quantités connues et inconnues d'un problème et ainsi raccourcir l'écriture des calculs. Des équations, constituées de variables, de chiffres ainsi que du symbole d'égalité permettent de résoudre les problèmes présentés.

Si la notion de modélisation algébrique vous paraît aride et que le terme « algèbre » lui-même est pour vous synonyme de calculs abstraits et compliqués, remplis de x et de y, rassurez-vous ! On utilise tous l'algèbre dans la vie de tous les jours, sans vraiment s'en rendre compte. Bien sûr, vous vous dites que vous n'écrivez jamais d'équations, et pourtant vous avez souvent recours à des modèles algébriques, par exemple lorsque vous estimez le coût de la facture du plombier qui installera votre nouveau chauffe-eau, ou lorsque vous calculez à l'avance votre paye de la semaine, ou encore quand vous planifiez le coût de vos prochaines vacances.

De quoi sera-t-il question dans les six situations d'apprentissage de ce guide ? Dans un premier temps, c'est en évaluant les coûts de l'hébergement, du transport et des activités lors d'un voyage aux îles de la Madeleine que vous développerez vos compétences à communiquer et à raisonner à l'aide de modèles algébriques. Ce faisant, vous apprendrez à utiliser des variables et des symboles mathématiques afin de généraliser un ensemble de situations par une équation décrivant des relations communes à celles-ci.

Dans un deuxième temps, vous exploiterez votre habileté à résoudre des équations à une inconnue en traitant des problèmes nécessitant le calcul de formules géométriques relatives aux périmètres, aux aires et aux volumes. Vous serez ainsi à même de constater que les champs de l'arithmétique, de la géométrie et de l'algèbre se côtoient et se complètent lorsqu'il s'agit d'établir des relations entre des quantités.

Structure du guide et consignes d'utilisation

Le présent guide a été conçu pour permettre un apprentissage en mode individualisé en établissement ou à distance. Il s'appuie soit sur des enjeux de la société, soit sur des situations de la vie courante qui, même si elles sont parfois fictives, demeurent réalistes.

Cette orientation rendra votre cheminement des plus agréables, puisque, tout en respectant votre rythme, elle stimulera chez vous l'envie :

- de vous engager à plein dans cette démarche;
- de développer encore davantage votre assurance par rapport aux opérations algébriques;
- de mettre à profit votre propre expérience et vos connaissances;
- de réinvestir ces connaissances dans la vie quotidienne.

Tout au long de votre formation, vous aurez des outils pour mesurer vos succès et pour déterminer les moyens à prendre afin de surmonter les aspects qui vous sembleront plus ardus. Vous pourrez ainsi progresser continuellement dans votre apprentissage.

Que ce soit un formateur ou une formatrice en établissement ou un tuteur ou une tutrice à distance, cette personne-ressource demeure à votre disposition pour vous soutenir et vous éclairer. Si un point vous semble plus difficile, n'hésitez pas à recourir à cette aide précieuse, qui vous fournira, selon le cas, des conseils, des stratégies et des astuces.

Les situations d'apprentissage

Le guide est composé de six situations d'apprentissage qui non seulement vous feront découvrir de nouveaux savoirs, mais vous amèneront à les manier avec aisance et à les appliquer avec compétence. Chaque situation d'apprentissage est construite sur un même modèle. Elle comporte d'abord une présentation, incluant une description de la tâche que vous aurez à accomplir à la fin de la situation. Une première activité d'exploration vous convie à vérifier l'état de vos connaissances sur des notions que vous avez apprises antérieurement. Cette activité vous servira à revoir certaines notions et opérations mathématiques qui vous seront utiles pour la réalisation des activités suivantes.

La situation d'apprentissage est ensuite divisée en plusieurs activités d'apprentissage. Dans chacune d'elles, une mise en situation est présentée et des questions vous sont posées.

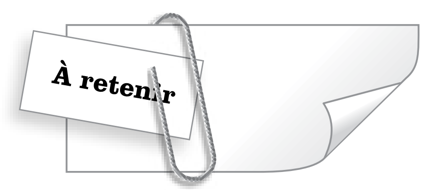
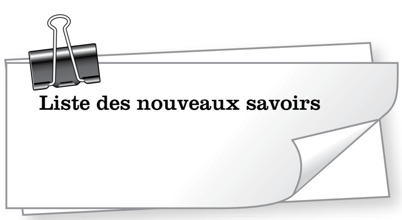
Même si vous doutez de vos réponses, n'hésitez pas à les noter. À cette étape, elles visent simplement à vous faire prendre la mesure de vos connaissances actuelles et à stimuler votre capacité d'analyse. Rassurez-vous, car, aussitôt après ces questions, les notions, les concepts, les règles vous seront expliquées en détail, et seront appuyées de nombreux exercices, qui vous permettront d'acquérir ces nouveaux savoirs. Toutes les réponses aux exercices se trouvent dans le corrigé, situé à la fin du guide.

Vous serez ensuite invité à réaliser quelques exercices d'intégration portant sur l'ensemble des concepts abordés dans la situation d'apprentissage. Les réponses à ces exercices se trouvent également à la fin du guide.

Une fois les exercices d'intégration complétés, vous pourrez réaliser l'activité de synthèse. Cette dernière activité vous permettra de mettre en pratique vos compétences à communiquer et à raisonner avec logique. Les situations d'apprentissage se terminent avec une liste des nouveaux savoirs qui ont été abordés dans la situation.

Les repères visuels

Tout au long du texte, différents signes et pictogrammes vous guideront dans votre apprentissage. Le tableau ci-dessous vous indique la signification de ces pictogrammes

Soulignement	Les mots soulignés en pointillés sont définis dans le lexique à la fin du guide.
	Un texte coiffé d'une loupe ajoute un complément d'information : il ne fait pas directement partie de l'apprentissage et aucune question de l'épreuve d'évaluation finale ne porte sur son contenu.
	Une ampoule coiffe les encadrés qui présentent une astuce permettant de simplifier le travail.
	Les encadrés coiffés d'une punaise de babillard contiennent des rappels de notions ou de concepts préalables abordés dans des cours précédents.
	Le cadre représentant une feuille de papier au coin retroussé détermine des éléments à retenir.
	La pince à papier détermine les dernières pages de chaque situation d'apprentissage. Ces pages présentent un résumé des savoirs essentiels qui ont été abordés.

Les activités notées

Le guide *Modélisation algébrique* est accompagné de trois cahiers séparés, ce sont les activités notées. Si ces cahiers ne vous ont pas été fournis, vous pouvez les télécharger sur le site des ressources pour les apprenants au : http://cours1.sofad.qc.ca/ressources.

Le tableau qui suit vous indique les thèmes qui sont évalués par chacune d'elles et à quel moment vous devez les réaliser.

Situations d'évaluation	Thèmes touchés
Activité notée 1	Modèles algébriques et résolution d'équations. (Situations d'apprentissage 1, 2 et 3)
Activité notée 2	Les chaînes d'opérations et l'isolation de variable pour résoudre une équation. Les taux et les proportions. (Situations d'apprentissage 4 et 5)
Activité notée 3	Périmètre, aire et volume. Notion de proportionnalité directe et inverse. (Situation d'apprentissage 6)

Une fois que vous aurez terminé une activité notée, vous devrez la soumettre, pour correction. Remettez-la à votre formateur ou formatrice si vous suivez le cours en établissement ou transmettez-la à votre tuteur ou tutrice si vous étudiez à distance. Dans tous les cas, on vous rendra le document corrigé.

L'autoévaluation

La dernière activité du guide consiste en une épreuve d'autoévaluation. Cette activité est une étape de préparation à l'évaluation finale. Complétez l'épreuve d'autoévaluation sans consulter le texte du guide ni le corrigé. Puis, comparez vos réponses avec celles du corrigé et complétez votre étude au besoin.

Une grille d'autoévaluation accompagne cette épreuve. Elle vous servira à déterminer les notions que vous maîtrisez et celles pour lesquelles une révision s'impose avant de vous présenter à l'épreuve de sanction. Des indications sur les notions à réviser sont fournies à même cette grille.

Le corrigé

Dans l'avant-dernière section, immédiatement après l'activité d'autoévaluation et la conclusion, se trouve le corrigé des exercices. Reportez-vous à ce corrigé à la fin de chaque série d'exercices afin de vous assurer que vous avez bien compris tous les concepts, et ce, avant de passer à l'activité ou à la situation d'apprentissage suivante. Dans cette section se trouve aussi le corrigé de l'épreuve d'autoévaluation.

Le lexique

Le lexique constitue la dernière partie du guide. Vous y trouverez, classées en ordre alphabétique, les définitions des mots soulignés en pointillés dans les situations d'apprentissage. N'hésitez pas à le consulter au fil de vos lectures afin de bien comprendre les termes et expressions qui s'y trouvent.

Matériel complémentaire

Ayez sous la main tout le matériel dont vous aurez besoin.

Votre guide accompagné d'un cahier de notes où vous consignerez, en résumé, les notions importantes à retenir, relatives à la liste des savoirs essentiels donnée dans l'introduction.

Un dictionnaire, une calculatrice, un crayon à mine pour inscrire vos réponses et vos notes dans votre guide, un stylo-bille de couleur pour corriger vos réponses, un surligneur pour mettre en évidence les idées importantes, une gomme à effacer, etc.

Soutien à l'apprentissage

Que vous suiviez le cours en établissement ou à distance, votre démarche d'apprentissage ne se fera pas en solitaire. En classe, vous aurez le soutien de votre formateur ou formatrice; tandis qu'en formation à distance, vous pourrez compter sur le soutien d'un tuteur ou d'une tutrice, à votre disposition pour répondre à vos questions.

Informations complémentaires concernant la formation à distance

Voici quelques suggestions qui vous aideront à organiser votre temps d'étude. La durée de la formation est évaluée approximativement à 75 heures de travail.

- Établissez un horaire d'étude en tenant compte non seulement de vos besoins, mais aussi de vos obligations familiales, professionnelles et autres.
- Essayer de consacrer quelques heures par semaine à l'étude, de préférence en bloc de deux heures chaque fois.
- Respectez autant que possible l'horaire que vous avez choisi.

Le tuteur ou la tutrice est la personne-ressource à qui vous ferez appel, et qui corrigera et commentera les trois activités notées du cours. N'hésitez pas à l'interroger si vous éprouvez des difficultés avec la théorie ou les exercices, ou si vous avez besoin d'encouragement pour poursuivre votre étude. Notez vos questions par écrit au fur et à mesure qu'elles surgissent et communiquez avec votre tuteur ou tutrice par téléphone pendant ses heures de disponibilité. Vous pouvez également choisir de lui acheminer, en tout temps, vos questions par courriel. Si son horaire et ses coordonnées ne vous ont pas été transmis avec le présent guide, demandez-les au centre de formation où vous avez fait votre inscription.

Votre tuteur ou tutrice est là pour vous guider tout au long de votre apprentissage et vous fournir l'information susceptible d'assurer le succès de votre projet de formation.

Évaluation aux fins de sanction

Si vous désirez acquérir les trois unités rattachées à ce cours, vous devez obtenir une note d'au moins 60 % à l'évaluation finale, qui a lieu dans un centre d'éducation des adultes. Pour vous présenter à cette épreuve, il est souhaitable que vous ayez également obtenu une moyenne d'au moins 60 % aux activités notées accompagnant le présent guide. D'ailleurs, certains centres d'éducation des adultes exigent ce résultat de 60 % aux activités notées pour vous admettre à l'épreuve officielle.

Pour connaître les critères d'évaluation de l'épreuve officielle, renseignez-vous auprès de votre formateur ou votre formatrice si vous suivez cette formation en établissement, ou auprès de votre tuteur ou tutrice si vous étudiez à distance.

Savoirs essentiels abordés dans les situations

Situations d'apprentissage	Savoirs essentiels
1. Des vacances en famille : l'hébergement	Traduire une situation écrite à l'aide de variables. Écrire une situation donnée sous forme d'équation. Résoudre des équations en y substituant la valeur des variables connues. Déterminer la valeur numérique d'une expression algébrique. Isoler une variable dans une équation. Déterminer la valeur d'une variable inconnue dans une équation. Maîtriser les notions de coefficient numérique, de constante, de régularité et d'invariant. Représenter une situation de la vie courante à l'aide d'un modèle algébrique.

2. Des vacances en famille : le transport	Utiliser un coefficient à effet multiplicateur devant une variable. Traduire une situation donnée par une équation. Additionner et soustraire des termes semblables. Isoler une variable dans une équation. Calculer une vitesse moyenne.
3. Des vacances en famille : les loisirs	Calculer des chaînes d'opérations contenant des expressions algébriques. Isoler une variable dans une équation. Traduire une situation par une équation du 1er degré à une variable. Résoudre des équations du 1er degré à une variable.
4. Planification d'un événement spécial : le repas	Établir un rapport entre deux quantités. Établir un rapport à l'unité. Déterminer un rapport sous forme de fraction irréductible. Établir une proportion. Appliquer la loi fondamentale des proportions. Traduire une situation sous la forme d'une proportion. Déterminer la valeur d'une variable inconnue dans une proportion.

5. Planification d'un événement spécial : la réception	Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle. Calculer la circonférence d'un cercle. Appliquer les formules de calcul du périmètre d'un carré, d'un rectangle et de la circonférence d'un cercle. Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle et d'un cercle. Extraire la racine carrée d'un nombre à l'aide d'une calculatrice. Appliquer des formules pour calculer l'aire de figures géométriques. Déterminer la valeur des multiples et des divisions d'un mètre carré. Calculer l'aire latérale et l'aire totale des solides suivants : prisme droit, cône, pyramide, cylindre, sphère. Calculer le volume des solides suivants : prisme droit, cône, pyramide, cylindre, sphère. Extraire la racine cubique d'un nombre à l'aide d'une calculatrice. Isoler une variable dans les formules de volume.
6. Rénover une maison	Déterminer la grandeur de la constante de proportionnalité. Traduire une relation de proportionnalité directe à l'aide d'une proportion. Résoudre une relation de proportionnalité directe à l'aide de la loi fondamentale des proportions. Traduire une relation de proportionnalité inverse à l'aide d'une proportion. Résoudre une relation de proportionnalité inverse à l'aide de la loi fondamentale des proportions.

1 Des vacances en famille : l'hébergement

Présentation

Avec l'arrivée de l'été, vient le temps des vacances. Place aux divertissements et au repos bien mérité. Et pourquoi pas un voyage ? Près de chez soi, loin de chez soi, peu importe ! « Histoire de changer d'air », comme le disait l'humoriste Yvon Deschamps, « même si c'est le même air partout… ».

Le tourisme est un secteur économique important au Québec. Durant la saison estivale, on trouve des activités diverses pour tous les goûts et toutes les bourses dans chacune des régions de la province. Que ce soit le camping, les festivals, les musées, les activités sportives ou culturelles, la gastronomie ou les sites pittoresques, on a l'embarras du choix pour planifier des vacances dont on gardera d'excellents souvenirs.

Cependant, les vacances ne sont pas gratuites. Il importe donc de choisir une destination selon un budget bien établi.

Prenons une famille composée de deux parents et de deux enfants, qui a l'intention de séjourner dans les îles de la Madeleine, ce petit coin de paradis situé dans l'estuaire du fleuve Saint-Laurent, pendant leurs vacances d'été. Le séjour est fixé à deux semaines sur l'île du Cap-aux-Meules. Le budget total des vacances est fixé à 5000 $.

Avant d'entreprendre le voyage, il faut toutefois le planifier. Plusieurs variables sont à considérer : hébergement, restauration, transport, activités et autres dépenses diverses. Il faut tout prévoir afin de respecter le budget.

Dans cette situation, il sera uniquement question des variables « hébergement » et « repas ». On s'intéressera plus particulièrement aux coûts associés aux options d'hébergement suivantes : la maison meublée, le centre de vacances et le gîte dans une auberge. Quant aux autres dépenses, il en sera question dans les deux situations qui suivront.

Votre tâche

Dans cette situation, vous aurez à calculer, à l'aide d'équations, les coûts associés à différentes options d'hébergement et de restauration. Par la suite, vous devrez calculer ce qui reste du budget initial pour couvrir les autres dépenses de vacances.

Exploration

Pour être en mesure d'effectuer les divers calculs demandés dans cette situation d'apprentissage, certaines connaissances apprises antérieurement en arithmétique sont nécessaires. Vous devrez faire appel aux lois de la priorité des opérations ainsi qu'aux lois des signes pour les quatre opérations mathématiques. Profitez de cette activité pour vérifier vos acquis.

1.1 Effectuez les opérations suivantes.

a) $(12 \times 8) + 78 =$ ____________________

b) $80 - (80 \times 0{,}40) =$ ____________________

c) $-3 \times (-5) =$ ____________________

d) $10 - 7 =$ ____________________

e) $13 - 37 + (-12 \times \frac{1}{2}) =$ ____________________

f) $(-5) - (-4) - (-8) =$ ____________________

g) $(-6) - 9 + 10 - 1 =$ ____________________

1.2 Effectuez les opérations suivantes.

a) $10 + 4(3 - 5) =$ ____________________

b) $2(18 - 8) - (-3 \times 2) =$ ____________________

c) $-4\,(-10 + 9) - 3(4 - 6) =$ ____________________

d) $(6 - 6) + (-7 + 7) - 4\,(8 - 8) =$ ____________________

e) $-8 + 2 \times 3 + 5 \times 8 \div 2 =$ ____________________

f) $4 + 4{,}2 \times 5 \div 3 + \frac{6}{5} =$ ____________________

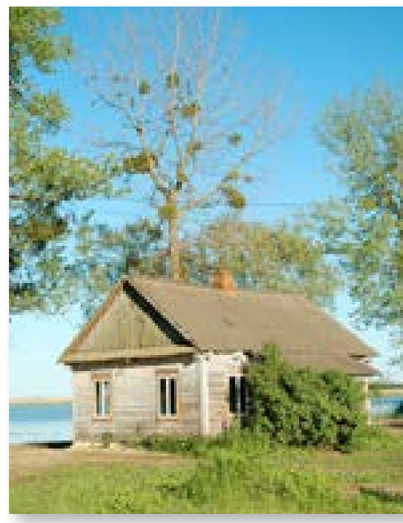
Activité 1.1 – La maison meublée ou le centre de vacances

But

- Traduire une situation écrite à l'aide de variables.
- Écrire une situation donnée sous forme d'équation.
- Résoudre des équations en y substituant la valeur des variables connues.
- Déterminer la valeur numérique d'une expression algébrique.

A) Location d'une maison meublée

Figure 1.1



Lorsqu'on planifie un voyage, il faut savoir que l'hébergement représente une partie substantielle des dépenses et, de ce fait, a une incidence sur la part du budget qui sera consacrée aux autres activités des vacances. Il est donc nécessaire d'analyser diverses options de logement avant d'arrêter son choix.

Des établissements proposent le petit déjeuner gratuit ainsi que des activités sur place. La location d'une maison meublée réduit le coût des repas si on les cuisine soi-même, mais on doit se déplacer pour réaliser des activités. Donc, plusieurs facteurs entrent en ligne de compte et il faut en tenir compte avant de prendre une décision afin de respecter le budget prévu de 5000 $.

Dans cette première activité, vous serez initiés à quelques notions de base du langage algébrique. Vous vous familiariserez avec les « variables » qui sont généralement représentées par des lettres et qui remplacent un ou plusieurs éléments d'un ensemble de référence. Comme vous le verrez, c'est plus commode.

En utilisant un modèle algébrique, vous serez en mesure de faire des calculs pour différents types d'hébergement pour des vacances sur les îles de la Madeleine et de faire un choix éclairé selon le budget de 5000 $ d'une famille de quatre personnes.

Variables, indices et équations

Voici les informations recueillies relativement à la location d'une maison meublée.

Tableau 1.1 – Location par semaine d'une maison meublée

Prix par semaine	Saison
800,00 $	Basse saison (octobre à mars)
925,00 $	Moyenne saison (avril-mai-juin)
975,00 $	Haute saison (juillet-août-septembre)

Si la famille loue une maison pour un séjour de deux semaines, peu importe la saison, exprimez le coût total de l'hébergement en complétant la phrase suivante à l'aide de mots, sans aucune mention de chiffres ou de variables.

Le coût total de l'hébergement égale ____

____.

Votre réponse devrait ressembler à ceci :

Le coût total de l'hébergement égale le coût de la première semaine plus le coût de la deuxième semaine.

Si la famille loue une maison pendant trois semaines, dont deux en moyenne saison et une en haute saison, exprimez à nouveau le coût de l'hébergement à l'aide de mots, sans aucune mention de chiffres ou de variables.

____

____

Votre réponse devrait ressembler à ceci :

Le coût total de l'hébergement égale le coût d'une semaine en moyenne saison, plus le coût d'une semaine en moyenne saison, plus le coût d'une semaine en haute saison.

Ces exemples illustrent bien que l'écriture en mots est plutôt longue. Pour simplifier le procédé, remplaçons certains mots par des symboles représentant les opérations à effectuer.

Revenons à la première phrase :

Le coût total de l'hébergement égale le coût de la première semaine, plus le coût de la deuxième semaine.

Réécrivez cette phrase et remplacez les mots « égale » et « plus » par des symboles que vous connaissez fort bien.

____

Vous devriez avoir obtenu ceci :

Le coût total de l'hébergement = le coût de la première semaine + le coût de la deuxième semaine.

Voilà, la phrase est écourtée. Ne pourrait-on pas la réduire davantage ? Bien sûr ! On peut remplacer le mot « coût » par la lettre **C** et ajouter des **indices** pour différencier les coûts spécifiques. Voici ce que ça donne :

Coût total de l'hébergement : C_h où l'indice h signifie hébergement

Coût de la 1^re^ semaine : C_1 où l'indice 1 signifie 1^re^ semaine

Coût de la 2^e^ semaine : C_2 où l'indice 2 signifie 2^e^ semaine

Vous êtes maintenant en mesure d'écrire la phrase complète à l'aide de variables.

Avez-vous obtenu ceci ?

$C_h = C_1 + C_2$

La phrase a été littéralement réduite à peu de chose, mais tout y est. En algèbre, chacune des lettres de cette expression mathématique est appelée **variable**.

À retenir

Une **variable** est un terme indéterminé, généralement représenté par une lettre, qui peut être remplacé par un ou plusieurs éléments d'un ensemble de référence (mots ou nombres).

Un **indice** est un symbole (lettre ou chiffre) utilisé pour distinguer des variables représentées par la même lettre. Il s'écrit en miniature en bas et à droite de la variable.

Exemple : deux objets ont des masses différentes et nous devons identifier chacun par une variable accompagnée d'un indice. On obtient $\mathbf{m}_1$, pour la masse du premier objet, et $\mathbf{m}_2$ pour la masse du deuxième objet.

Il est à noter que le choix d'une variable pour représenter un mot peut varier. Souvent on choisit la première lettre du mot, mais ce n'est pas une obligation. Par exemple, on a choisi **C** pour le coût, mais on aurait pu dire **P** pour prix ou **M** pour montant ou **X** pour montant inconnu…

Donc, l'équation $C_h = C_1 + C_2$ pourrait s'écrire autrement si l'on remplaçait C_h par **H** et C_1 et C_2 par $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$.

Pourriez-vous réécrire l'équation avec ces nouvelles variables ?

Vous devriez avoir obtenu ceci : $H = S_1 + S_2$

Quel serait votre choix de variable pour représenter l'âge de quelqu'un ?

Les variables « a » ou « A » sont un bon choix. L'idée étant d'utiliser une lettre qui représente le mot « âge ».

À l'aide de variables et d'indices, proposez une façon de distinguer l'âge de Jacques et celui de Marie.

Les variables $\mathbf{A_J}$ et $\mathbf{A_M}$ seraient de bons choix, ou tout simplement **J** et **M**.

Substitution

La famille de quatre personnes décide de louer une maison deux semaines, dont une en moyenne saison et l'autre en haute saison. Écrivez l'équation puis calculez le coût total de l'hébergement en remplaçant chaque variable par sa valeur monétaire.

Exemples de réponses :

$H = S_1 + S_2$

H = 925,00 \$ + 975,00 \$

H = 1900,00 \$

Vous venez d'effectuer une substitution en remplaçant S_1 et S_2 par leur valeur monétaire respective.

Calculez maintenant le prix de l'hébergement pour un séjour de trois semaines, dont deux en haute saison et l'autre en moyenne saison. Traduisez cette situation par une équation, puis calculez la valeur de la variable.

Votre réponse devrait ressembler à ceci.

$H = S_1 + S_2 + S_3$

H = 925,00 \$ + 925,00 \$ + 975,00 \$

H = 2825,00 \$

À retenir

Une **équation** est une expression mathématique dans laquelle on trouve un signe d'égalité (=) et au moins une variable.

Exemples d'équations :

$d = v\,t$, où la distance est le résultat de la vitesse multiplié par le temps.

$f = p + b + a$, où le total des fruits est égal aux nombre de pommes + nombre de bananes + nombre d'ananas.

$s = 15\ h$, où le salaire est obtenu en multipliant le taux horaire de 15 \$/h par le nombre d'heures de travail.

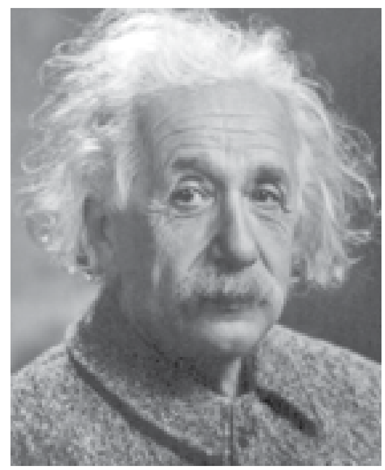
Le saviez-vous ?

Des équations célèbres

Des hommes de sciences, grâce à leur curiosité et leur ténacité, ont contribué à mettre en lumière le monde complexe dans lequel nous vivons en énonçant des équations qui ont nécessité plusieurs années de recherche.

James Clerk Maxwell (1831-1879)

Par ses équations, Maxwell, physicien d'origine écossaise, a démontré l'existence des ondes électromagnétiques et les liens fondamentaux entre l'électricité et le magnétisme. L'application de ses équations est à l'origine de l'invention de nombreux appareils de télécommunication, tels que la radio, la télévision, le téléphone, le cellulaire, l'ordinateur, le iPod, etc.



Albert Einstein (1879-1955)

Le travail de Einstein est notamment connu pour l'équation $E = mc^2$ qui établit une équivalence entre la matière et l'énergie. Elle signifie qu'une quantité de matière m possède, du fait de cette masse, une énergie E, donnée par le produit de m par le carré de la vitesse de la lumière c^2. (La vitesse de la lumière est d'environ 300 000 000 mètres par seconde.)

Expression algébrique

Une expression algébrique est un ensemble de variables et de nombres liés les uns aux autres par des symboles d'opérations arithmétiques (+, –, ×, ÷), mais sans signe d'égalité (=). Chacun des « morceaux » d'une expression algébrique qui est séparé par un **+** ou un **–** est appelé terme. Les exemples suivants sont des expressions algébriques.

Exemples :	$x + 9$	est une expression algébrique comportant deux termes.
	$2x + 5$	est une expression algébrique comportant deux termes.
	$7x - \frac{1}{4}$	est une expression algébrique comportant deux termes.
	$4y - 3x$	est une expression algébrique comportant deux termes.
	$3(5x)$	est une expression algébrique comportant un seul terme.
	$4x + (3 + y)$	est une expression algébrique comportant trois termes.

Une expression algébrique est une phrase traduite à l'aide de variables et d'opérations mathématiques.

Observez les phrases qui suivent et leur traduction en langage mathématique :

En mots	**En langage mathématique**
9 de plus qu'un nombre	$x + 9$
2 fois un nombre	$2x$
5 de plus que 2 fois un nombre	$2x + 5$
7 fois un nombre	$7x$
14 de moins que 7 fois un nombre	$7x - 14$
4 moins 3 fois un nombre	$4 - 3x$
5 fois un nombre	$5x$
Le produit de 5 fois un nombre par 3	$3(5x)$ ou $5x \times 3$
4 fois un nombre ajouté à la somme de 3 et de ce même nombre	$4x + (3 + x)$
Le quotient de x par 5	$x \div 5$ ou $\frac{x}{5}$

À votre tour ! Transformez les phrases suivantes en expressions algébriques.

En mots **En langage mathématique**

1) 6 ajouté à deux fois un nombre ____________________

2) Le produit d'un nombre et 10 ____________________

3) 8 moins 4 fois un nombre ____________________

4) 3 fois un nombre moins 12 ____________________

5) Le quotient entre 3 fois un nombre et 7 ____________________

6) 4 fois un nombre divisé par la soustraction d'un nombre et 8 ____________________

7) $\frac{3}{4}$ fois un nombre ajouté à la différence entre 2 et 5 fois un nombre ____________________

Avez-vous trouvé ce qui suit ? Si oui, félicitations !

1) $6 + 2x$ 2) $10x$ 3) $8 - 4x$ 4) $3x - 12$

5) $\frac{3x}{7}$ 6) $4x \div (x - 8)$ ou $\frac{4x}{x-8}$ 7) $\frac{3x}{4} + (2 - 5x)$

Évaluation d'une expression algébrique

Comme vous l'avez vu, une expression algébrique contient au moins une variable. Quand on donne différentes valeurs à cette variable « x », la valeur numérique de l'expression algébrique varie. Une expression algébrique acquiert une valeur numérique uniquement lorsque la variable est remplacée par des nombres.

Dans le tableau qui suit, voyez comment varie la valeur numérique de l'expression algébrique **3*x* + 1**, selon la valeur attribuée à la variable « x ».

N. B. **3*x* + 1** se lit comme suit : 1 ajouté à trois fois la valeur de « x ».

Tableau 1.2 – Calcul de la valeur d'une expression algébrique

Valeur de la variable « x »	Valeur numérique de l'expression algébrique : $3x + 1$
3	$3(3) + 1 = 10$
0	$3(0) + 1 = 1$
–1	$3(–1) + 1 = –2$
–5	$3(–5) + 1 = –14$

À vous de jouer. Calculez la valeur totale de l'expression algébrique suivante :

$$-9x - \frac{10}{x}$$

Valeur de la variable « x »	**Valeur numérique de l'expression algébrique** : $-9x - \frac{10}{x}$
1) 5	______________________
2) 2	______________________
3) 1	______________________
4) –2	______________________
5) –5	______________________

Vous avez obtenu ce qui suit ? Très bien !

1) $-9(5) - \frac{10}{5} = -45 - 2 = -47$ 2) $-9(2) - \frac{10}{2} = -18 - 5 = -23$ 3) $-9\ (1) - \frac{10}{1} = -9 - 10 = -19$

4) $-9(-2) - \frac{10}{-2} = 18 + 5 = 23$ 5) $-9(-5) - \frac{10}{-5} = 45 + 2 = 47$

B) Location dans un centre de vacances

Figure 1.2

Après avoir analysé les coûts associés à la location d'une maison meublée, vous les comparez avec ceux d'un centre de vacances. En plus de l'hébergement, ce type d'établissement offre sur place un service complet de restauration ainsi que diverses activités comme la randonnée pédestre, le vélo, la baignade à la mer ou à la piscine, la promenade en véhicule tout terrain, la planche à voile, le kayak de mer et la voile pour observer les falaises, les phoques et les couchers de soleil.

L'hébergement consiste en un chalet meublé avec toutes les commodités modernes, literie incluse. Les repas, pour lesquels il faut débourser un supplément, sont servis dans une grande salle commune.

Voici les prix affichés sur Internet.

Tableau 1.3 – Coûts de location par semaine

Prix par semaine pour 6 personnes	Rabais pour 4 personnes ou moins	Saison
875,00 $	50,00 $	Basse saison
975,00 $	75,00 $	Moyenne saison
1050,00 $	125,00 $	Haute saison

Écrivez une phrase exprimant en mots le coût de location pour une semaine pour une famille de quatre personnes (peu importe la saison).

Votre réponse devrait ressembler à ceci :

« Le coût pour quatre personnes égale le coût pour six personnes moins le rabais ».

Décidément, c'est long à écrire !

Maintenant, écrivez la phrase sous forme d'équation en utilisant des variables : « C » pour la variable « Coût », accompagnée d'un indice distinctif, et « R » pour la variable « Rabais ».

Votre équation pourrait ressembler à celle-ci : $C_4 = C_6 - R$. Mais vous auriez pu utiliser d'autres indices comme $C_x = C_e - R$. L'important, c'est de distinguer les deux variables utilisant la même lettre.

L'indice, signe distinctif de variables de même symbole

À retenir

Dans l'équation précédente, certains ont peut-être écrit C4 = C6 – R. En soi, cette façon de faire n'est pas mauvaise puisqu'on distingue les variables C4 et C6. Toutefois, ce procédé est à éviter, car il peut favoriser la confusion avec un coefficient devant une variable et entraîner des erreurs de calcul. Par conséquent, pour distinguer des variables de même symbole, il est préférable de s'en tenir aux indices minuscules placés à droite et en bas de la variable, soit C_4 et C_6.

Dans l'équation, substituez la valeur des variables connues et calculez la location pour une semaine en moyenne saison.

Votre réponse doit ressembler à ceci :

$C_4 = C_6 - R$

$C_4 = 975{,}00\ \$ - 75{,}00\ \$$

$C_4 = 900{,}00\ \$$

Quand on trouve la valeur de la variable inconnue dans une équation, l'équation est dite résolue. Remarquez la façon de procéder par étapes. Afin d'éviter les erreurs, appliquez-vous à procéder de cette façon.

La variable, une gauchère !

À retenir

Lorsqu'on résout une équation, observez que la variable est située à gauche du signe d'égalité. Par convention, il en est toujours ainsi. Dans tous les traités d'algèbre, mais aussi dans les livres et revues scientifiques, vous trouverez la variable isolée à gauche et sa valeur à droite du signe d'égalité.

Par exemple : $x = 5$ ou $F = 87{,}4$

Écrivez maintenant une équation qui représente le prix d'un séjour d'une semaine en haute saison.

Votre réponse peut ressembler à ceci :

$C_{h4} = C_{h6} - R$

Substituez la valeur des variables connues dans l'équation et calculez le coût de la location d'une semaine en haute saison.

$C_{h4} = C_{h6} - R$

$C = 1050{,}00\ \$ - 125{,}00\ \$$

$C = 925{,}00\ \$$

En vous référant aux deux équations et réponses des deux exercices précédents, écrivez une équation pour un séjour de deux semaines, l'une en moyenne saison et l'autre en haute saison.

Exemples de réponses :

$C_t = C_4 + C_{h4}$ ou $C_t = C_6 - R + C_{h6} - R$

Substituez les variables par les valeurs connues et calculez le coût de location.

$C_t = C_4 + C_{h4}$	$C_t = C_6 - R + C_{h6} - R$
$C_t = 900{,}00\ \$ + 925{,}00\ \$$	$C_t = 975{,}00\ \$ - 75{,}00\ \$ + 1050{,}00\ \$ - 125{,}00\ \$$
$C_t = 1825{,}00\ \$$	$C_t = 1825{,}00\ \$$

Vous voyez que l'une ou l'autre des équations donne le même résultat final comme coût de location. L'important est de produire une équation valable pour résoudre le problème posé, peu importe le type de variables que l'on choisit d'utiliser.

Membres d'une équation

Une équation est toujours constituée de deux membres : un membre de gauche et un membre de droite séparés par un signe d'égalité. Dans une équation, les deux membres sont toujours égaux entre eux. Cette propriété nous permettra de résoudre des équations, c'est-à-dire de trouver la valeur d'une variable.

Vérifions si les équations suivantes sont des expressions vraies.

a) $x + 5 - y = z + 2$ si $x = 10$, $y = 8$ et $z = 5$

Pour faire la vérification, nous remplaçons chaque variable par sa valeur, ce qui donne

$$10 + 5 - 8 = 5 + 2$$

$$7 = 7$$

Le membre de gauche et le membre de droite valent respectivement 7. On peut donc affirmer que $x + 5 - y = z + 2$ est une espression vraie pour les valeurs des variables données.

b) $12 - x + 4 + y \stackrel{?}{=} 25 - x + 1$ si $x = 5$ et $y = 9$

$$12 - 5 + 4 + 9 = 25 - 5 + 1$$

$$20 \neq 21$$

Le membre de gauche vaut 20 et celui de droite vaut 21. Ils ne sont donc pas égaux entre eux et $12 - x + 4 + y = 25 - x + 1$ n'est pas une expresssion vraie pour les valeurs des variables données.

Exercices de l'activité 1.1

1.3 a) Traduire la situation suivante en équation. Utilisez la lettre « C » comme variable et ajoutez des indices distinctifs.

Le coût d'un voyage dépend du coût du transport, de l'hébergement, des repas et des activités réalisées.

____

b) Combien y a-t-il de variables dans l'équation ?

____

____

c) Est-ce que cette équation est valable pour différentes destinations de voyage ?

____

1.4 Pour chacune des expressions mathématiques suivantes, indiquez si c'est une expression algébrique ou une équation.

a) $3x + 2y = 6 + 4z + q$ ______________________________

b) $2x$ ______________________________

c) $-8z - 9 + 4w$ ______________________________

d) $\mathrm{C}x = \mathrm{CA} + \mathrm{CB} + \mathrm{CC} + \mathrm{CD} + \mathrm{CE}$ ______________________________

e) $3ab + z$ ______________________________

1.5 Traduire chaque énoncé en une équation.

a) Coût = Prix indiqué + Taxe fédérale sur les produits et services + Taxe de vente provinciale

____

b) Taxe fédérale sur les produits et services = Prix indiqué multiplié par 5 %

____

c) Prix net = Prix indiqué – Rabais + Taxe fédérale + Taxe provinciale

____

1.6 Qui suis-je ?

a) Je suis une lettre qui peut prendre plusieurs valeurs.

____

b) Je suis formée d'un membre de gauche séparé d'un membre de droite par un signe d'égalité.

____

c) Je suis une relation entre deux quantités de même valeur.

____

1.7 En utilisant les valeurs données pour chacune des variables, déterminez à l'aide de calculs lesquelles, parmi les équations suivantes sont des expressions vraies.

a) $x - y + 2 = x + 1$ Valeurs : $x = 3$; $y = 1$

b) $2x + \mathrm{y} - 2 = 3y - 6$ Valeurs : $x = -4$; $y = -2$

c) $3x - 15 = 5y - (x - 3)$ Valeurs : $x = 2$; $y = -2$

d) $2x - 3y + 4 = 3(2y + 1)$ Valeurs : $x = -2$; $y = -1$

1.8 Calculez le coût de l'hébergement pour un séjour de deux semaines pour quatre personnes dans un motel de Charlevoix. Le coût d'hébergement pour six personnes est de 1086,00 $ la première semaine et de 1325,00 $ la deuxième semaine. Des rabais, respectivement de 73,00 $ et de 105,00 $ pour les deux semaines, s'appliquent pour un groupe de quatre personnes.

a) Écrivez une équation traduisant cette situation en utilisant la lettre « H » accompagnée d'un indice distinctif.

b) À l'aide de l'équation, calculez le coût de l'hébergement.

Figure 1.3

Activité 1.2 – L'auberge

But

- Isoler une variable dans une équation.
- Déterminer la valeur d'une variable dans une équation.
- Maîtriser les notions de coefficient numérique, de constante, de régularité et d'invariant.
- Représenter une situation de la vie courante à l'aide d'un modèle algébrique.
- Résoudre des équations.

Vous avez maintenant une idée des coûts de location d'une maison meublée et d'un centre de vacances pour un séjour dans les îles de la Madeleine. Une troisième option, l'hébergement en auberge, est aussi une possibilité. Voyons les tarifs…

Retour sur les coûts de l'hébergement l'été dernier

Un ami qui a séjourné l'été dernier à l'Auberge aux Mouettes des îles de la Madeleine mentionne que le prix de l'hébergement pour quatre personnes était de 1150,00 $ par semaine, petit déjeuner inclus, après un rabais de 130,00 $ accordé aux membres de leur club de voyages. Ceux qui ne sont pas membres ne peuvent bénéficier du rabais et doivent payer le prix courant.

Écrivez une phrase représentant, en mots, le prix de l'hébergement pour un membre du club de voyages.

Figure 1.4

La formule écrite devrait ressembler à la suivante :

« Le prix de l'hébergement égale le prix courant moins le rabais. »

Écrivez maintenant une équation à l'aide de variables, « P » représentant le prix.

Votre équation devrait ressembler à celle-ci. Notez les indices distinctifs du prix de l'hébergement et du prix courant, car chacun a la même lettre « P ».

$P_h = P_C - R$

Déterminons maintenant le prix courant d'un séjour d'une semaine à cette auberge.

Dans l'activité précédente vous avez vu que, pour calculer la valeur d'une variable, celle-ci doit toujours se situer dans le membre gauche d'une l'équation.

Dans notre équation, $P_h = P_c - R$, la variable recherchée P_c se trouve dans le membre droit de l'équation. Il faut donc la transférer à gauche du signe d'égalité et l'isoler. La variable doit toujours être complètement seule, à gauche du symbole =, pour qu'on puisse déterminer sa valeur. Voyons comment procéder…

À retenir

Intervertir les deux membres d'une équation ne change pas cette équation.

Exemples : $7 = y$ devient $y = 7$

$9 - 6 = x$ devient $x = 9 - 6$

$W + Z = Q$ (si Q est la variable) devient $Q = W + Z$

À la lumière de cet énoncé, appliquez cette règle à l'équation $P_h = P_c - R$.

Sans doute avez-vous écrit :

$P_c - R = P_h$

Remarquez toutefois que la valeur de la variable recherchée P_C n'est pas encore complètement isolée dans le membre de gauche. La variable R qui l'accompagne doit maintenant disparaître du membre gauche de l'équation. Voici comment procéder…

Figure 1.5

À retenir

Additionner, dans chaque membre d'une équation, un terme identique ne change pas l'équation.

Exemples :

1) Soit l'équation $z - 4 = 10$ dans laquelle nous devons éliminer le terme « – 4 » du membre gauche de l'équation afin que la variable z soit complètement isolée. Pour faire disparaître le « – 4 » on additionne son inverse « + 4 » dans chaque membre de l'équation. On obtient donc ceci :

$$z - 4 + 4 = 10 + 4$$

$$z + 0 = 14$$

$$z = 14$$

La valeur de la variable Z est donc 14.

2) Soit l'équation $z - w = Q$. Pour isoler la variable z, il faut éliminer « $-w$ » et additionner « $+w$ » dans chaque membre. On obtient donc ceci :

$$z - w + w = q + w$$

$$z + 0 = q + w$$

$$z = q + w$$

Vous pouvez maintenant isoler P_c, dans l'équation $P_c - R = P_h$, en ajoutant le terme « R » dans chaque membre de l'équation.

Vous avez certainement obtenu ceci :

$P_c - R + R = P_h + R$

$P_c + 0 = P_h + R$

$P_c = P_h + R$

Voilà ! La variable P_C est à gauche et isolée.

Calculez maintenant le prix courant à l'Auberge des Mouettes.

Votre réponse devrait être celle-ci :

$P_C = P_h + R$

$P_C = 1150,00\ \$ + 130,00\ \$$

$P_C = 1280,00\ \$$

Si vous n'êtes pas convaincu par cette façon de faire, observez la figure suivante :

Figure 1.6 Ajouter 1 cube sur chaque plateau maintient la balance en équilibre.

Pourrait-on procéder de la même façon avec l'opération de soustraction ? Voyons voir…

Vous voyez sur Internet que le prix de l'Auberge aux Mouettes a augmenté par rapport au tarif de l'an dernier. Il en coûte maintenant 1225,00 $ pour une semaine.

Écrivez une équation représentant le nouveau prix par rapport à la nouvelle augmentation et au prix courant de l'an dernier.

Votre réponse devrait ressembler à ceci :

$P_N = A + P_C$ où P_N = nouveau prix, P_C = prix courant de l'an dernier et A = augmentation.

Maintenant, calculons la valeur de l'augmentation.

Posons : $P_N = A + P_C$

$A + P_C = P_N$	Inversons le membre de gauche et le membre de droite.
$A + P_C - P_C = P_N - P_C$	Soustrayons la variable P_C dans chacun des membres de l'équation.
$A = P_N - P_C$	On obtient la variable A isolée.
$A = 1225,00\ \$ - 1150,00\ \$$	On peut maintenant faire les calculs.
$A = 75,00\ \$$	

Donc, soustraire un même terme de chaque membre d'une équation ne change pas l'équation.

Figure 1.7 Enlever 1 cube de chaque plateau maintient la balance en équilibre.

Isolez la variable dans le membre de gauche et calculez sa valeur.

a) $9 + x = -12$ ____

b) $-8 = 10 + y$ ____

c) $-0{,}35 = x - 0{,}25$ ____________________________________

d) $80 = z + 12$ ____

Si vous avez trouvé les réponses suivantes, félicitations !

a) $9 - 9 + x = -12 - 9$

$0 + x = -21$

$x = -21$

b) $10 + y = -8$

$10 - 10 + y = -8 - 10$

$y = -18$

c) $x - 0{,}25 = -0{,}35$

$x - 0{,}25 + 0{,}25 = -0{,}35 + 0{,}25$

$x = -0{,}10$

d) $z + 12 = 80$

$z + 12 - 12 = 80 - 12$

$z = 68$

Traduisez les énoncés suivants en équations et calculez la valeur de la variable « y ».

a) –13 ajouté à y égale 20. ______

______

b) 5 enlevé à y égale –15. ______

______

c) 50 ajouté à y égale –100. ______

______

d) (–20) enlevé à y égale 25. ______

______

Voici les résultats.

a) $y + (-13) = 20$

$y + (-13) + 13 = 20 + 13$

$y + 0 = 33$

$y = 33$

b) $y - 5 = -15$

$y - 5 + 5 = -15 + 5$

$y + 0 = -10$

$y = -10$

c) $y + 50 = -100$

$y + 50 - 50 = -100 - 50$

$y + 0 = -150$

$y = -150$

d) $y - (-20) = 25$

$y + 20 = 25$

$y + 20 - 20 = 25 - 20$

$y + 0 = 5$

$y = 5$

Pour chacune des quatre équations précédentes, faites la preuve en substituant la valeur trouvée dans l'équation et en vérifiant si le membre de gauche a bien la même valeur que le membre de droite.

a) ______

______

b) ______

______

c) ______

______

d) ______

______

Vous devriez avoir écrit ce qui suit. C'est une précaution à prendre après la résolution d'une équation, quelle qu'elle soit !

a) $y + (-13) = 20$

$33 + (-13) = 20$

$20 = 20$

b) $y - 5 = -5$

$-10 - 5 = -5$

$-15 = -15$

c) $y + 50 = -100$

$-150 + 50 = -100$

$-100 = -100$

d) $y - (-20) = 25$

$5 + 20 = 25$

$25 = 25$

Location dans une auberge

Vous consultez une brochure de O'Berges Désilets, une auberge charmante des îles de la Madeleine située au bord de la mer. C'est un bâtiment ancestral que l'on atteint en quittant la grande route et en empruntant un chemin étroit bordé de conifères. Le site est enchanteur, gage d'une quiétude assurée.

Voici les prix affichés dans la brochure.

Tableau 1.4 – Location d'une chambre (2 personnes)

Prix par jour	Saison
75,00 \$	Basse saison
80,00 \$	Moyenne saison
85,00 \$	Haute saison

Vous désirez calculer le coût de l'hébergement pour une semaine en haute saison. Rappelons qu'il y a quatre personnes; il faudra donc deux chambres. Représentez la situation en mots.

La formulation devrait ressembler à ceci :

Le coût total égale le nombre de jours multiplié par le nombre de chambres multiplié par le coût quotidien d'une chambre.

Utilisez les lettres C et N pour les variables, ajoutez des indices distinctifs et construisez une équation représentant la situation.

L'équation devrait ressembler à celle-ci.

$C_h = C_q \times N_j \times N_c$ où C_h signifie le coût de l'hébergement, C_q le coût quotidien d'une chambre, N_j le nombre de jours et N_c le nombre de chambres. Avez-vous interverti les variables dans le membre droit de l'équation ? Cela ne modifiera pas votre résultat final puisque la multiplication est commutative.

En remplaçant la valeur des variables connues dans l'équation, calculez le coût de location pour une semaine en haute saison.

En remplaçant les variables par leur valeur respective, on obtient :

$C_h = C_q \times N_j \times N_c$

$C_h = 85{,}00\ \$ \times 7$ jours $\times\ 2$ chambres

$C_h = 1190{,}00\ \$$

Voici d'autres façons d'écrire l'équation en changeant l'ordre des variables. Remplacez les variables connues dans n'importe laquelle des équations suivantes et vous obtiendrez 1190,00 $.

$C_h = N_j \times N_c \times C_q$, ou $C_h = N_c \times N_j \times C_q$, ou $C_h = N_c \times C_q \times N_j$, ou $C_h = N_j \times C_q \times N_c$, ou $C_h = C_q \times N_c \times N_j$

Rappel

La commutativité, c'est quoi?

C'est la propriété d'une opération selon laquelle les termes peuvent être intervertis sans pour autant modifier le résultat de l'opération.

L'addition et la multiplication sont des opérations commutatives.

$5 + 6 + 7 = 7 + 6 + 5$	$5 \times 4 \times 3 = 3 \times 4 \times 5$
$18 = 18$	$60 = 60$

La soustraction et la division ne sont pas des opérations commutatives.

$2 - 3$ est différent de $3 - 2$ et $10 \div 2$ est différent de $2 \div 10$

$2 - 3 = -1$ et $3 - 2 = 1$; $\quad 10 \div 2 = 5$ et $2 \div 10 = \frac{1}{5}$

Calculez le coût de location de trois chambres pendant quatre semaines en moyenne saison.

$C_h = C_q \times N_j \times N_c$

$C_h = 80{,}00\ \$ \times 28 \times 3$

$C_h = 6720{,}00\ \$$

L'équation ci-dessus est dite générale, car on peut l'appliquer pour différentes vacances en variant le nombre de chambres et de jours selon la saison d'occupation.

Vous avez choisi l'auberge O'Berges Désilets. Au moment de confirmer votre réservation, on vous informe qu'il n'y a aucune chambre disponible la deuxième semaine. Après quelques recherches, vous trouvez dans le même secteur deux autres auberges qui ont des chambres libres. Avant d'établir votre choix final, vous décidez d'analyser d'un peu plus près les possibilités qui s'offrent maintenant à vous.

Tableau 1.5 – Location d'une chambre (2 personnes)

Prix par chambre	Auberge
85,00 $ par jour	O'Berges Désilets
90,00 $ par jour	Auberge Aquabelle
600,00 $ par semaine	Auberge Beau Soleil

Tableau 1.6 – Six options de location pour une période de deux semaines

1	O'Berges Désilets la première semaine et Aquabelle la deuxième
2	O'Berges Désilets la première semaine et Beau Soleil la deuxième
3	Aquabelle les deux semaines
4	Beau Soleil les deux semaines
5	Aquabelle la première semaine et Beau Soleil la deuxième
6	Beau Soleil la première semaine et Aquabelle la deuxième

Pour chacune des options, déterminez le coût de location d'une chambre pour une période de deux semaines. Écrivez d'abord l'équation en utilisant la lettre C pour les trois variables avec un indice distinctif pour chacune.

Votre équation devrait ressembler à celle-ci.

$C_c = C_1 + C_2$, où la variable C_c signifie le coût d'une chambre, C_1 le coût de la première semaine et C_2 le coût de la deuxième semaine.

À l'aide de l'équation, calculez le coût d'une chambre pour une période de deux semaines si vous optez pour l'option numéro 1.

Avez-vous trouvé ce qui suit ?

$C_c = C_1 + C_2$

$C_c = (7 \times 85{,}00\ \$) + (7 \times 90{,}00\ \$)$

$C_c = 595{,}00\ \$ + 630{,}00\ \$$

$C_c = 1225{,}00\ \$$

À retenir

Usage des parenthèses

Lorsque la valeur d'une variable provient d'un calcul de 2 valeurs et plus, placez-les entre parenthèses afin d'éviter des erreurs de calcul.

Procédez de cette façon pour effectuer le calcul de location relatif aux autres options. Remplissez le tableau ci-dessous.

Tableau 1.7 – Coût d'une chambre pour une période de deux semaines

Options	$C_c = C_1 + C_2$
1	$C_c = (7 \times 85{,}00\ \$) + (7 \times 90{,}00\ \$) = 595{,}00\ \$ + 630{,}00\ \$ = 1225{,}00\ \$$
2	
3	
4	
5	
6	

Comparez vos résultats à ceux du tableau suivant.

Tableau 1.8 – Coût d'une chambre pour une période de deux semaines

Options	$C_c = C1 + C2$
1	$C_c = (7 \times 85{,}00\ \$) + (7 \times 90{,}00\ \$) = 595{,}00\ \$ + 630{,}00\ \$ = 1225{,}00\ \$$
2	$C_c = (7 \times 85{,}00\ \$) + 600{,}00\ \$ = 595{,}00\ \$ + 600{,}00\ \$ = 1195{,}00\ \$$
3	$C_c = (7 \times 90{,}00\ \$) + (7 \times 90{,}00\ \$) = 630{,}00\ \$ + 630{,}00\ \$ = 1260{,}00\ \$$
4	$C_c = 600{,}00\ \$ + 600{,}00\ \$ = 1200{,}00\ \$$
5	$C_c = (7 \times 90{,}00\ \$) + 600{,}00\ \$ = 630{,}00\ \$ + 600{,}00\ \$ = 1230{,}00\ \$$
6	$C_c = 600{,}00\ \$ + (7 \times 90{,}00\ \$) = 600{,}00\ \$ + 630{,}00\ \$ = 1230{,}00\ \$$

Connaissant le coût d'une chambre pour une période de deux semaines, il serait désormais possible de calculer le coût total pour deux, trois, quatre chambres ou plus pour la même période.

En représentant le coût total de location par la variable C_t, écrivez une équation générale exprimant la location de deux chambres pour une période de deux semaines.

Si vous avez trouvé ce qui suit, bravo !

$C_t = 2 \times C_c$ ou simplement $C_t = 2C_c$.

À l'aide de l'équation précédente, calculez le coût total de location de cinq chambres pour une période de deux semaines appliquée à l'option 5. Écrivez d'abord l'équation.

Votre calcul devrait ressembler à ceci :

$C_t = 5C_c$

$C_t = 5 \times 1230{,}00\ \$$

$C_t = 6150{,}00\ \$$

Coefficient

Dans l'équation $C_t = 5C_c$, le nombre 5 représente ce qu'il est convenu d'appeler, en algèbre, un coefficient numérique. Un coefficient a un effet multiplicateur sur la variable. Il est toujours placé devant la variable.

À retenir

Et si le coefficient vaut 1 ?

Dans l'équation, $x + y + z = 8$, remarquez qu'il n'y a pas de coefficient exprimé devant chacune des variables. Est-ce parce qu'il n'y en a pas ? Non ! Il est sous-entendu, c'est-à-dire que l'on ne l'écrit pas, et sa valeur est de 1. Ainsi l'équation $x + y + z = 8$ correspond à $\mathbf{1}x + \mathbf{1}y + \mathbf{1}z = 8$.

Pour se familiariser avec l'écriture algébrique, il faut savoir qu'un coefficient numérique, placé devant une variable, implique que le signe de multiplication est présent mais sous-entendu et, de ce fait, on ne l'écrira pas. Par exemple, on écrira $2x$ plutôt que $2 \times x$. Il est à noter qu'on ne laisse pas d'espace entre le coefficient 2 et la variable x.

Observez les équations suivantes :

a) $2x + 5y = 7$; les nombres 2 et 5 sont des coefficients.

b) $-8z + \frac{3}{4}w = -10$; les nombres -8 et $\frac{3}{4}$ sont des coefficients.

c) $4y - 0{,}8x + 0{,}50 = 12{,}5$; les nombres 4 et $-0{,}8$ sont des coefficients.

Constante

Les nombres d'une équation qui ne sont pas accompagnés d'une variable sont appelés des constantes.

Si l'on reprend les équations précédentes :

a) $2x + 5y = 7$; le nombre 7 est une constante.

b) $-8z + \frac{3}{4}w = -10$; le nombre -10 est une constante.

c) $4y - 0{,}8x + 0{,}50 = 12{,}5$; les nombres 0,50 et 12,5 sont des constantes.

Trouvez la valeur de la variable.

Dans l'équation $x + 5y = 7$, quelle valeur doit-on donner à « x » sachant que $y = 1$?

Il s'agit de déterminer une valeur de « x » qui ferait en sorte que le membre de gauche ait la même valeur que le membre de droite. Pour ce faire, on doit remplacer la variable y de l'équation par sa valeur connue, soit 1, puis isoler la variable « x » et calculer sa valeur. Ce qui donne ceci :

$x + 5y = 7$

$x + (5 \times 1) = 7$

$x + 5 = 7$

$x + 5 - 5 = 7 - 5$

$x = 2$

On peut vérifier la réponse en faisant la preuve :

$2 + (5 \times 1) = 7$

$2 + 5 = 7$

$7 = 7$

Donc, il s'avère que si la variable x prend la valeur 2 et y la valeur 1, l'équation devient une expérience vraie puisque la valeur du membre de gauche est égale à la valeur du membre de droite.

Dans l'équation $z + \frac{3}{4}w = 10$, quelle valeur doit-on donner à « z », sachant que $w = 8$?

Dans l'équation $y - 0{,}8x + 0{,}50 = 12{,}5$, quelle valeur doit-on donner à « y », sachant que $x = -5$?

Avez-vous obtenu les résultats suivant ?

$z + \frac{3}{4}w = 10$

$z + (\frac{3}{4} \times 8) = 10$

$z + 6 = 10$

$z + 6 - 6 = 10 - 6$

$z = 4$

$y - 0{,}8x + 0{,}50 = 12{,}5$

$y - 0{,}8x + 0{,}50 - 0{,}50 = 12{,}5 - 0{,}50$

$y - 0{,}8x = 12$

$y - (0{,}8 \times -5) = 12$

$y - (-4) = 12$

$y + 4 = 12$

$y + 4 - 4 = 12 - 4$

$y = 8$

Voyons maintenant comment résoudre une équation dont la variable est affectée d'un coefficient différent de 1.

Trouvez la valeur de la variable « x » dans l'équation suivante : $2x + 6 = 20$.

La première étape est bien sûr d'isoler le terme qui contient la variable « x ».

$2x + 6 - 6 = 20 - 6$

$2x = 14$

Maintenant, il faut faire disparaître le coefficient 2 devant la variable « x ».

On sait que l'opération mathématique entre le 2 et le « x » est une multiplication.

Soit $2 \times x = 14$.

Pour faire disparaître le coefficient 2, il faut faire l'opération inverse, soit diviser par 2 les deux membres de l'équation ou multiplier par $\frac{1}{2}$.

$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$

$1\,x = 7$

$x = 7$

Trouvez la valeur de « x » dans l'équation suivante :

$3x + 4 = 16$

Vous devriez avoir obtenu ceci :

$$3x + 4 - 4 = 16 - 4$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

3 3

$$1x = 4$$

$$x = 4$$

À retenir

Pour **résoudre une équation** à une variable, on isole la variable dans le membre de gauche de l'équation.

Pour **isoler une variable** dans une équation on peut :

- Additionner ou soustraire une même quantité à chaque membre de l'équation.
- Multiplier ou diviser par une même quantité chaque membre de l'équation.

Exercices de l'activité 1.2

1.9 Isolez la variable et calculez sa valeur.

a) $R_1 - 4 = -24$

b) $-5 = 10 + C$

c) $-0{,}35 = w + 0{,}65$

d) $-600 = z - 590$

e) $C - R + 6 = P_t - 10$. Isolez le terme P_t si C=8 et R=2.

1.10 Traduisez les énoncés suivants en équation et calculez la valeur du nombre inconnu. Utilisez la variable « w ».

a) –15 ajouté à un nombre inconnu égale –25 ?

b) –5 soustrait d'un nombre inconnu égale –15 ?

c) 30 ajouté à un nombre inconnu égale –90 ?

d) –10 soustrait d'un nombre inconnu égale 18 ?

e) –100 ajouté à un nombre inconnu égale 100 ?

1.11 Quelle valeur doit-on donner à la variable « x » dans les équations suivantes pour qu'elle devienne une expression vraie? Faites aussi la preuve.

a) $4x - 3y = -10$, sachant que $y = -2$

b) $-3x + \frac{2}{5}z = 4$, sachant que $z = 15$

c) $4x - 0{,}20w + 8{,}50 = 6{,}50$, sachant que $w = -1$

1.12 Dans les équations suivantes, quel est le coefficient de la variable « x » ?

a) $3y + x = 10$ ____________________

b) $0{,}6x + 9 = 11{,}2$ ____________________

c) $y + \frac{1}{2}x + 5 = 12$ ____________________

d) $24 - 3x = 9$ ____________________

1.13 Trois amis décident de passer leurs vacances dans la région de l'Abitibi pour une période de deux semaines. Afin de réduire les dépenses, ils optent pour la location d'une maison meublée où ils pourront à loisir cuisiner les repas chacun leur tour. La location est répartie comme suit : une semaine en moyenne saison et l'autre en haute saison. Les prix sont fixés sur une base d'occupation de six personnes. Comme ils sont seulement trois personnes, le propriétaire leur accorde un rabais pour la semaine en moyenne saison et un rabais différent pour la semaine en haute saison.

Utilisez la variable « X » pour représenter les coûts et la variable « R » pour les rabais. Associez un indice aux variables au besoin.

a) Écrivez une équation représentant le coût total de location de la maison.

b) Réécrivez l'équation de manière à isoler la variable relative au coût de la première semaine.

c) Isolez maintenant la variable relative au coût de la deuxième semaine.

d) Écrivez une équation qui correspond au rabais total en utilisant la lettre « R » et un indice.

e) Reprenez votre réponse de a) et réécrivez votre équation en utilisant la variable du rabais total.

f) Le groupe d'amis décide de prolonger leur séjour d'une semaine en haute saison. Écrivez l'équation correspondant au coût de leur séjour.

g) En moyenne saison, le tarif de location de la maison est de 1264,00 $ par semaine et, en haute saison, il est de 1648,00 $. Un rabais respectif de 224,00 $ et de 338,00 $ est accordé pour les groupes de quatre personnes et moins. Calculez le coût d'hébergement durant ces deux semaines.

1.14 Gilles effectue une réservation de quatre chambres au gîte Le Chagrin Doré dans la région de la Mauricie, pour un séjour de cinq jours, la première semaine, et de six jours, deux semaines plus tard. Le tarif de location est de 98,00 $ par jour, taxes incluses.

a) Écrivez une équation générale pour le coût de location, peu importe le nombre de jours et de chambres. Utilisez les lettres « C » pour le coût total, « T » pour le tarif quotidien, « J » pour le nombre de jours et « N » pour le nombre de chambres. Au besoin, utilisez des indices.

b) À l'aide de l'équation, calculez le coût total de l'hébergement.

Figure 1.8

Un peu plus loin

1.15 Un magasin annonce un solde d'été. Toutes les paires de souliers à 100,00 \$ sont réduits de 25,00 \$ et tous les jeans à 80,00 \$ sont réduits de 30,00 \$.

a) Écrivez une équation générale représentant l'achat d'une paire de souliers et d'un jeans avant rabais. Utilisez les lettres « C » pour le coût total, « S » et « J » respectivement pour le coût d'une paire de souliers et d'un jeans avant rabais, « T_f » pour la TPS (taxe fédérale) et « T_p » pour la TVQ (taxe provinciale).

b) On calcule la T_f en premier lieu. Écrivez une équation pour calculer cette taxe, sachant qu'elle est de 5 %. (5 % = $\frac{5}{100}$ = 0,05).

c) Substituez l'équation obtenue en b) dans l'équation a).

d) On calcule la T_p en deuxième lieu.

Écrivez une équation pour calculer cette taxe, sachant qu'elle est de 9,75 % (0,0975).

e) Substituez l'équation obtenue en d) dans l'équation c) en ne conservant que les variables C, S et J.

f) Écrivez l'équation du coût total qui inclut le rabais « R_s » des souliers et le rabais « R_j » du jeans et des taxes.

g) À supposer que Gilles achète trois paires de souliers et deux jeans, réécrivez l'équation en f) en y insérant au bon endroit ces nombres à titre de coefficients.

h) Vous êtes maintenant en mesure de calculer le coût total des achats de Gilles. Allez-y !

Exercices d'intégration

1.16 Le tableau suivant présente la tarification des divers services de communication offerts par l'entreprise Blablabla inc.

Service mensuel	Coût des premiers mois	Durée (mois)	Coût mensuel pour le reste de l'année
Téléphone	9,95 $	6	15,95 $
Câblodistribution	19,50 $	3	24,95 $
Portable	28,50 $	4	32,95 $

a) Écrivez une équation représentant le coût total annuel de ces différents services. Utilisez les lettres « C_t » pour le coût annuel total, « T » pour le téléphone, « C » pour la câblodistribution, « P » pour le téléphone portable et « D » pour la durée. Au besoin, utilisez des indices distinctifs.

b) Calculez le coût annuel de cet abonnement en remplaçant les variables par leur valeur avant les taxes.

1.17 Gisèle désire calculer la quantité d'énergie en kilojoules (kJ) contenue dans les aliments de son dîner. Elle a dans son assiette une galette de veau haché équivalant à 1100 kJ, une portion de brocoli de 200 kJ et du riz aux légumes. Le total des kilojoules s'élève à 2000 kJ.

Note : 1 calorie alimentaire = 4,18 kJ

a) Écrivez l'équation représentant le nombre total de kilojoules. Utilisez la lettre « J » pour toutes les variables.

b) Isolez la variable correspondant aux kilojoules de la portion de riz.

c) Calculez le nombre de kilojoules de la portion de riz.

1.18 Patrice parcourt la distance de 6 km à pied, puis 40 km en train et le reste du trajet en auto. Sachant que la longueur du trajet total qu'il a à parcourir est de 126 km, quelle distance a-t-il parcourue en auto ?

a) Écrivez l'équation représentant la distance totale à parcourir. Utilisez la lettre « d » accompagnée d'indices distinctifs pour toutes les variables.

b) Isolez la variable correspondant à la distance parcourue en auto.

c) Calculez la distance parcourue en auto.

1.19 Mylène a en sa possession 42 pièces de 5 cents, 15 pièces de 10 cents et un certain nombre de pièces de 25 cents.

a) Écrivez une équation représentant le montant total d'argent de Mylène. Utilisez la variable « M » pour le montant total et la variable x pour les pièces de 0,25 $.

b) Combien de pièces de 25 cents Mylène a-t-elle en sa possession sachant que le montant total est de 6,60 $?

Figure 1.9

1.20 Isolez la variable et calculez sa valeur.

a) $T - 24 = -24$

b) $-8 = 8 + Q$

c) $-1{,}65 = Z + 0{,}65$

d) $Z_u - P_k + 19 = B_f + 19$. Isolez le terme B_f.

1.21 Traduisez les énoncés suivants sous forme d'équations et calculez la valeur de la variable « y ».

a) -10 ajouté à un nombre y égale 25 ?

b) -8 soustrait d'un nombre y égale -18?

c) -10 soustrait d'un nombre y égale 10?

d) -1 ajouté à un nombre y égale -1 ?

1.22 Quelle valeur doit-on donner à la variable « y » dans les équations suivantes ? Faites aussi la preuve.

a) $5y - 3X = -12$, sachant que $X = -1$

b) $-2Z + \frac{5}{8}y = 5$, sachant que $Z = -2$

c) $8T - 0{,}20y + 8{,}50 = 6{,}50$, sachant que $T = -1$

1.23 Dans les équations précédentes, quel est le coefficient de X, Z et T ?

Activité synthèse

La famille de quatre personnes planifie se rendre aux îles de la Madeleine pour un séjour de deux semaines; la dernière semaines de juin et la première de juillet. Elle a prévu un montant de 5000,00 $ pour les dépenses. Les dépenses considérées sont l'hébergement, les repas, les activités et le transport.

1.24 a) Écrivez une équation représentant le coût total des dépenses. Utilisez la lettre « C » accompagnée d'un indice distinctif pour toutes les variables.

Utilisez les données des trois tableaux ci-dessous pour répondre aux questions b), c) et d).

Option 1	
Maison meublée Location par semaine	
Prix par semaine	Saison
800,00 $	Basse saison (octobre à mars)
925,00 $	Moyenne saison (avril-mai-juin)
975,00 $	Haute saison (juillet-août-septembre)

Option 2	
Centre de vacances Location d'une chambre (2 personnes)	
Prix par jour	Saison
75,00 $	Basse saison
80,00 $	Moyenne saison
85,00 $	Haute saison

Option 3	
Auberge Location d'une chambre (2 personnes)	
Prix par chambre	Auberge
85,00 $ par jour	O'Berges Désilets
90,00 $ par jour	Auberge Aquabelle
600,00 $ par semaine	Auberge Beau Soleil

b) Écrivez une équation représentant le coût total de location d'une maison meublée. Utilisez la lettre « C » pour toutes les variables avec un indice distinctif.

c) Écrivez une équation représentant le coût total de location dans une auberge. Il y a deux personnes par chambre. Utilisez les lettres C_h pour la variable « coût total », « N » pour le nombre de jours et de chambres et « P » pour le « prix ». Utilisez au besoin des indices distinctifs.

d) Écrivez trois équations représentant le montant d'argent restant pour chacune des options d'hébergement. Utilisez les lettres « M_R » pour la variable « montant restant », « C_M » pour « maison meublée », « C_V » pour « centre de vacances », « C_A » pour « auberge » et « B » pour « budget ».

e) Servez-vous des équations en d) pour remplir le tableau suivant. Substituez dans les équations les valeurs connues.

Option d'hébergement	Budget ($)	Coût de l'hébergement ($)	Montant restant ($)
Maison meublée			
Centre de vacances			
Auberge			

f) À quoi servira le montant d'argent restant ?

g) Écrivez trois équations représentant le montant restant pour chacune des options d'hébergement et des repas. Utilisez les lettres « R » pour les repas, « M_r » pour la variable « montant restant », « C_m » pour « maison meublée », « C_v » pour « centre de vacances », « C_a » pour « auberge » et « B » pour « budget ».

h) Servez-vous des équations en g) pour remplir le tableau suivant.

Substituez, dans les équations, la valeur des variables connues. Allouez un budget de 80,00 $ par jour pour les repas. Écrivez d'abord une équation relative aux repas où « R » représente le coût total, « C_q » le coût quotidien et « N » le nombre de jours.

Figure 1.10

Option d'hébergement	Budget ($)	Coût de l'hébergement ($)	Coût des repas ($)	Montant restant ($)
Maison meublée				
Centre de vacances				
Auberge				

i) À quoi servira le montant d'argent restant ?

____

____

Figure 1.11

Liste des nouveaux savoirs

- Transformation d'une situation mathématique, décrite avec des mots, en une équation algébrique.
- Représentation d'une variable par une lettre avec ou sans indice.
- Isolement de la variable dans le membre gauche d'une équation.
- Notion de coefficient dans une expression algébrique.
- Notion de constante dans une équation.
- Constitution d'une équation : membre gauche et membre droit.
- Égalité du membre gauche et du membre droit dans une équation.
- Commutativité de la multiplication et de l'addition.
- Évaluation d'une expression algébrique.
- Calcul de la valeur d'une variable dans une équation.
- L'addition et la soustraction d'une même quantité dans chaque membre d'une équation ne modifient pas cette équation.
- La multiplication ou la division, par une même quantité, de chaque membre d'une équation ne modifie pas cette équation.

Vous voilà arrivé à la fin de la première situation d'apprentissage. Vous avez acquis plusieurs nouvelles notions d'algèbre. L'algèbre est un langage symbolique utilisé pour l'écriture d'équations en mathématiques. En algèbre, des symboles et des lettres sont utilisés plutôt que des mots, ce qui rend le décodage de l'information plus rapide. En vous familiarisant avec les règles à respecter pour isoler une variable dans une équation vous deviendrez de plus en plus habile en algèbre.

Dans la prochaine situation d'apprentissage, une fois de plus autour du thème des vacances, il sera question des frais encourus pour le transport, ou encore lorsqu'on pratique diverses activités de plein air. Toujours en poursuivant l'approfondissement de l'algèbre, bien entendu…