MAT-5112-1

LOGIQUE

sofad

MAT-5112-1

LOGIQUE

SOFAD Société de formation à distance des commissions scolaires du Québec

Coordonnateur des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteur : Serge Dugas

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseure linguistique : Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

1re parution : 2009

Dépôt légal — 2009

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-89493-311-4

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

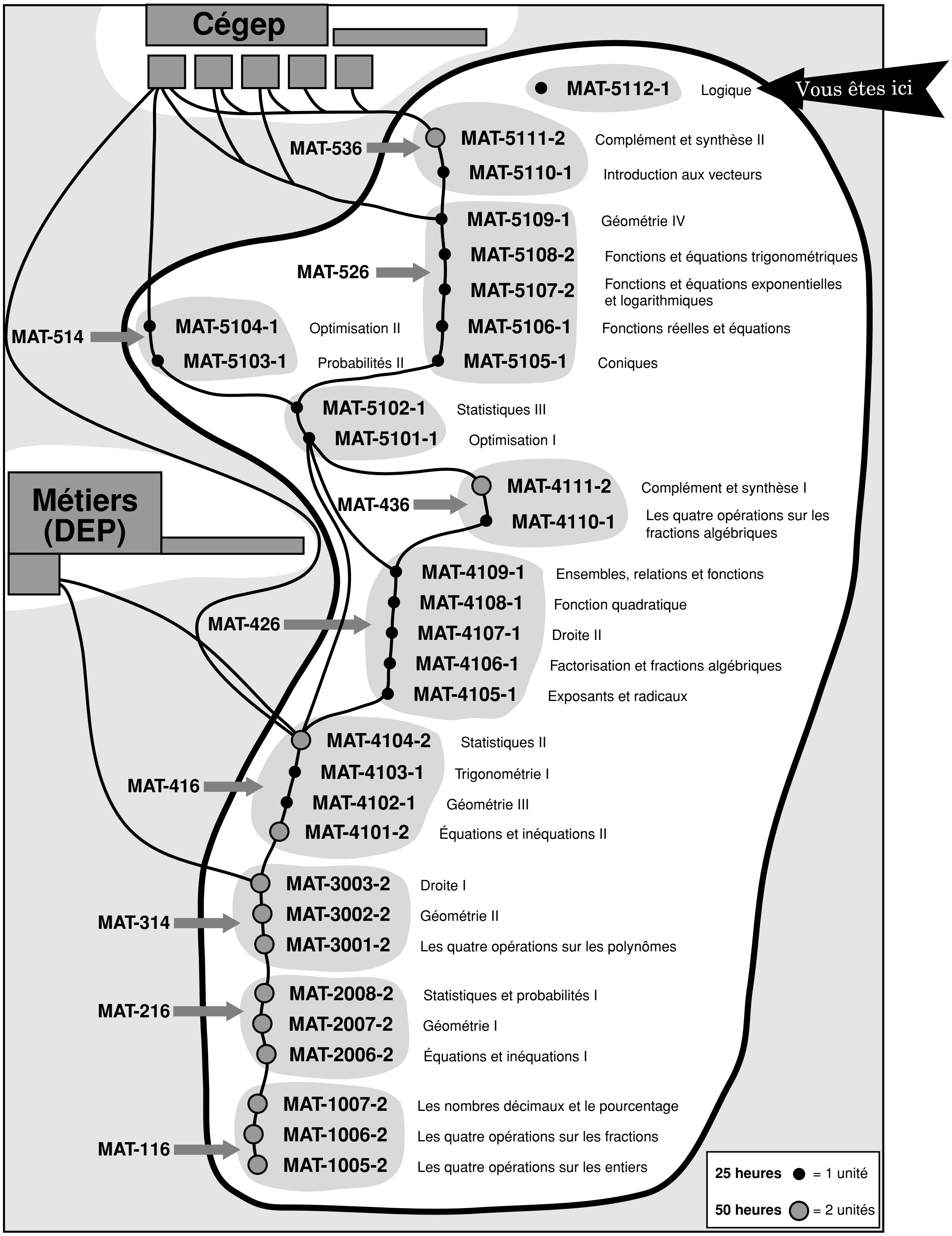
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

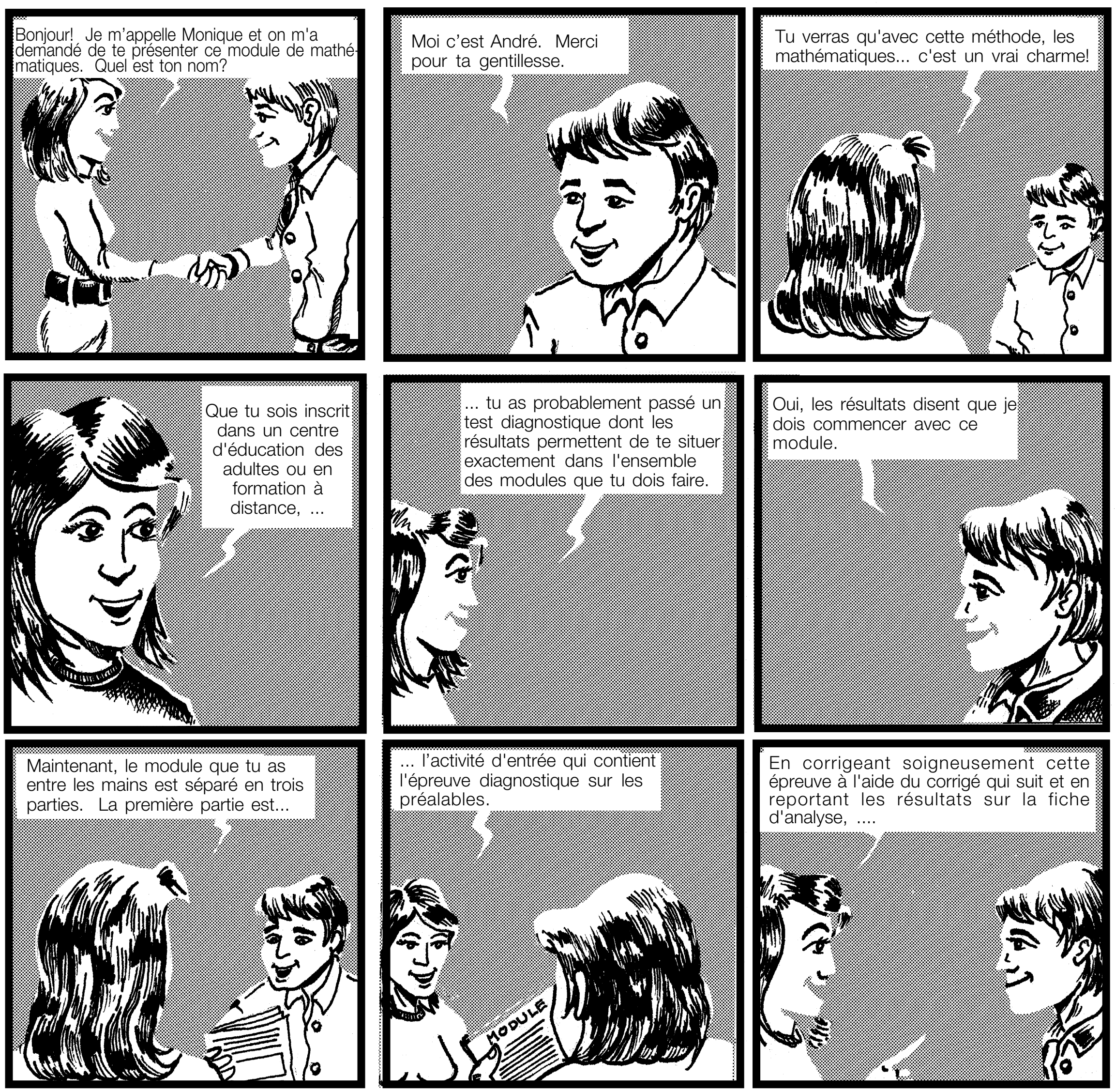
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

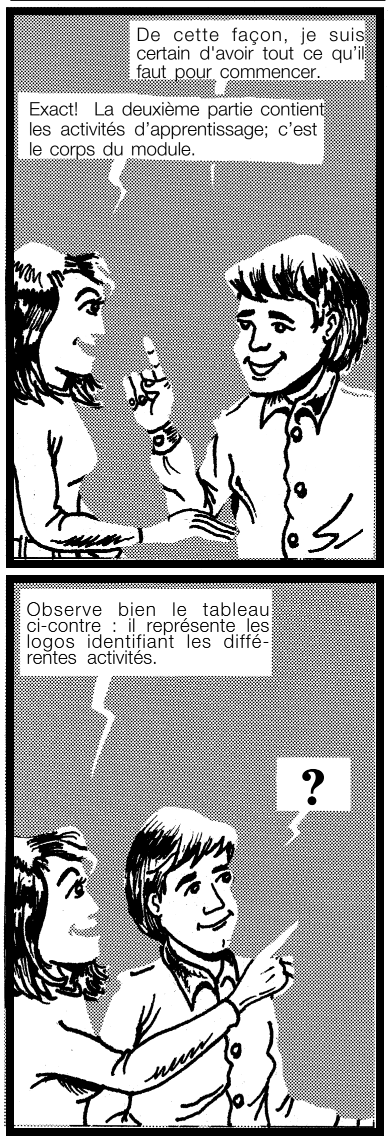
S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE





La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LOGIQUE

La logique (du grec *logos* signifiant raison) est dans une première approche l'étude des règles formelles que doit respecter toute déduction correcte. Elle est, depuis l'Antiquité, l'une des grandes disciplines de la philosophie avec l'éthique et la métaphysique. De plus, nous avons assisté durant le XXe siècle au développement fulgurant d'une approche mathématique et informatique de la logique. Elle trouve depuis le XXe siècle de nombreuses applications en ingénierie, en linguistique, en psychologie cognitive, en philosophie analytique et en communication.

La logique mathématique a donc repris l'objectif de la logique, soit étudier le raisonnement, mais en se restreignant au langage des mathématiques qui présente l'avantage d'être extrêmement normalisé.

Plus concrètement, dans ce module vous apprendrez à utiliser les quantificateurs logiques, à dresser la table de vérité d'une proposition composée et à en déterminer la valeur. Vous aurez à différencier une tautologie (toujours vraie) d'une contradiction (toujours fausse).

Vous serez appelé à vous pencher sur les notions d'implication logique et d'équivalence logique, à établir la négation d'une proposition composée et à décrire en extension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle composée.

Vous aurez ensuite à étudier les notions de quantificateur existentiel et universel.

Enfin, vous devrez établir la négation d'une forme propositionnelle composée et à calculer la valeur d'une forme propositionnelle composée.

Comme vous pouvez le constater, les objets d'étude sont nombreux, mais soyez assuré qu'ils sont très enrichissants.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5112-1 comporte 12 objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombre d'heures*	% (évaluation)
1 à **3**	4	15 %
4 à **6**	4	15 %
7	3	10 %
8 et **9**	6	30 %
10 à **12**	6	30 %

* Deux heures sont réservée à l'évaluation finale.

1. Détermination des propositions

   Déterminer, parmi une liste d'énoncés grammaticaux et d'énoncés mathématiques simples, ceux qui sont des propositions. Les énoncés présentés doivent être au nombre de cinq à dix.

2. Opérateurs logiques

   Étant donné une proposition exprimée sous forme d'énoncé grammatical ou d'énoncé mathématique, déterminer si cette proposition est négative, conjonctive, disjonctive (inclusive ou exclusive), conditionnelle ou biconditionnelle en se référant à l'opérateur logique qu'elle contient.

Transcrire ensuite cette proposition de façon que l'opérateur logique apparaisse sous l'une des formes symboliques suivantes :

- $\neg$ pour la négation (ne... pas),
- $\wedge$ pour la conjonction (et),
- $\vee$ pour la disjonction (ou),
- $\rightarrow$ pour la conditionnelle (si... alors),
- $\leftrightarrow$ pour la biconditionnelle (si et seulement si).

Les énoncés choisis doivent être simples.

3. Valeur de vérité d'une proposition composée

Connaissant la table de vérité de chaque type de proposition (négation, conjonction, disjonction, conditionnelle et biconditionnelle), déterminer la valeur de vérité d'une proposition composée d'au plus trois propositions simples dont la valeur de vérité de chacune est connue en respectant la priorité des opérateurs logiques. La proposition composée doit être présentée sous forme symbolique et doit comporter au plus trois opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

4. Tautologie et contradiction

Dresser la table de vérité d'une proposition composée d'au plus trois propositions simples et trois opérateurs logiques afin de déterminer si cette proposition est une tautologie (c'est-à-dire si celle-ci est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité attribuée à chacune de ses composantes) ou une contradiction (c'est-à-dire si celle-ci est toujours fausse quelle que soit la valeur de vérité attribuée à chacune de ses composantes). La proposition composée doit être présentée sous forme symbolique. Toutes les possibilités à envisager doivent être exposées dans la table de vérité. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

5. Implication logique (⇒)

   Étant donné deux propositions composées reliées par l'opérateur logique de la conditionnelle, dresser une table de vérité et déterminer si la conditionnelle est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité attribuée à chacune des propositions simples qu'elle comporte. Si tel est le cas, relier les deux propositions composées par le symbole de l'implication logique (⇒). Les propositions composées doivent être présentées sous forme symbolique et doivent comporter, pour chacune, au plus trois propositions simples et trois opérateurs logiques. Toutes les possibilités à envisager doivent être exposées dans la table de vérité. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

6. **Équivalence logique (⇔)**

   Étant donné deux propositions composées reliées par l'opérateur logique de la biconditionnelle, dresser une table de vérité et déterminer si la biconditionnelle est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité attribuée à chacune des propositions simples qu'elle comporte. Si tel est le cas, relier les deux propositions composées par le symbole de l'équivalence logique (⇔). Les propositions composées doivent être présentées sous forme symbolique et doivent comporter, pour chacune, au plus trois propositions simples et trois opérateurs logiques. Toutes les possibilités à envisager doivent être exposées dans la table de vérité. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

7. **Négation d'une proposition composée**

   Établir la négation d'une proposition composée présentée sous forme symbolique de façon que l'opérateur logique de la négation ne modifie plus que les propositions simples. Les propositions composées doivent comporter, pour chacune, au plus trois propositions simples et cinq opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème doivent être décrites.

8. Propositions et formes propositionnelles

   Déterminer, parmi une liste d'énoncés grammaticaux et d'énoncés mathématiques dont certains contiennent des variables, ceux qui sont des propositions et ceux qui sont des formes propositionnelles. Les énoncés présentés doivent être au nombre de cinq à dix.

9. **Ensemble-solution d'une forme propositionnelle**

   Étant donné un ensemble référentiel comportant de cinq à dix éléments, décrire en extension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle simple ou d'une forme propositionnelle composée de deux formes propositionnelles simples reliées par un opérateur logique. Dans ce dernier cas, l'ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles simples doit également être donné. Les formes propositionnelles doivent être exprimées en langage mathématique.

10. Quantificateur existentiel et quantificateur universel

    Étant donné une liste d'énoncés grammaticaux quantifiés, indiquer ceux qui contiennent un quantificateur existentiel et ceux qui contiennent un quantificateur universel. Transcrire ensuite ces énoncés de façon que le quantificateur apparaisse sous l'une des formes symboliques suivantes :

    - $\exists$ pour le quantificateur existentiel (Il existe au moins un ...),
    - $\exists!$ pour le quantificateur existentiel d'unicité (Il existe un seul ...),
    - $\forall$ pour le quantificateur universel (Pour tout ...).

    Les énoncés présentés doivent être au nombre de cinq à dix.

11. Négation d’une forme propositionnelle composée quantifiée

Établir la négation d’une forme propositionnelle composée quantifiée présentée sous forme d’énoncé grammatical, d’énoncé mathématique ou sous forme symbolique de façon que l’opérateur logique de la négation ne modifie plus que les formes propositionnelles simples. La forme propositionnelle composée doit comporter au plus trois formes propositionnelles simples et trois opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème doivent être décrites.

12. Valeur de vérité d’une forme propositionnelle composée quantifiée

Étant donné un ensemble référentiel comportant de cinq à dix éléments, déterminer la valeur de vérité d’une forme propositionnelle composée quantifiée en respectant la priorité des opérateurs logiques. La forme propositionnelle composée doit comporter au plus trois formes propositionnelles simples exprimées en langage mathématique et trois opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème ainsi que l’ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles sont exigés.

Ce module comportant 12 objectifs, nous avons regroupé leur étude comme dans le tableau ci-dessous.

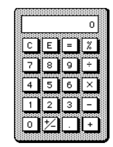
Sous-module	Objectif(s)	
1	Détermination des propositions Opérateurs logiques	1 2
2	**Valeur de vérité d'une proposition composée**	**3**
3	Tautologie et contradiction Implication logique	4 5
4	**Équivalence logique**	**6**
5	**Négation d'une proposition composée**	**7**
6	Propositions et formes propositionnelles **Ensemble-solution d'une forme propositionnelle**	8 **9**
7	Quantificateur existentiel et quantificateur universel Négation d'une forme propositionnelle composée quantifiée **Valeur de vérité d'une forme propositionnelle composée quantifiée**	10 11 **12**

Corrigé

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.



2° L'utilisation de la calculatrice est permise.

3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez les réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être acceptées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Énumérez :

   a) tous les nombres premiers inférieurs à 30. ....

   b) tous les facteurs ou diviseurs de 30. ....

   c) tous les multiples de 6. ....

   d) tous les diviseurs de 50. ....

   e) tous les nombres premiers pairs. ....

2. Résolvez les équations suivantes et vérifiez vos résultats.

   a) $4x + 8 = 40$ Vérification

   ....

   ....

   ....

   ....

   b) $6 - 3x = 12$ Vérification

   ....

   ....

   ....

   ....

c) $3x - 7 = 2x + 8$ Vérification

....

....

....

....

Corrigé

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

   b) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

   c) 0, 6, 12, 18, 24, 30, …

   d) 1, 2, 5, 10, 25, 50

   e) 2

2. a)

$4x + 8 = 40$	Vérification
$4x = 40 - 8$	$4x + 8 = 40$
$4x = 32$	$4(8) + 8 = 40$
$x = 8$	$32 + 8 = 40$
	$40 = 40$

   b)

$6 - 3x = 12$	Vérification
$-3x = 12 - 6$	$6 - 3x = 12$
$-3x = 6$	$6 - 3(-2) = 12$
$x = -2$	$6 + 6 = 12$
	$12 = 12$

   c)

$3x - 7 = 2x + 8$	Vérification
$3x - 2x = 8 + 7$	$3x - 7 = 2x + 8$
$x = 15$	$3(15) - 7 = 2(15) + 8$
	$45 - 7 = 30 + 8$
	$38 = 38$

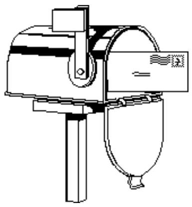
Corrigé

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			16.1	16.4	Sous-module 1
b)			16.1	16.4	Sous-module 1
c)			16.1	16.4	Sous-module 1
d)			16.1	16.4	Sous-module 1
e)			16.1	16.4	Sous-module 1
2. a)			16.2	16.11	Sous-module 1
b)			16.2	16.11	Sous-module 1
c)			16.2	16.11	Sous-module 1

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5112-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à votre tutrice ou à votre tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5112-1 comprend **trois** devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à la mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

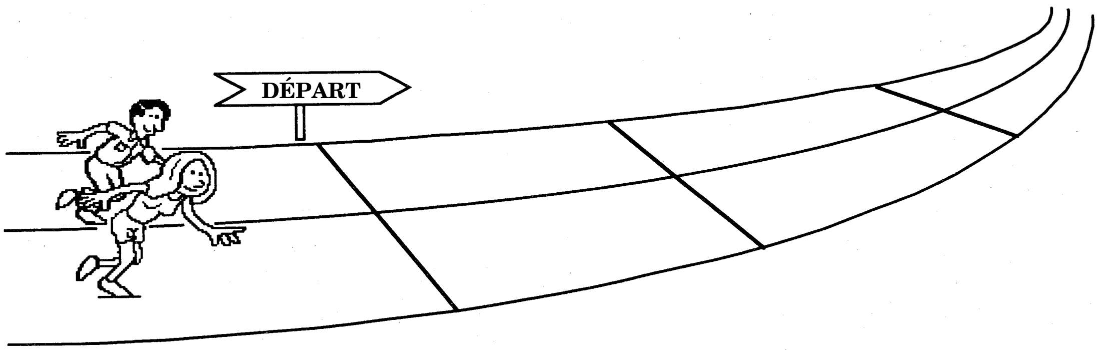
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, s'il y a lieu.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 4.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 5 à 7.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 7.

ATTESTATION D'ÉTUDES

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

PROPOSITIONS ET OPÉRATEURS LOGIQUES

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Géomardi!

Un nouveau jeu télévisé portant sur la géographie a, depuis quelques semaines, beaucoup de succès auprès des téléspectateurs. Les prix sont alléchants et les règles sont très simples : l'animateur, après avoir lu six énoncés, demande aux deux participants de dire lesquels sont vrais, lesquels sont faux. Pour corser un peu le jeu, l'animateur insère, parmi les affirmations, des énoncés que nous ne pouvons qualifier de vrais ou de faux.

Quelles auraient été vos réponses pour un des jeux du quiz de mardi dernier?

Énoncé	Vrai	Faux	???
1. Winnipeg est une ville canadienne.			
2. Québec est à l'ouest de Toronto.			
3. C'est le plus haut sommet du monde.			
4. La capitale de Cuba est La Havane.			
5. Il y a 60 États américains.			
6. Cette rivière coule en France.			

Il est facile de vérifier que les énoncés 1 et 4 sont vrais. Nous pouvons aussi affirmer que les énoncés 2 et 5 sont faux. L'énoncé 3 est vrai si nous parlons du mont Éverest, sinon il est faux. Nous ne pouvons donc affirmer que cet énoncé est vrai ou faux. Il en est de même de l'énoncé 6 : si nous parlons de la Seine, par exemple, l'énoncé est vrai, alors qu'il est faux si nous parlons du Richelieu.

Le tableau de vos réponses devrait ressembler à celui ci-dessous.

Énoncé	Vrai	Faux	???
1. Winnipeg est une ville canadienne.			
2. Québec est à l'ouest de Toronto.			
3. C'est le plus haut sommet du monde.			
4. La capitale de Cuba est La Havane.			
5. Il y a 60 États américains.			
6. Cette rivière coule en France.			

Un énoncé qui est soit vrai, soit faux mais non l'un ou l'autre s'appelle une ***proposition***. Les énoncés 1, 2, 4 et 5 sont donc des propositions.

Nous disons qu'une proposition possède une seule ***valeur de vérité.*** Trouver la valeur de vérité d'une proposition, c'est dire si la proposition est vraie ou fausse.

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable de déterminer, parmi une liste d'énoncés grammaticaux et d'énoncés mathématiques simples, ceux qui sont des propositions. De plus, vous devrez pouvoir déterminer si la proposition est négative, conjonctive, disjonctive, conditionnelle ou biconditionnelle en vous référant à l'opérateur logique qu'elle contient et transcrire cette proposition en utilisant la forme symbolique appropriée.

1.1.1 Détermination des propositions

Comment pouvons-nous facilement reconnaître qu'un énoncé est une proposition? Nous devons pouvoir affirmer hors de tout doute si l'énoncé est vrai ou faux à la suite d'une réalité observable ou à la suite d'une vérification. Quand nous disons : « Dakar est la capitale du Sénégal », nous pouvons, même si nous ne connaissons pas la valeur de vérité au départ, affirmer que cet énoncé est une proposition puisque, nous n'avons pas d'autres choix, Dakar est ou n'est pas la capitale du Sénégal. Qu'elle soit vraie ou fausse importe peu pour le moment. Nous pourrons toujours vérifier cette information plus tard.

? Trouvez la valeur de vérité de cette dernière proposition. ....

Vrai, Dakar est la capitale du Sénégal. Nous pouvons vérifier cet énoncé dans un dictionnaire ou une encyclopédie.

Voyons si dans les formes de phrases qui suivent nous retrouvons des propositions.

- **Les phrases interrogatives**
  « Quelle heure est-il? » « Où vas-tu? »
  Impossible de répondre par vrai ou faux à ces questions. Les phrases interrogatives ne sont donc pas des propositions.

- **Les phrases exclamatives**
  « Montrez-moi vos papiers! » « Pas si vite! »
  Nous ne pouvons donner de valeur de vérité à ces phrases. Elles ne sont donc pas des propositions.

- **Les phrases dans lesquelles nous faisons appel au jugement ou au goût**
  « C'est la plus belle pièce de ta maison. » « Paul est toujours gentil. »
  Affirmer que Paul est toujours gentil est une appréciation personnelle. Peut-être que pour certaines personnes, il ne l'est pas! Nous ne pouvons donc répondre par vrai ou faux à cette affirmation. Ce n'est donc pas une proposition.

- **Les phrases dans lesquelles nous ne pouvons répondre par vrai ou faux selon le sujet ou le complément de la phrase**
  « C'est la plus grosse planète. »
  Il faudrait savoir de quelle planète nous parlons avant d'affirmer que c'est la plus grosse. Ce n'est donc pas une proposition.

- **Les phrases non complètes**
  « Samedi, le 24 février. »
  Ce n'est même pas un énoncé, encore moins une proposition.

- **Les phrases déclaratives qui possèdent une et une seule valeur de vérité**
  « Montréal est une île. » « Mozart n'est pas mort. »
  Le premier de ces énoncés est vrai tandis que le deuxième est faux. Ces énoncés sont facilement vérifiables et sont des propositions.

> Une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux, mais non les deux à la fois.

Dites si les phrases suivantes sont des propositions.

1. L'oncle de Paul est musicien. ....
2. Au clair de la lune, mon ami Pierrot. ....
3. Que c'est triste, Venise! ....
4. Un litre de lait coûte presque 1,00 $. ....
5. Comment va ta sœur? ....
6. Le soleil se couche à 19h30 au printemps. ....
7. Passe-moi le beurre. ....
8. Québec est la capitale du Canada. ....

Les phrases 1, 4, 6 et 8 sont des propositions.

Des phrases mathématiques peuvent aussi être des propositions. Quand nous écrivons que $5 + 3 = 8$, nous écrivons une proposition vraie. Par contre, écrire que $18 > 25$, c'est aussi écrire une proposition mais fausse cette fois-ci.

? Est-ce que l'énoncé $8x = 72$ est une proposition? ....

Cet énoncé n'est pas une proposition. En effet, si $x = 9$, la proposition devient vraie, mais si x est différent de 9, la proposition est fausse. Une proposition, la définition le précise, doit être un énoncé ou vrai, ou faux, mais non les deux à la fois. Ce genre d'énoncé est appelé ***forme propositionnelle.***

Cette nuance est importante pour la compréhension du reste du sous-module : la ***logique*** ne souffre pas de demi-mesure. Tout comme une porte est ouverte ou fermée, une proposition doit être vraie ou fausse. Rappelons-nous que dans le cas où une proposition est vraie, nous disons que sa valeur de vérité est vraie et, dans le cas contraire, sa valeur de vérité est fausse.

Exemples 1

a) L'énoncé « 8 n'est pas un carré » est une proposition. La valeur de vérité de cette proposition est vraie.
b) L'énoncé « $14 - 6$ » n'est pas une proposition. Nous ne pouvons donc donner de valeur de vérité.
c) L'énoncé « $19 < 15$ » est une proposition. Sa valeur de vérité est fausse.
d) L'énoncé « $3x - 2 = 10$ » n'est pas une proposition. Nous ne pouvons donner de valeur de vérité puisque nous ne connaissons pas la valeur de x. C'est une forme propositionnelle.

Exercice 1.1

Indiquez par oui ou par non si les énoncés sont des propositions. Dans le cas où ce sont des propositions, trouvez leur valeur de vérité.

1. $3 + 2 = 7$ ....
2. 1 000 000 est un très grand nombre. ....
3. Un carré possède 4 angles droits. ....
4. Le cube de 16. ....
5. Il existe un pays qui s'appelle Italie. ....
6. $3x + 4x = 7x$ ....
7. 1, 2 et 5 sont des diviseurs de 10. ....
8. Un triangle a toujours deux angles congrus. ....
9. Pourquoi pas moi? ....
10. Une année bissextile compte 365 jours. ....

1.1.2 Différents types de propositions et opérateurs logiques

La **logique** est une science qui étudie le raisonnement en lui-même et ceci à l'aide de ***propositions simples***, comme celles que nous venons de voir, et de bien d'autres encore, comme nous le verrons bientôt.

Cette étude ne tient pas compte du contenu des phrases et ne se préoccupe que de leur forme. Ne sursautez pas si au début vous rencontrez des phrases comme : « Paula est ma sœur si et seulement si 4 + 2 = 6. » Nous nous préoccuperons du contenu des propositions un peu plus tard dans ce cours afin de définir des concepts mathématiques essentiels à la poursuite de vos études en mathématiques.

Examinons maintenant les autres genres de propositions, soit les ***propositions composées***.

Voici quelques exemples de propositions composées choisies dans des situations de la vie de tous les jours.

- **Si** je manque mon examen, **alors** je devrai le reprendre.
- Le hockey **et** le base-ball sont mes sports préférés.
- Je vais prendre une tarte **ou** un yogourt.
- L'été **ne** se termine **pas** bientôt.
- Je vais au cinéma **si et seulement si** tu viens avec moi.

En mathématiques, nous utilisons également des propositions composées.

- 8 est supérieur à 6 **et** inférieur à 12.
- Un triangle est rectangle **si et seulement si** il possède un angle droit.
- La racine carrée de 25 est 5 **ou** -5.
- **Si** un quadrilatère est un carré, **alors** c'est un rectangle.
- Le nombre 9 **n'**est **pas** un nombre premier.

Quand deux propositions simples sont reliées par les mots **et, ou, si... alors, si et seulement si**, nous obtenons des propositions composées. Toute négation d'une proposition, **ne... pas**, est aussi une proposition composée.

Les expressions **ne... pas, et, ou, si... alors, si et seulement si** sont appelées ***opérateurs logiques***.

Tout comme l'addition et la soustraction possèdent leurs symboles propres pour dire plus ou moins, les propositions composées sont aussi unies par des symboles particuliers qui sont appelés « opérateurs logiques ».

Les cinq opérateurs logiques et leurs symboles sont présentés dans le tableau suivant.

Expression	Opérateur de	Symbole
Ne... pas	***négation***	$\neg$
et	***conjonction***	$\wedge$
ou	***disjonction***	$\vee$
si... alors	***conditionnelle***	$\rightarrow$
si et seulement si	***biconditionnelle***	$\leftrightarrow$

Toute proposition dans laquelle nous retrouvons les opérateurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, de conditionnelle ou de biconditionnelle est appelée **proposition composée**.

En logique, nous utilisons habituellement les lettres minuscules p, q, r et s pour représenter des propositions, de la même façon qu'en algèbre nous avons l'habitude d'utiliser les lettres x et y pour représenter les inconnus ou variables et qu'en géométrie nous employons surtout les lettres majuscules A, B et C pour nommer les sommets d'un triangle. Ce n'est là qu'une question de convention.

Voyons un peu comment nous pouvons traduire des énoncés grammaticaux ou mathématiques en employant les opérateurs logiques.

Exemple 2

Soit p : il fait beau,
q : je vais dehors.

En utilisant les lettres p et q ainsi que les opérateurs logiques, nous pouvons « traduire » différentes propositions en langage logique.

Langage courant	Symbole	Lecture
Il **ne** fait **pas** beau.	$\neg p$	non p
Il fait beau **et** je vais dehors.	$p \wedge q$	p et q
Il fait beau **ou** je vais dehors.	$p \vee q$	p ou q
S'il fait beau, **alors** je vais dehors.	$p \rightarrow q$	si p, alors q
Il fait beau **si et seulement si** je vais dehors.	$p \leftrightarrow q$	p si et seulement si q

De même, nous pouvons aussi faire appel à plus de un opérateur logique pour exprimer des propositions composées.

Exemples 3

Soit les mêmes propositions p et q que dans l'exemple 2.

a) Il fait beau **ou** je **ne** vais **pas** dehors : $p \vee \neg q$.
b) **Si** je **ne** vais **pas** dehors, **alors** il fait beau : $\neg q \rightarrow p$.
c) Je vais dehors **et** il **ne** fait **pas** beau : $q \wedge \neg p$.
d) Je vais dehors **si et seulement si** il **ne** fait **pas** beau : $q \leftrightarrow \neg p$.

Voici quelques exercices pour vous permettre de réviser ces premières notions de logique.

Exercice 1.2

1. Dans les propositions composées suivantes, indiquez l'opérateur et donnez son nom.

	Symbole	Nom
a) **Si** un nombre est pair, **alors** nous pouvons le diviser par 2.	....	....

b) Vous pouvez entrer à la discothèque **si et seulement si** vous avez 18 ans. ....

c) Une hirondelle **ne** fait **pas** le printemps. ....

d) Je prendrais une pomme **ou** une poire. ....

e) J'aime le métro **et** l'autobus. ....

2. Soit p : j'ai soif,

   q : je bois un jus.

   Que signifient les propositions composées suivantes?

   a) $q \rightarrow p$: ....

   b) $p \vee q$: ....

   c) $q \leftrightarrow \neg p$: ....

   d) $q \wedge \neg p$: ....

   e) $\neg q$: ....

3. Soit p : 18 est un nombre pair,

   q : $2 \times 9 = 18$.

   Traduisez en langage logique les propositions suivantes.

   a) **Si** $2 \times 9 = 18$, **alors** 18 est un nombre impair. ....

   b) 18 **n'**est **pas** un nombre pair. ....

   c) $2 \times 9 = 18$ **et** 18 est un nombre pair. ....

Pas si sorcier que ça la logique, n'est-ce-pas?

Continuons notre étude en examinant de façon un peu plus approfondie chacun de nos opérateurs logiques afin d'en dresser leur table, comme nous le faisons avec des tables de multiplication. Ces tables porteront le nom de ***tables de vérité*** puisque la réponse sera ou vraie ou fausse.

Négation

Soit p : les chats ont quatre pattes.

Nous pouvons nier cette proposition de plusieurs manières :
- les chats **n'**ont **pas** quatre pattes;
- **il n'est pas vrai** de dire que les chats ont quatre pattes;
- **il est faux** de dire que les chats ont quatre pattes.

Toutes ces propositions composées s'écrivent $\neg p$.

? Quelle est la valeur de vérité de la proposition $12 = 10 + 2$? ....

? Quelle est la valeur de vérité de la proposition $12 \neq 10 + 2$? ....

? Quelle est la valeur de vérité de la proposition $30 = 18$? ....

? Quelle est la valeur de vérité de la proposition $30 \neq 18$? ....

En réponse à ces questions, vous devriez avoir répondu que la première et la dernière proposition sont vraies, tandis que les deux autres sont fausses.

La négation d'une proposition vraie est une proposition fausse.

La négation d'une proposition fausse est une proposition vraie.

Un tableau serait plus simple pour représenter cette situation. C'est ce tableau que nous appellons « la table de vérité de la négation ».

Dans ce tableau, la première colonne représente la valeur de vérité de la proposition p et la deuxième colonne, la valeur de vérité de la proposition composée $\neg p$.

Table de vérité
de la négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

La deuxième ligne veut dire que la proposition $\neg p$ est fausse si p est vraie.
La troisième ligne veut dire que la proposition $\neg p$ est vraie si p est fausse.

C'est toujours cette table de vérité que nous retrouvons lorsque nous avons l'opérateur de la négation.

Conjonction

Soit p : la pomme est un fruit,
q : la carotte est un légume.

Relions ces deux propositions simples avec l'opérateur **et**, ensuite écrivons-les sous leur forme symbolique.

La pomme est un fruit **et** la carotte est un légume.

$$p \quad \wedge \quad q$$

Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions composées suivantes.

1. La pomme est un fruit **et** la carotte est un légume. ....
2. La pomme est un fruit **et** la carotte n'est pas un légume. ....
3. La pomme n'est pas un fruit **et** la carotte est un légume. ....
4. La pomme n'est pas un fruit **et** la carotte n'est pas un légume. ....

Seule la première proposition composée est vraie, car c'est la seule pour laquelle les deux propositions simples sont vraies. Pour la deuxième proposition composée, sa deuxième proposition simple n'est pas vraie; pour la troisième proposition composée, c'est la première proposition simple qui est fausse; quant à la dernière, ce sont les deux propositions simples qui sont fausses.

Ces quatre dernières propositions et les conclusions que nous en tirons devraient nous permettre de dresser la table de vérité de la conjonction.

Table de vérité
de la conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

La **conjonction** de deux propositions simples est vraie dans le seul cas où les deux propositions simples sont vraies.

Une proposition composée peut faire appel aux deux opérateurs logiques dont vous connaissez les tables de vérité.

Exemple 4

Soit p : $6 - 2 = 4$,
q : 4 est un nombre pair.

La proposition $6 - 2 \neq 4$ **et** 4 est un nombre pair s'écrit : $\neg p \wedge q$.

La proposition $p \wedge \neg q$ se traduit par : $6 - 2 = 4$ **et** 4 **n'**est **pas** un nombre pair.

La proposition : **il n'est pas vrai** de dire que $6 - 2 \neq 4$ **et** que 4 est un nombre pair s'écrit $\neg(\neg p \wedge q)$.

Ainsi, dans le langage usuel, plusieurs phrases traduisent l'opérateur de la conjonction **et** sans que ce mot **et** ne soit mentionné.

Soit p : la maison est grise,
q : la maison est carrée.

La maison n'est ni grise ni carrée	signifie	La maison n'est pas grise et la maison n'est pas carrée.	$\neg p \wedge \neg q$
La maison n'est pas grise mais elle est carrée.	signifie	La maison n'est pas grise et la maison est carrée.	$\neg p \wedge q$

Passons à l'étude de notre troisième table de vérité. Votre expérience des deux premières devrait vous être utile pour dresser celle de la disjonction puisque le langage logique vous est sans doute plus familier.

Disjonction

Le patron d'Henri a demandé à celui-ci de travailler samedi matin **ou** un soir de cette semaine afin de mettre à jour certains dossiers urgents. Évidemment, Henri sera payé en temps supplémentaire! Nous pouvons traduire cette situation par les deux propositions simples suivantes.

Soit p : Henri travaille samedi matin,
q : Henri travaille un soir.

La proposition composée $p \vee q$ représente cette situation et se lit : Henri travaille samedi matin **ou** Henri travaille un soir.

Dites si, dans chacune des quatre situations suivantes, Henri répond à la demande de son patron. (Autrement dit, trouvez la valeur de vérité des propositions composées.)

1. Henri a beaucoup de temps libre. Il travaillera samedi matin. Comme il craint de ne pas avoir terminé le travail demandé, il travaillera aussi un soir. ....
2. Henri ne peut travailler samedi matin, car il a déjà pris des engagements. Par contre, il pourra rester un soir de cette semaine. ....
3. Samedi matin, rien de prévu à l'horaire, il viendra donc travailler. Par contre, il est pris tous les soirs de la semaine. ....
4. Henri n'a pas très envie de faire des heures supplémentaires. Il répond à son patron qu'il est occupé samedi matin et tous les soirs de la semaine. ....

1. Oui, Henri a effectivement comblé les désirs de son patron! Celui-ci n'en demandait pas tant.
2. Oui, il répond aux désirs de son patron. Celui-ci lui a demandé un soir **ou** samedi matin.
3. Oui, il répond aux désirs de son patron. Celui-ci lui a demandé un soir **ou** samedi matin.
4. Non, assurément, le patron ne sera pas satisfait de sa réponse.

Ces quatre situations vous aident-elles à dresser la table de vérité de la disjonction? Si vous répondez non, relisez la situation en vous mettant à la place du patron!

Table de vérité
de la disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

La **disjonction** de deux propositions simples est toujours vraie, sauf dans le cas où les deux propositions simples sont fausses.

Il est temps de vérifier si vous avez compris les trois premières tables de vérité.

Exercice 1.3

1. Soit p : Éric est professeur,
   q : Éric a 27 ans,
   r : Éric habite Laval.

   Traduisez en langage courant chacune des propositions composées.

   a) $p \vee q$ ....

   b) $\neg p \wedge q$ ....

   c) $\neg(p \vee r)$ ....

   d) $\neg p \vee \neg r$ ....

   e) $r \wedge \neg q$ ....

2. Soit p : le carré a 4 côtés,
   q : le triangle a 3 angles.

   Traduisez sous forme symbolique les propositions composées.

   a) Le carré n'a pas 4 côtés ou le triangle a 3 angles. ....

   b) Il est faux de dire que le carré n'a pas 4 côtés ou que le triangle n'a pas 3 angles. ....

c) Le carré a 4 côtés et le triangle n'a pas 3 angles. ....

3. Donnez la valeur de vérité des propositions composées suivantes.

a) $p \wedge q$ lorsque p est vraie et que q est fausse. ....

b) $\neg q$ lorsque q est fausse. ....

c) $p \vee r$ lorsque p et r sont fausses. ....

Si vous avez bien compris les trois premiers opérateurs, **alors** nous pouvons commencer l'étude du quatrième.

Conditionnelle

Maria est une habituée des jeux de loterie. Toutes les semaines, elle achète au moins un billet dans le but de gagner un gros prix. Elle a promis à son copain Marco de l'amener au restaurant si elle gagnait. Marco réfléchit à la proposition de Maria et se demande dans quelles situations Maria pourrait bien l'amener au restaurant.

Quelles sont les propositions parmi les quatre suivantes dans lesquelles Maria tient sa promesse?

1. Si Maria gagne, alors elle amène Marco au restaurant. ....
2. Si Maria gagne, alors elle n'amène pas Marco au restaurant. ....
3. Si Maria ne gagne pas, alors elle amène Marco au restaurant. ....
4. Si Maria ne gagne pas, alors elle n'amène pas Marco au restaurant. ....

1. Oui, c'est ce qui était convenu.

2. Non, Maria avait promis de l'amener si elle gagnait.

3. Oui. Car même si elle ne gagne pas, elle l'amène quand même. Elle fait plus que respecter sa promesse.

4. Oui, c'est tout à fait normal qu'elle ne l'amène pas puisqu'elle n'a pas gagné.

À partir des quatre réponses que nous avons obtenues dans les situations précédentes, nous sommes en mesure de dresser la table de vérité de la conditionnelle.

Table de vérité
de la conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

La proposition p de la conditionnelle $p \rightarrow q$ s'appelle l'***antécédent*** et la proposition q, le ***conséquent***.

Plusieurs formes sont utilisées dans le langage courant pour dire la même chose que **si... alors** dans une conditionnelle.

Par exemple :
- je suis malade si je mange trop;
- il suffit que je mange trop pour que je sois malade;
- je suis malade lorsque je mange trop.

La **conditionnelle** de deux propositions simples est toujours vraie, sauf dans le cas où l'antécédent est vrai et le conséquent est faux.

Biconditionnelle

Frédéric n'a pas eu de très bonnes notes à son troisième bulletin. Il **doit** absolument avoir de bonnes notes à son quatrième bulletin pour pouvoir aller au cégep en administration. C'est **à cette seule condition** qu'il pourra poursuivre ses études collégiales.

La biconditionnelle se traduit habituellement par **si et seulement si**.

Différentes situations se présentent à Frédéric. Déterminez les valeurs de vérité des quatre situations auxquelles il fait face.

1. Frédéric va au cégep si et seulement si il a de bonnes notes. ....

2. Frédéric va au cégep si et seulement si il n'a pas de bonnes notes. ....

3. Frédéric ne va pas au cégep si et seulement si il a de bonnes notes. ....

4. Frédéric ne va pas au cégep si et seulement si il n'a pas de bonnes notes. ....

Si vous avez trouvé que la première et la dernière proposition étaient vraies, bravo! Sinon, refaites l'exercice encore une fois afin d'être sûr d'avoir bien saisi.

Table de vérité
de la biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

La **biconditionnelle** de deux propositions simples est vraie lorsque les deux propositions qui la composent sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

La biconditionnelle est en fait une double conditionnelle. Dans la situation précédente, nous aurions tout aussi bien pu écrire :

Frédéric va au cégep s'il a de bonnes notes.	$p \rightarrow q$
et	$\wedge$
Frédéric a de bonnes notes s'il va au cégep.	$q \rightarrow p$

Nous verrons un peu plus loin que, de fait, ces propositions sont appelées ***propositions équivalentes***.

Encore une fois, dans le langage courant, d'autres expressions peuvent être utilisées pour dire **si et seulement si**. Par exemple, un triangle est équilatéral si et seulement si il a trois côtés congrus peut se dire :

- **il faut et il suffit** qu'un triangle ait trois côtés congrus pour dire qu'il est équilatéral;
- **une condition nécessaire et suffisante** pour qu'un triangle soit équilatéral est qu'il possède trois côtés congrus.

Les quelques exercices qui suivent ont rapport aux conditionnelles et aux biconditionnelles auxquelles nous avons ajouté quelques négations.

Exercice 1.4

1. Soit p : il pleut,
   q : Jérôme va au cinéma,
   r : Karine prend le métro.
   Traduisez en langage courant chacune des propositions composées.

   a) $p \rightarrow q$ ....

   b) $p \leftrightarrow r$ ....

   c) $\neg q \rightarrow p$ ....

   d) $p \leftrightarrow \neg q$ ....

   e) $\neg(q \rightarrow r)$ ....

2. Utilisez les propositions p, q et r énoncées ci-dessous pour traduire sous forme symbolique les propositions composées.

   p : Diane a beaucoup d'argent,
   q : Diane a une belle maison,
   r : le mari de Diane est électricien.

   a) Si Diane a une belle maison, alors Diane a beaucoup d'argent.

   ....

   b) Une condition nécessaire et suffisante pour que le mari de Diane soit électricien est que Diane ait une belle maison. ....

   c) Il est faux de dire que si Diane a beaucoup d'argent, c'est que son mari est électricien. ....

   d) Si Diane a beaucoup d'argent, alors son mari n'est pas électricien.

   ....

3. Donnez la valeur de vérité de chacune de ces propositions composées.

   a) $p \leftrightarrow q$ si p est vraie et q est fausse. ....

   b) $q \rightarrow p$ si p et q sont fausses. ....

   c) $p \leftrightarrow q$ si p est fausse et q est vraie. ....

   d) $q \rightarrow p$ si p et q sont vraies. ....

Saviez-vous que...

... le syllogisme est une forme de raisonnement logique qui nous vient de l'Antiquité? Ce raisonnement consiste à tirer une conclusion à partir de deux propositions simples. Le plus célèbre et connu des syllogismes est celui-ci :

Tous les hommes sont mortels.
Tous les Grecs sont des hommes.
Donc, tous les Grecs sont mortels.

Essayez vous-même de construire un syllogisme!

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Soit p : Montréal est une métropole,
   q : Laval est une banlieue,
   r : Québec est une capitale.

Traduisez en langage courant chacune des propositions composées.

a) $p \leftrightarrow q$ ....

b) $\neg p$ ....

c) $q \wedge \neg r$ ....

d) $p \vee q$ ....

e) $\neg(p \rightarrow r)$ ....

2. Utilisez les propositions p, q et r énoncées ci-dessous pour traduire sous forme symbolique les propositions composées.

   Soit p : 9 est un multiple de 3,
   q : 3 est un nombre premier,
   r : 3 est un nombre impair.

   a) 9 est un multiple de 3 et 3 est un nombre premier. ....

   b) Si 3 est un nombre impair, alors c'est un nombre premier. ....

   c) Si 9 est un multiple de 3 ou 3 est un nombre impair, alors 3 est un nombre premier. ....

d) Il est faux de dire que 3 est un nombre impair ou un nombre premier. ....

e) 3 est un nombre impair si et seulement si c'est un nombre premier. ....

f) 3 n'est ni un nombre premier ni un nombre impair. ....

3. Dans toutes les propositions composées qui vont suivre, nous supposerons que p, q et r sont vraies. Donnez la valeur de vérité de ces propositions.

a) $p \leftrightarrow q$ .... b) $r \wedge \neg p$ .... c) $\neg(p \rightarrow r)$ ....

d) $p \vee q$ .... e) $q \wedge \neg r$ ....

4. Vrai ou faux?

a) Une conditionnelle est vraie si et seulement si les deux propositions composées sont vraies. ....

b) Le symbole $\vee$ est le symbole de la conjonction. ....

c) La négation d'une proposition vraie est une proposition fausse. ....

d) Une conditionnelle est fausse si l'antécédent est vrai et le conséquent est faux. ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

Nous avons pris contact dans ce premier sous-module avec les opérateurs logiques et avec leur table de vérité. Les opérateurs logiques sont au nombre de 5.

Opérateurs logiques

ne... pas	négation	$\neg$
et	conjonction	$\wedge$
ou	disjonction	$\vee$
si... alors	conditionnelle	$\rightarrow$
si et seulement si	biconditionnelle	$\leftrightarrow$

Les tables de vérité nous seront indispensables pour la poursuite de notre étude de la logique. Il n'est évidemment pas nécessaire de les connaître par cœur : vous pourrez toujours les consulter quand ce sera nécessaire. Par contre, il est facile de s'en souvenir si nous retenons leurs particularités.

Particularités des tables de vérité

$\neg$	La valeur de vérité est changée.
$\wedge$	Vraie seulement si les deux propositions sont vraies.
$\vee$	Fausse seulement si les deux propositions sont fausses.
$\rightarrow$	Fausse seulement si l'antécédent est vrai et le conséquent est faux.
$\leftrightarrow$	Vraie si les deux propositions sont en même temps vraies ou en même temps fausses.

Complétez les tables de vérité suivantes. Vérifiez ensuite vos réponses avec les tables données précédemment ou avec le tableau des particularités ci-dessus. Soyez certain que vos tableaux sont exacts, car vous aurez à vous en servir régulièrement.

Les 5 tables de vérité des propositions composées

Table de vérité
de la négation

p	$\neg p$
V	
F	

Table de vérité
de la conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Table de vérité
de la disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Table de vérité
de la conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Table de vérité
de la binconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Si nous voulons connaître, par exemple, la valeur de vérité de la proposition $p \rightarrow q$ lorsque p est fausse et q est vraie, nous regardons dans la table de vérité de la conditionnelle à la troisième ligne du tableau et nous trouvons V dans la troisième colonne. Nous pouvons alors dire que cette proposition est vraie.

Nous verrons dans le prochain sous-module toutes les étapes qui nous permettront de trouver les valeurs de vérité de propositions composées plus complexes.

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Une énigme... logique

Deux amis, Serge et Émile, se rencontrent alors qu'ils ne se sont pas vus depuis l'école secondaire. Ils échangent de vieux souvenirs et Émile demande tout à coup à Serge combien d'enfants il a.

« J'ai trois enfants », de lui répondre Serge.

Connaissant le goût d'Émile pour les énigmes, il ajoute : « Je ne te dirai pas leurs âges, mais je vais te donner un indice : le produit des âges de mes enfants est égal à 36. »

Émile réfléchit, se saisit d'un bout de papier et y gribouille quelques instants. « Je n'ai pas assez de renseignements pour te donner l'âge de tes enfants. Donne-moi un autre indice. »

« Regarde l'édifice en face et compte le nombre de fenêtres. Ce nombre de fenêtres est égal à la somme des âges de mes enfants », de lui répondre aussitôt Serge.

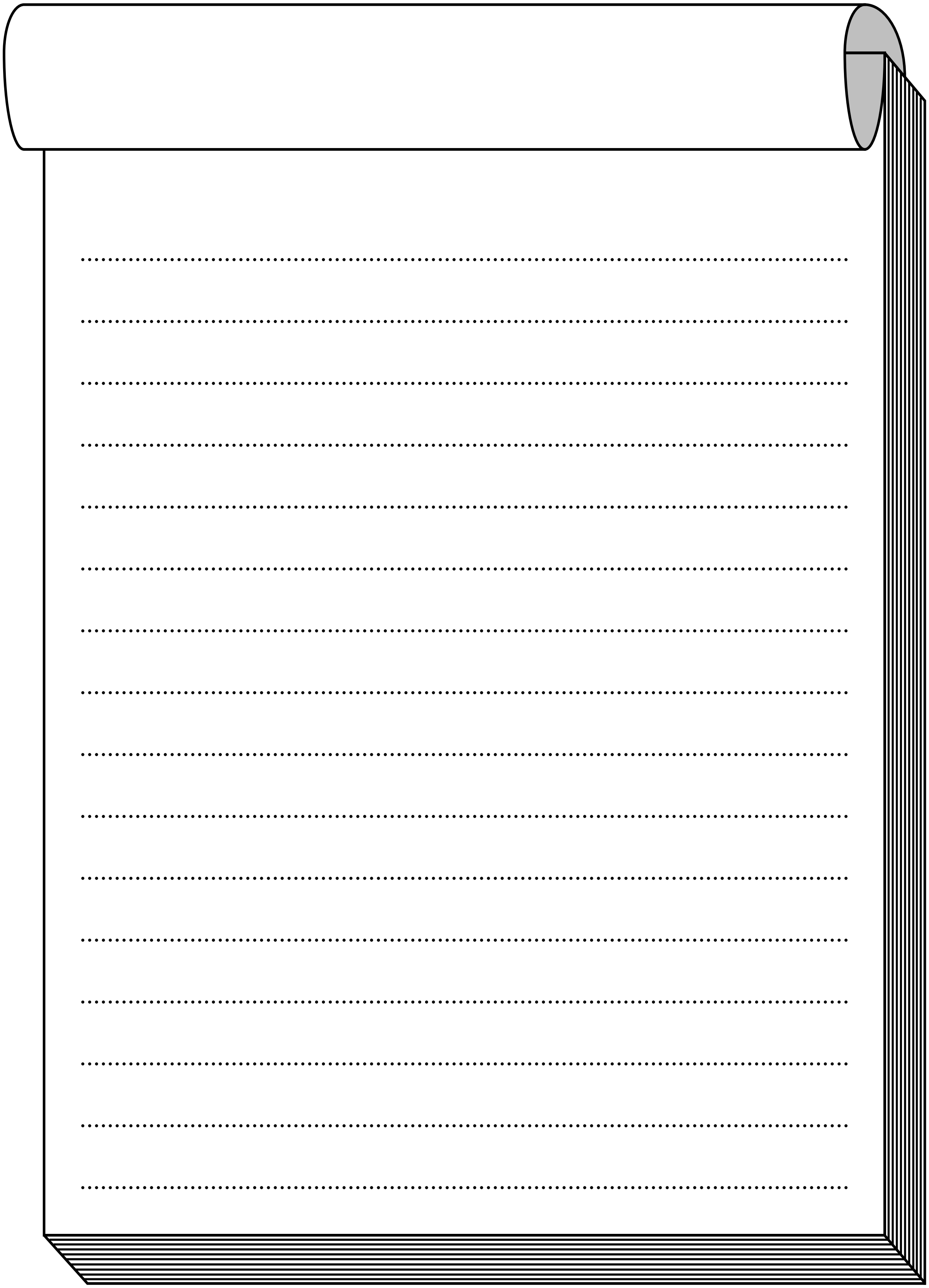
Émile compte les fenêtres et réfléchit quelques instants en consultant son papier. « Écoute Serge, je ne peux pas encore trouver l'âge de tes trois enfants mais donne-moi un dernier indice. »

« Le plus vieux de mes enfants a les yeux bleus! », d'ajouter aussitôt Serge.

« Ah! Très bien! », de s'exclamer illico Émile.

Et il donna à Serge l'âge de ses trois enfants.

Quel âge ont les enfants de Serge?



SOUS-MODULE 2

VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE PROPOSITION COMPOSÉE

2.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Encore en retard?

Anita et Jules doivent absolument être au cinéma pour la représentation de 11 heures. Anita dit à Jules : « Nous serons à l'heure si et seulement si mon père vient me chercher ou s'il y a des autobus. »

À quelles conditions pouvons-nous dire qu'Anita et Jules ne seront pas en retard?

Trouver une réponse à cette question, c'est trouver la valeur de vérité des propositions simples qui la composent. La valeur de vérité d'une proposition composée n'est pas toujours évidente, surtout si ces propositions sont nombreuses et reliées par plusieurs opérateurs logiques.

C'est ce que nous ferons dans ce sous-module.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de déterminer la valeur de vérité d'une proposition composée en respectant la priorité des opérateurs logiques.

En nous servant des tables de vérité que nous avons découvertes dans le premier sous-module (ayez-les sous la main!), nous verrons les différentes étapes qui nous permettront de répondre à la question posée dans le préambule. Nous débuterons tout de même avec des propositions composées plus simples.

Dressons la table de vérité de la proposition composée suivante.

$$p \wedge \neg q$$

Pour dresser notre table de vérité, nous avons besoin d'un tableau dans lequel nous indiquons par V ou F la valeur de vérité de chacune de nos propositions composées. La première ligne du tableau nous donne les propositions simples p et q ainsi que la proposition composée recherchée. Les deux premières colonnes contiennent les propositions simples p et q ainsi que les différentes combinaisons de valeurs que ces propositions peuvent prendre, comme nous l'avons vu dans le premier sous-module. Puisque nous avons deux propositions simples, nous avons quatre autres lignes contenant les agencements possibles des propositions simples p et q. Enfin, la dernière ligne du tableau sert à noter l'ordre dans lequel les opérations seront effectuées. Le tableau ci-dessous nous résume la situation.

p	q	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			
Ordre				

Nous avons maintenant à remplir la colonne qui correspond au numéro 1 de la ligne « ordre » et qui représente la valeur de vérité de p. Nous retranscrivons cette valeur comme elle apparaît dans la première colonne.

N.B. – Pour une meilleure compréhension des tableaux, la ou les propositions modifiées par les opérateurs sont surmontées du symbole • et le résultat de l'opération apparaît en gras et tramé. Ces symboles ne sont là qu'à titre indicatif et ne font pas partie de la table de vérité comme telle.

Le tableau se lit maintenant comme suit.

p	q	$\overset{\bullet}{p}$	$\wedge$	$\neg q$
V	V	**V**		
V	F	**V**		
F	V	**F**		
F	F	**F**		
Ordre		**1**		

La deuxième étape (ordre 2) est la colonne $\neg q$ puisque l'opérateur $\neg$ est prioritaire, c'est-à-dire qu'il doit être effectué en premier lieu s'il est placé devant une proposition simple, comme c'est le cas maintenant. Nous indiquons alors les valeurs de vérité de $\neg q$ dans la dernière colonne en niant la proposition q ou encore en regardant la table de vérité de la négation pour la trouver. Nous obtenons le tableau suivant.

p	$\overset{\bullet}{q}$	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	V		**F**
V	F	V		**V**
F	V	F		**F**
F	F	F		**V**
Ordre		1		**2**

Puisque nous connaissons les valeurs de p (ordre 1) et celles de $\neg q$ (ordre 2), il ne nous reste qu'à unir ces valeurs par la conjonction $\wedge$ en consultant, s'il y a lieu, la table de vérité de la conjonction. C'est la troisième étape : nous inscrivons 3 sur la ligne « ordre » vis-à-vis $\wedge$.

Sur la première ligne, nous avons p qui est vraie et $\neg q$ qui est fausse. La table de vérité de la conjonction nous donne **F** comme valeur de vérité. Nous écrivons alors **F** dans la colonne « ordre 3 ».

p	q	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	V	**F**	F
V	F	V		V
F	V	F		F
F	F	F		V
Ordre		1	**3**	2

Sur la deuxième ligne, nous avons p qui est vraie et $\neg q$ qui est vraie. La table de vérité de la conjonction nous donne **V** comme valeur de vérité.

Nous obtenons alors le tableau suivant.

p	q	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	V	**F**	F
V	F	V	**V**	V
F	V	F		F
F	F	F		V
Ordre		1	**3**	**2**

Complétez les deux cases manquantes du tableau ci-dessus.

Voilà notre résultat final!

p	q	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	V	**F**	F
V	F	V	**V**	V
F	V	F	**F**	F
F	F	F	**F**	V
Ordre		1	**3**	2

Dans quel(s) cas la proposition composée $p \wedge \neg q$ est-elle vraie? ....

Pour répondre à cette question, nous consultons la dernière colonne obtenue (ordre 3) : nous obtenons une proposition vraie seulement si p est une proposition vraie et si q est une proposition fausse, comme dans le tableau qui suit.

p	q	p	$\wedge$	$\neg q$	
V	V	V	F	F	proposition fausse
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**proposition vraie**
F	V	F	F	F	proposition fausse
F	F	F	F	V	proposition fausse
Ordre		1	**3**	2	

Avant d'aller plus loin, voyons quelques règles de priorité des opérateurs logiques dont nous vous avons glissé un mot précédemment. Afin de vous les rendre plus accessibles, nous les comparerons aux priorités des opérations dans les calculs ordinaires.

rappel

Soit à effectuer la suite d'opérations 3 + –(5 × 3).
Nous effectuons d'abord la parenthèse : 3 + –(15).
Le signe – modifie le nombre 15 : 3 + –15.
Nous terminons par l'addition : –12.

Quel rapport avec les opérateurs logiques? Tout comme les règles de priorité dans les opérations de calculs, il existe certaines règles de priorité à respecter lorsque nous nous servons des opérateurs logiques. Voyez par vous-même!

$p \rightarrow \neg(p \wedge q)$ $\qquad\qquad$ $3 + -(5 \times 3)$

Règles de priorité des opérateurs logiques

1° Les opérations entre parenthèses doivent être effectuées en premier lieu.

2° Le symbole $\neg$ a la même priorité que le symbole – .

3° Les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ ont priorité sur les opérateurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$, tout comme les opérations $\times$ et $\div$ ont priorité sur les opérations + et –.

Remarques

1. Si le symbole $\neg$ est placé devant la parenthèse, il modifie l'opération de la parenthèse, sinon il modifie la proposition simple. Ainsi, dans la proposition $\neg(p \wedge q)$, c'est l'opération $(p \wedge q)$ qui est prioritaire, tandis que, dans la proposition $\neg p \wedge q$, c'est l'opération $\neg p$.

2. Dans la proposition $p \wedge q \rightarrow p$, nous devons d'abord rechercher les valeurs de $p \wedge q$ et non effectuer $q \rightarrow p$.

Résumons le tout dans le tableau suivant.

Opérateurs logiques		Opérateurs de calculs
( )	s'effectuent comme	( )
$\neg$	même priorité que	–
$\wedge$ et $\vee$	même priorité que	$\times$ et $\div$
$\rightarrow$ et $\leftrightarrow$	même priorité que	+ et –

Vous verrez qu'avec la pratique, ces priorités sont très simples et logiques à appliquer! Nous devrions maintenant être en mesure de trouver des tables de vérité de propositions un peu plus complexes. Allons-y tout de suite!

Exemple 1

Dressons la table de vérité de $\neg p \rightarrow (p \vee q)$.

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			
Ordre				

Nous devons commencer par compléter la colonne $\neg p$ puisque l'opérateur $\neg$ est placé devant la proposition simple p. Nous nions simplement la proposition p.

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	**F**		
V	F	**F**		
F	V	**V**		
F	F	**V**		
Ordre		**1**		

Puisque l'opérateur $\vee$ est prioritaire et que, de toute façon, nous avons des parenthèses, nous complétons la dernière colonne $(p \vee q)$, ce qui nous donne, en consultant au besoin la table de la disjonction, le résultat suivant.

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	F		**V**
V	F	F		**V**
F	V	V		**V**
F	F	V		**F**
Ordre		1		**2**

Il ne nous reste plus qu'à remplir la quatrième colonne en utilisant les résultats des troisième et cinquième colonnes et, encore une fois, s'il y a lieu, en nous référant cette fois-ci à la table de vérité de la conditionnelle.

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	F	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	V
F	F	V	**F**	F
Ordre		1	**3**	2

Le tableau nous indique que la proposition composée est vraie dans tous les cas, sauf dans le cas où ces deux propositions simples sont simultanément fausses.

Exemple 2

Soit à dresser la table de vérité de $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow q$.

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	q
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				
Ordre		2	1	4	3

Servez-vous du tableau ci-haut et suivez avec nous les différentes étapes en essayant de remplir les cases au fur et à mesure que nous vous donnons leur ordre. Si vous le désirez, vous pouvez encore une fois tenter de compléter le tableau avant de consulter les réponses.

Pour trouver la valeur de vérité de $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow q$, vous devez respecter les étapes suivantes.

1° Trouver la valeur de vérité de $(p \wedge q)$, car cette opération se trouve entre parenthèses. Nous ne pouvons effectuer la négation maintenant puisque celle-ci est devant une parenthèse.

2° Nier la colonne 1, car la négation est prioritaire à la biconditionnelle.

3° Recopier les valeurs de vérité de q.

4° Trouver la biconditionnelle des colonnes 2 et 3.

Voici la table de vérité complétée.

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	q
V	V	F	V	**F**	V
V	F	V	F	**F**	F
F	V	V	F	**V**	V
F	F	V	F	**F**	F
Ordre		2	1	**4**	3

À vous de jouer maintenant!

Exercice 2.1

1. Étant donné l'ordre des colonnes, complétez la table de vérité de la proposition composée $\neg p \vee \neg q$.

p	q	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			
Ordre		1	**3**	2

2. Complétez la table de vérité de la proposition $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ en établissant d'abord l'ordre des colonnes.

p	q	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			
Ordre				

3. Dressez la table de vérité de $p \leftrightarrow (p \wedge q)$.

p	q	

4. Dressez la table de vérité de $p \wedge (p \vee q) \rightarrow p$.

p	q	

Vous avez travaillé jusqu'à maintenant sur des propositions composées contenant deux propositions simples. Dans cette section du sous-module 2, nous allons aborder des propositions composées contenant trois propositions simples. La démarche de résolution des tables de vérité sera la même et les règles de priorité ne seront pas changées.

Voici un exemple de proposition composée contenant trois propositions simples.

Exemple 3

« Si j'ai de la chance et si je cherche, je trouverai un emploi. »

Traduisons cette phrase en langage logique.

Nous retrouvons les propositions simples suivantes.
Soit p : j'ai de la chance,
q : je cherche,
r : je trouverai un emploi.

La réponse est $p \wedge q \rightarrow r$.

Nous avons découvert dans un premier temps que la proposition simple admettait une seule valeur de vérité : vrai ou faux. La proposition composée de deux propositions simples admettait quatre combinaisons possibles des valeurs de vérité, comme nous l'avons vérifié dans les exemples et exercices précédents. Qu'en sera-t-il pour les propositions composées contenant maintenant trois propositions simples? Cette proposition contiendra huit agencements possibles des tables de vérité.

Soit p, q et r, trois propositions simples. Voici les huit combinaisons.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Nous retrouvons dans ce tableau tous les agencements possibles des valeurs de vérité de trois propositions simples. Votre travail consistera à trouver les valeurs de vérité des propositions composées.

Exemple 4

Dressons la table de vérité de l'exemple 3 : $p \wedge q \rightarrow r$.

Si vous croyez que vous pouvez la compléter sans aide, allez-y! Vous pourrez toujours vérifier plus loin si votre démarche et vos réponses sont exactes.

p	q	r	$p \wedge q$	$\rightarrow$	r
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			
Ordre			1	3	2

1° Trouvons les valeurs de vérité de la conjonction. Cette opération est prioritaire à la conditionnelle.

p •	q •	r	$p \wedge q$	$\rightarrow$	r
V	V	V	**V**		
V	V	F	**V**		
V	F	V	**F**		
V	F	F	**F**		
F	V	V	**F**		
F	V	F	**F**		
F	F	V	**F**		
F	F	F	**F**		
Ordre			**1**	3	2

2° Recopions les valeurs de vérité de r. C'est une proposition simple.

p	q	r	$p \wedge q$	$\rightarrow$	r
V	V	V	V		**V**
V	V	F	V		**F**
V	F	V	F		**V**
V	F	F	F		**F**
F	V	V	F		**V**
F	V	F	F		**F**
F	F	V	F		**V**
F	F	F	F		**F**
Ordre			1	3	**2**

3° Complétons en trouvant la conditionnelle des colonnes 1 et 2.

p	q	r	$p \wedge q$	$\rightarrow$	r
V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	V	**F**	F
V	F	V	F	**V**	V
V	F	F	F	**V**	F
F	V	V	F	**V**	V
F	V	F	F	**V**	F
F	F	V	F	**V**	V
F	F	F	F	**V**	F
Ordre			1	**3**	2

La proposition composée $p \wedge q \rightarrow r$ est donc vraie dans tous les cas, sauf dans celui où les propositions p et q sont vraies et la proposition r est fausse.

Comme vous avez pu le constater dans ce dernier exemple, dresser la table de vérité d'une proposition composée contenant trois propositions simples n'est pas plus ardu que de dresser celle avec deux propositions simples. Suivre les démarches proposées, respecter les règles de priorité, connaître les tables de vérité, travailler avec minutie, voilà le secret!

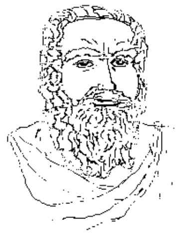
Exercice 2.2

1. Dressez la table de vérité de la proposition composée $\neg p \vee (q \leftrightarrow r)$.

p	q	r	$\neg p$	$\vee$	$(q \leftrightarrow r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			
Ordre			1	3	2

2. Dressez la table de vérité de la proposition composée $p \rightarrow (q \wedge r)$.

p	q	r	p	$\rightarrow$	$(q \wedge r)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			
Ordre			1	3	2



Saviez-vous que...

... le mot « logique » vient du grec *logos* et signifie raison? Plusieurs mots du vocabulaire scientifique, médical et du domaine de la psychologie proviennent de cette racine grecque. Pourriez-vous en énumérer quelques-uns?

2.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Dressez la table de vérité de $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$.

p	q	
Ordre		

2. Dressez la table de vérité de la proposition composée $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg r)$.

p	q	r	
Ordre			

2.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Complétez le tableau-synthèse des tables de vérité des propositions composées suivantes.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

2. Complétez le tableau des tables de vérité des propositions composées à partir des trois propositions simples suivantes.

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \rightarrow r$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

3. Dans l'activité d'acquisition du début du sous-module, Anita disait à Jules : « Nous serons à l'heure si et seulement si mon père vient nous chercher ou s'il y a des autobus. »
Soit p : mon père vient nous chercher,
q : il y a des autobus,
r : nous sommes à l'heure.

a) Traduisez cette phrase contenant 3 propositions simples en langage logique. ....

b) Dressez la table de vérité de cette proposition.

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	
Ordre			

c) Dans quels cas cette proposition est-elle fausse?

....

....

....

....

....

....

....

....

2.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

À l'ordre!

Les propositions composées que nous avons vues jusqu'à maintenant contenaient trois propositions simples et trois opérateurs logiques. Nous pourrions multiplier à l'infini celles-ci et ceux-là. L'exercice suivant permettra à ceux ou celles d'entre vous qui aiment les défis d'en relever un de taille, car nous avons ajouté quelques opérateurs et des crochets à cette proposition composée. Suivez simplement l'ordre de priorité des opérations et, en consultant vos tables de vérité, vous devriez obtenir la bonne réponse.

Dressez la table de vérité de la proposition suivante.

$$[(p \vee q) \wedge r\,] \leftrightarrow [(r \wedge (p \rightarrow \neg q)]$$

p	q	r	$[(p \vee q)$	$\wedge$	$r\,]$	$\leftrightarrow$	$[(r$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg q)]$
V	V	V									
V	V	F									
V	F	V									
V	F	F									
F	V	V									
F	V	F									
F	F	V									
F	F	F									
Ordre											

SOUS-MODULE 3

TAUTOLOGIE, CONTRADICTION ET IMPLICATION LOGIQUE

3.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Vrai ou faux ?

« C'est étrange, s'écria Michel. J'écoutais Enrico parler de ses animaux tout à l'heure et il me disait qu'il avait un chat ou pas de chien. Cinq minutes plus tard pourtant, il me disait qu'il n'avait pas de chat et qu'il avait un chien! »

« En effet, j'ai l'impression que ce garçon se contredit assez souvent! », de lui répondre Martha.

Et vous, avez- vous aussi l'impression qu'Enrico s'est contredit dans ses deux affirmations?

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable de dresser la table de vérité d'une proposition composée et de déterminer si celle-ci est une *tautologie* ou une *contradiction*. De plus, si les propositions composées sont reliées par l'opérateur de la conditionnelle, vous devrez pouvoir déterminer si elles forment une implication logique et y introduire son symbole si tel est le cas.

3.1.1 Tautologie et contradiction

Symbolisons les affirmations d'Enrico en nommant par p et q les propositions.
Soit p : j'ai un chat,
q : j'ai un chien.

Première affirmation : « J'ai un chat ou pas de chien. »

Nous traduisons par $(p \vee \neg q)$.

Deuxième affirmation : « Je n'ai pas de chat et j'ai un chien. »

Nous traduisons par $(\neg p \wedge q)$.

Nous pouvons maintenant écrire les deux affirmations de la façon suivante : « J'ai un chat ou pas de chien. » et « Je n'ai pas de chat et j'ai un chien. »

En langage logique, nous traduisons ces phrases par la proposition suivante.

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$$

Dressons la table de vérité de cette proposition composée.

p	q	$(p$	$\vee$	$\neg q)$	$\wedge$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$
V	V	V		F		F		V
V	F	V		V		F		F
F	V	F		F		V		V
F	F	F		V		V		F
Ordre		1	3	2	7	4	6	5

? Complétez la table de vérité ci-haut.

Voici le résultat final.

p	q	$(p$	$\vee$	$\neg q)$	$\wedge$	$(\neg p$	$\wedge$	$q)$
V	V	V	V	F	**F**	F	F	V
V	F	V	V	V	**F**	F	F	F
F	V	F	F	F	**F**	V	V	V
F	F	F	V	V	**F**	V	F	F
Ordre		1	3	2	**7**	4	6	5

Que constatez-vous en observant cette table de vérité?

Cette proposition composée est toujours fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples.

Une telle proposition est appelée une **contradiction**.

Examinons maintenant la proposition composée suivante.

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

Dressez la table de vérité de la proposition ci-haut.

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q$	$\to$	$\neg p)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					
Ordre						

Vérifiez que vous avez bien obtenu la table ci-dessous.

p	q	$(p \to q)$ •	$\leftrightarrow$	$(\neg q$	$\to$ •	$\neg p)$
V	V	V	**V**	F	V	F
V	F	F	**V**	V	F	F
F	V	V	**V**	F	V	V
F	F	V	**V**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

Quelle constatation pouvez-vous faire? ....

Cette proposition composée est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples.

Une telle proposition est appelée une **tautologie**.

À partir des deux tables de vérité que nous avons dressées jusqu'à maintenant dans ce sous-module et des conclusions que nous en avons tirées, nous pouvons donner les deux définitions suivantes.

Une **tautologie** est une proposition qui est toujours **vraie** quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

Une **contradiction** est une proposition qui est toujours **fausse** quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

Pour savoir si une proposition composée est une tautologie ou une contradiction, nous devons dresser la table de vérité de la proposition composée.

- Si cette proposition est toujours vraie, c'est une tautologie.
- Si cette proposition est toujours fausse, c'est une contradiction.

Exemple 1

Déterminez si la proposition $(p \vee q) \leftrightarrow \neg q$ est une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre.

Dressons la table de vérité.

p	q	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg q$
V	V	V	**F**	F
V	F	V	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**F**	V
Ordre		1	**3**	2

Puisque la proposition n'est pas toujours fausse ou toujours vraie, elle n'est donc ni une tautologie ni une contradiction.

Exercice 3.1

Vérifiez, en dressant les tables de vérité des propositions composées ci-dessous, si celles-ci sont des tautologies, des contradictions ou ni l'une ni l'autre.

1. $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$: ....

p	
V	
F	
Ordre	

2. $(p \wedge q) \vee (p \rightarrow \neg q)$: ....

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

3. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$: ....

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

4. $(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$: ....

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

3.1.2 Implication logique ($\Rightarrow$)

Nous venons de voir qu'une proposition composée toujours vraie porte le nom de « tautologie ». Si cette proposition composée est une conditionnelle, elle portera alors un nom particulier. Examinons la conditionnelle $(p \wedge q) \rightarrow q$ et dressons sa table de vérité.

p	q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	q
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

Que pouvons-nous dire de cette proposition? ....

C'est, vous l'avez sans doute découvert, une tautologie. Pour exprimer le fait que la conditionnelle $(p \wedge q) \rightarrow q$ est une tautologie, nous disons que la proposition $(p \wedge q)$ **implique** la proposition q.

Pour symboliser que $(p \wedge q)$ **implique** q, nous écrivons $(p \wedge q) \Rightarrow q$.

Nous disons alors que $(p \wedge q) \Rightarrow q$ est une ***implication logique***.

Une **implication logique** ou, tout simplement, une **implication** est une conditionnelle qui est une tautologie.

Remarquez bien que le symbole $\Rightarrow$ **n'est pas** un opérateur logique, mais un symbole de relation entre deux propositions composées.

Pour reconnaître une implication logique, nous devons :

1° transformer nos propositions composées en propositions utilisant le langage logique, si ce n'est déjà fait;

2° unir les deux propositions composées par le symbole de la conditionnelle si elles ne le sont pas;

3° dresser la table de vérité de la conditionnelle;

4° vérifier si c'est une tautologie;

5° relier les propositions composées avec le symbole de relation $\Rightarrow$ si c'est une tautologie, sinon utiliser le symbole $\not\Rightarrow$.

Exemple 2

La proposition $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ peut-elle s'écrire $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$?
Autrement dit, pouvons-nous dire que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ est une implication?

1° et 2° Les propositions composées sont déjà écrites en propositions utilisant le langage logique et sont unies par le symbole de la conditionnelle.

3° Dressons la table de vérité.

p	q	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

4° Nous avons une tautologie.

5° Nous pouvons donc affirmer que la proposition $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ est une implication et nous pouvons alors écrire $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

? La proposition $(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ est-elle une implication? ....

Non. Il faut obligatoirement avoir une conditionnelle. Or, ce n'est pas le cas ici. Il ne sert à rien de dresser la table de vérité et de vérifier si c'est une tautologie!

Exemple 3

$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ est-elle une implication?

- Dressons la table de vérité des propositions composées unies par le symbole de la conditionnelle.

p	q	$(p \vee q)$ •	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$ •
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

- Nous n'avons pas une tautologie. Cette conditionnelle n'est donc pas une implication.

- Pour indiquer que $(p \vee q)$ n'implique pas $(p \wedge q)$, nous écrivons :

$$(p \vee q) \not\Rightarrow (p \wedge q).$$

Au travail!

Exercice 3.2

1. Parmi les propositions suivantes, indiquez celles qui sont des implications en vous servant, s'il y a lieu, des tableaux fournis et écrivez votre réponse en utilisant le symbole approprié.

a) $p \to (p \vee \neg q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....
Alors, nous écrivons :......................

b) $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse :....................................
Alors, nous écrivons : ....

c) $(p \to q) \leftrightarrow q$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....
Alors, nous écrivons :......................

d) $p \to (p \wedge q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse :....................................
Alors, nous écrivons : ....

2. Soit la proposition composée : « Si Paul est professeur, alors Paul est professeur ou n'est pas menuisier. »

a) Traduisez cette proposition en utilisant les propositions simples suivantes.
Soit p : Paul est professeur,
q : Paul est menuisier.

b) Complétez la table de vérité.

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

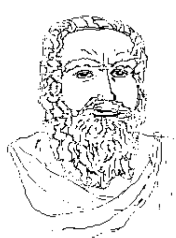
c) Est-ce que cette proposition composée est une conditionnelle? ....

d) Est-ce que cette proposition composée est une tautologie? ....

e) Pouvons-nous dire que c'est une implication logique? ....

f) Pouvons-nous alors écrire : « Paul est professeur implique que Paul est professeur ou n'est pas menuisier »? ....

g) Écrivez cette proposition sous forme symbolique. ....



Saviez-vous que...

... la narration des aventures d'*Alice au pays des merveilles* est due à un spécialiste de la logique mathématique, Lewis Carroll? Celui-ci, de son vrai nom Lutwidge Dodgson (1832-1898), était un mathématicien brillant, diplômé de la célèbre université d'Oxford, Angleterre. Sous un aspect distrayant, à l'aide d'aventures fantaisistes, de dessins humoristiques, de diagrammes de toutes sortes, il a tenté de mettre à la portée des profanes et des enfants les rudiments de la logique, science qui le passionna toute sa vie.

3.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Montrez que la proposition $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ est vraie.

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

2. Dites si les propositions suivantes sont une tautologie, une contradiction ou ni l'une ni l'autre.

a) $(p \wedge \neg q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

3.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Complétez les phrases suivantes.

   a) Une conditionnelle est fausse lorsque ....

   ....

   b) Une conjonction est vraie lorsque ....

   ....

   c) Une disjonction est fausse lorsque ....

   ....

   d) Une biconditionnelle est vraie lorsque ....

   ....

   e) Une conditionnelle qui est une tautologie s'appelle ....

   f) Si nous nions une tautologie, nous obtenons ....

   g) En niant une proposition fausse, nous obtenons ....

2. Vrai ou faux?

   a) Une proposition composée toujours vraie est une implication logique. ....

   b) Le symbole $\Rightarrow$ veut dire la même chose que le symbole $\rightarrow$. ....

   c) Une conditionnelle qui est une tautologie est aussi une implication logique. ....

d) La conditionnelle $p \rightarrow q$ est fausse si l'antécédent est faux et le conséquent est vrai. ....

e) Si nous nions une contradiction, nous obtenons une tautologie...............

3. Nous avons volontairement mis des ? dans la table de vérité ci-dessous. Remplacez ces ? par l'opérateur logique approprié et complétez la table de vérité.

p	q	$(p\ ?\ q)$	?	$p]$	$\rightarrow$	q
V	V		V			
V	F	F	F			
F	V	F	F			
F	F	F				
Ordre						

p	q	$(p\quad q)$		$p]$	$\rightarrow$	q
V	V		V			
V	F	F	F			
F	V	F	F			
F	F	F				
Ordre						

3.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Impliquons-nous davantage!

Démontrez l'implication logique suivante.

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge p \Rightarrow r$$

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	
Ordre			

SOUS-MODULE 4

ÉQUIVALENCE LOGIQUE

4.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Toujours la première

Ça discutait ferme l'autre jour des mérites sportifs de Natacha dans la cour de récréation.

« Si c'est la meilleure sprinteuse de l'école, alors c'est la meilleure sprinteuse de sa classe », disait Victor.
« Si ce n'est pas la meilleure sprinteuse de sa classe, alors ce n'est pas la meilleure sprinteuse de l'école », ajoutait Sacha.

Pensez-vous que les réflexions de nos amis ont la même signification ou, en d'autres termes, leurs commentaires sont-ils **logiquement équivalents**?

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable, étant donné deux propositions composées reliées par une biconditionnelle, de déterminer si celles-ci sont équivalentes. Si tel est le cas, vous devrez les relier par le symbole de l'*équivalence logique*.

Pour savoir si deux propositions composées sont équivalentes, nous devons les relier avec l'opérateur de la biconditionnelle. Si cette biconditionnelle est une tautologie, nous pourrons alors affirmer que cette proposition est une **équivalence logique**. En fait, l'équivalence logique est à la biconditionnelle ce que l'implication logique est à la conditionnelle. Nous vous donnerons une définition plus précise un peu plus loin dans ce sous-module.

Exemple 1

Voyons si les commentaires de Victor et de Sacha sont équivalents.
Soit p : Natacha est la meilleure sprinteuse de l'école,
q : Natacha est la meilleure sprinteuse de sa classe.

La phrase de Victor se traduit par $(p \to q)$ et celle de Sacha par $(\neg q \to \neg p)$.

Relions ces deux propositions composées avec la biconditionnelle $\leftrightarrow$. Nous obtenons alors la proposition $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

Dressons maintenant la table de vérité de cette biconditionnelle.

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q$	$\to$	$\neg p)$
V	V	V	**V**	F	V	F
V	F	F	**V**	V	F	F
F	V	V	**V**	F	V	V
F	F	V	**V**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

Nous remarquons que cette biconditionnelle est une tautologie et nous pouvons alors affirmer que c'est une équivalence.

Une biconditionnelle qui est une tautologie s'appelle une **équivalence**.

Pour exprimer le fait que la biconditionnelle $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ est une tautologie, nous disons que la proposition $(p \to q)$ est **équivalente** à la proposition $(\neg q \to \neg p)$.

Pour symboliser que $(p \rightarrow q)$ est **équivalent à** $(\neg q \rightarrow \neg p)$, nous écrivons $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Nous disons alors que $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ est une **équivalence.**

Le symbole $\not\Leftrightarrow$, quant à lui, voudra dire que les propositions composées réunies par la biconditionnelle ne seront pas équivalentes.

Exemple 2

Soit les propositions composées $\neg(p \wedge q)$ et $(\neg p \vee \neg q)$. Vérifions si elles sont équivalentes.

Relions les propositions par la biconditionnelle $\leftrightarrow$ et dressons la table de vérité de $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
V	V	F	V	**V**	F	F	F
V	F	V	F	**V**	F	V	V
F	V	V	F	**V**	V	V	F
F	F	V	F	**V**	V	V	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

Puisque cette biconditionnelle est une tautologie, nous pouvons alors conclure que c'est une équivalence et ainsi écrire $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

Le symbole $\Leftrightarrow$ **n'est pas** un opérateur logique mais, tout comme le symbole $\Rightarrow$, il nous indique une relation entre deux propositions composées.

Pour reconnaître une équivalence logique, nous devons :

1° transformer nos propositions composées en propositions utilisant le langage logique, si ce n'est déjà fait;

2° unir les deux propositions composées par le symbole de la biconditionnelle si elles ne le sont pas;

3° dresser la table de vérité de la biconditionnelle;

4° vérifier si c'est une tautologie;

5° relier les propositions composées avec le symbole de relation $\Leftrightarrow$ si c'est une tautologie, sinon utiliser le symbole $\not\Leftrightarrow$.

Voyons ces cinq étapes avec un exemple.

Exemple 3

Voici deux propositions composées.

« Vladimir est veuf et écrivain. » et « Vladimir est veuf ou n'est pas écrivain. »

Voyons s'il existe une équivalence entre ces deux propositions.

1° Transformons les propositions en utilisant le langage logique.
Soit p : Vladimir est veuf,
q : Vladimir est écrivain.

La première proposition s'écrit $(p \wedge q)$ et la deuxième $(p \vee \neg q)$.

2° Relions les deux propositions par la biconditionnelle.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$$

3° Dressons la table de vérité.

p	q	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$\neg q)$
V	V	V	**V**	V	V	F
V	F	F	**F**	V	V	V
F	V	F	**V**	F	F	F
F	F	F	**F**	F	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

4° Vérifions si c'est une tautologie. Ce n'en est pas une puisque certaines valeurs de la biconditionnelle sont fausses.

5° Relions les deux propositions avec le symbole approprié.

$$(p \wedge q) \not\Leftrightarrow (p \vee \neg q)$$

Nous pouvons alors affirmer que ces deux propositions ne sont pas logiquement équivalentes.

Exercice 4.1

1. Déterminez si les propositions suivantes sont logiquement équivalentes en vous servant de la démarche proposée dans l'exemple précédent.

« Si je réussis, alors je vais au cégep. »
« Je ne réussis pas et je ne vais pas au cégep. »

Soit p : je réussis,
q : ....

....

....

p	q					
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					
Ordre						

....

....

2. Déterminez si les deux propositions données sont équivalentes et reliez-les par le symbole approprié.

a) $p \vee q$ et $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

b) $\neg p \vee q$ et $q \vee \neg p$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

c) $p \vee q$ et $\neg(p \rightarrow q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

Saviez-vous que...

... la véritable Alice, l'héroïne de *Alice au pays des merveilles*, a un vrai visage? En effet, en plus d'être écrivain, mathématicien, notre ami Lewis Carroll était aussi photographe. La photo ci-dessous nous montre Alice Leddell, photographiée en mendiante par Carroll dans son atelier. Vous n'avez pas vu le film? Courez le louer à votre club vidéo et vous reconnaîtrez dans son style, rempli d'humour, les raisonnements ardus de la logique des différents êtres imaginaires qui le peuplent.

4.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Déterminez si les deux propositions suivantes sont équivalentes et reliez-les par le symbole approprié.

   « Laura peut conduire une auto si elle a 16 ans. »
   « Laura ne peut pas conduire une auto si et seulement si elle n'a pas 16 ans. »

   Soit p : Laura a 16 ans;
   q : Laura peut conduire une auto.

   ....

   ....

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

....

....

2. Vérifiez si les propositions suivantes sont équivalentes et reliez-les par le symbole approprié.

a) $p \wedge \neg q$ et $\neg(p \rightarrow q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

b) $[(p \vee r) \rightarrow \neg q] \leftrightarrow \neg[(p \vee r) \wedge \neg(\neg q)]$

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	
Ordre			

Réponse : ....

c) $(\neg r \leftrightarrow p) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r)$

p	r	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

4.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Le typographe étant distrait, il nous a remis les tables de vérité ci-dessous. Trouvez les propositions qui manquent dans la première ligne.

a)

p	q	
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b)

p	q	
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c)

p	q	
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. Indiquez, en dressant leurs tables de vérité, si les propositions composées suivantes sont des implications ($\Rightarrow$), des équivalences ($\Leftrightarrow$) ou ni l'une ni l'autre ($\not\Rightarrow$ ou $\not\Leftrightarrow$).

a) $\neg p \rightarrow \neg q$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

b) $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : .... Réponse : ....

c) $(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

d) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

Réponse : ....

4.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Question d'association!

Nous savons que l'addition (+) ou la multiplication (×) sont des opérations associatives, c'est-à-dire que, quel que soit l'ordre dans lequel nous regroupons ces opérations, le résultat sera le même. Nous pouvons effectivement dire que $(3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2)$ ou encore que $5 \times (3 \times 4) = (5 \times 3) \times 4$.

Les opérateurs de la soustraction (–) et de la division (÷), quant à eux, ne sont pas associatifs. En effet, $(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2)$ et $(16 \div 4) \div 2 \neq 16 \div (4 \div 2)$.

L'opérateur $\rightarrow$ est-il associatif? Pour le savoir, dressez la table de vérité des propositions suivantes :

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \text{ et } [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

Si vous trouvez que ces deux propositions sont **équivalentes**, vous aurez prouvé que l'opération de la conditionnelle est associative, tout comme l'addition et la multiplication.

p	q	r	
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	
Ordre			

Réponse : ....

SOUS-MODULE 5

NÉGATION D'UNE PROPOSITION COMPOSÉE

5.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Coupable ou non coupable?

M. Bouchard fut emmené devant le juge sous une accusation de vol qualifié. Deux témoins vinrent témoigner. « Si vos témoignages concordent, leur dit le juge, je pourrai rapidement rendre mon verdict. »

Mme Hernandez fut la première à témoigner. Elle affirma : « Le soir du vol, M. Bouchard n'était pas à son appartement ou M. Bouchard n'était pas au restaurant. »

Quand arriva le tour de M. Pilon de se présenter à la barre, il déclara : « Au moment du vol, il est faux de dire que M. Bouchard était à son appartement et que M. Bouchard était au restaurant. »

Devant ces témoignages, le juge rendit son verdict immédiatement.

Auriez-vous pu faire de même si vous aviez été à la place du juge?

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable d'établir la négation d'une proposition composée de façon que l'opérateur logique de la négation ne modifie plus que les propositions simples.

Nous savons que des propositions composées contiennent au moins un des opérateurs logiques suivants : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$, comme nous l'avons étudié dans le premier sous-module. Nous étudierons dans ce sous-module comment nous pouvons nier de telles propositions composées tout en simplifiant la proposition originale. Nous trouverons donc la négation d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction et d'une conditionnelle, la négation d'une biconditionnelle ne faisant pas partie des objectifs de ce cours.

Nier une proposition composée est simple. Il s'agit, comme nous l'avons vu, d'ajouter une phrase telle « Il est faux de dire que... », « Il n'est pas vrai de dire que... », la phrase étant suivie de la proposition à nier.

Si, par exemple, au lieu d'affirmer : « Il est faux de dire que Pierre n'est pas un électricien », nous disons : « Pierre est un électricien », nous obtenons une proposition **équivalente** à notre proposition initiale qui s'en trouve du même coup simplifiée.

Cet exemple nous amène à définir la première négation d'une proposition composée : celle de la négation.

Négation d'une négation

? Vérifiez l'équivalence des deux propositions suivantes : $\neg(\neg p)$ et p en les reliant par la biconditionnelle.

p	$\neg$	$(\neg p)$	$\leftrightarrow$	p
V				
F				
Ordre				

Nous obtenons la table de vérité ci-dessous.

p	$\neg$	$(\neg p)$	$\leftrightarrow$	p
V	V	F	**V**	V
F	F	V	**V**	F
Ordre	2	1	**4**	3

Puisque la table de vérité de cette biconditionnelle est une tautologie, les deux propositions sont donc équivalentes.

Nous pouvons donc écrire $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$.

Négation d'une négation

L'équivalence $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ signifie que la négation d'une négation est une affirmation.

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p
Négation d'une négation.	$\Leftrightarrow$	Affirmation.
Il est faux de dire que la proposition p n'est pas vraie.	$\Leftrightarrow$	La proposition p est vraie.
Il est faux de dire que Pierre n'est pas un électricien.	$\Leftrightarrow$	Pierre est un électricien.

Négation d'une conjonction

Examinons les propositions suivantes.

Soit p : Simon est boulanger,

q : Simon est menuisier.

Traduisez en langage courant chacune des propositions ci-dessous.

? 1. $\neg p$ ....

2. $\neg q$ ....

3. $\neg(p \wedge q)$ ....

4. $\neg p \vee \neg q$ ....

Réponses

1. Simon n'est pas boulanger.
2. Simon n'est pas menuisier.
3. Il est faux de dire que Simon est boulanger et que Simon est menuisier.
4. Simon n'est pas boulanger ou Simon n'est pas menuisier.

Pensez-vous que ces deux dernières propositions sont équivalentes? Pour le certifier, nous ferons comme tout à l'heure, c'est-à-dire que nous joindrons ces deux propositions par une biconditionnelle et nous en vérifierons l'équivalence.

Complétez la table de vérité de $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						
Ordre							

Vérifiez votre table avec celle-ci.

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$
V	V	F	V	**V**	F	F	F
V	F	V	F	**V**	F	V	V
F	V	V	F	**V**	V	V	F
F	F	V	F	**V**	V	V	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

Les deux propositions sont équivalentes et nous pouvons écrire ce qui suit.

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Négation d'une conjonction

L'équivalence $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ signifie que la négation d'une conjonction est équivalente à la disjonction des négations.

$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee \neg q$
Négation d'une conjonction.	$\Leftrightarrow$	Disjonction des négations.
Il est faux de dire que la proposition $(p \wedge q)$ est vraie.	$\Leftrightarrow$	La proposition p est fausse ou la proposition q est fausse.
Il est faux de dire que Simon est boulanger et que Simon est menuisier.	$\Leftrightarrow$	Simon n'est pas boulanger ou Simon n'est pas menuisier.

Négation d'une disjonction

La négation d'une disjonction est très semblable à la négation d'une conjonction. En effet, nous n'avons qu'à changer les opérateurs $\vee$ et $\wedge$, et le tour est joué!

? Vérifiez par vous-même cette affirmation en dressant la table de vérité de $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p$	$\wedge$	$\neg q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						
Ordre							

Encore une fois, vérifiez votre table avec celle ci-dessous.

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg p$	$\wedge$	$\neg q$
V	V	F	V	**V**	F	F	F
V	F	F	V	**V**	F	F	V
F	V	F	V	**V**	V	F	F
F	F	V	F	**V**	V	V	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

Les deux propositions sont équivalentes et nous pouvons écrire ce qui suit.

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Négation d'une disjonction

L'équivalence $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ signifie que la négation d'une disjonction est équivalente à la conjonction des négations.

$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg p \wedge \neg q$
Négation d'une disjonction.	$\Leftrightarrow$	Conjonction des négations.
Il est faux de dire que la proposition $(p \vee q)$ est vraie.	$\Leftrightarrow$	La proposition p est fausse et la proposition q est fausse.
Il est faux de dire que Simon est boulanger ou que Simon est menuisier.	$\Leftrightarrow$	Simon n'est ni boulanger ni menuisier.

Passons maintenant à notre quatrième et dernière négation d'une proposition composée, celle d'une conditionnelle.

Négation d'une conditionnelle

Voyez la situation suivante.

Soit p : un nombre se termine par 2,

q : un nombre est pair.

Comment traduisons-nous en mots :

1. la conditionnelle $p \to q$? ....

....

2. la négation de cette conditionnelle $\neg(p \to q)$? ....

....

Réponses

1. Si un nombre se termine par deux, alors il est pair.
2. Il est faux de dire que si un nombre se termine par deux, alors il est pair.

Pouvez-vous trouver une autre façon de nier la conditionnelle sans utiliser la forme « Il est faux de dire que... »? ....

....

Avouons que ce n'est pas évident! La réponse est : « Un nombre se termine par deux et il n'est pas pair. » Nous allons vérifier cette proposition et voir si nous avons une équivalence.

Traduisez en langage logique la phrase : « Un nombre se termine par deux et il n'est pas pair. » ....

Réponse : $(p \wedge \neg q)$

Nous avons donc à dresser la table de vérité de $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

À vous de jouer!

p	q	$\neg$	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						
Ordre							

Êtes-vous arrivé à la même table de vérité que nous?

p	q	$\neg$	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	F	V	**V**	V	F	F
V	F	V	F	**V**	V	V	V
F	V	F	V	**V**	F	F	F
F	F	F	V	**V**	F	F	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

Puisqu'encore une fois les deux propositions sont équivalentes, nous pouvons les relier par le symbole de l'équivalence.

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Négation d'une conditionnelle

L'équivalence $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ signifie que la négation d'une conditionnelle est équivalente à la conjonction de la première proposition avec la négation de la deuxième.

$\neg(p \rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$p \wedge \neg q$
Négation d'une conditionnelle.	$\Leftrightarrow$	Conjonction de la première proposition avec la négation de la deuxième proposition.
Il est faux de dire que la proposition $(p \rightarrow q)$ est vraie.	$\Leftrightarrow$	La proposition p est vraie et la proposition q est fausse.
Il est faux de dire que si un nombre se termine par deux, alors il est pair.	$\Leftrightarrow$	Un nombre se termine par deux et il n'est pas pair.

Le tableau suivant permet de visualiser rapidement les quatre négations des propositions composées.

Négation de propositions composées

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Nous pouvons utiliser les équivalences trouvées pour dire d'une autre façon des phrases du langage courant.

Exemple 1

Soit la phrase suivante que nous devons écrire d'une autre manière.

« **Il est faux de dire que** Sam est riche **ou** que Tania est pauvre. »

$\neg \qquad (p \quad \vee \quad q)$

Puisque nous nous retrouvons avec la négation d'une disjonction, nous trouvons la proposition équivalente dans le tableau précédent.

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Nous n'avons plus qu'à traduire cette dernière proposition en langage courant.

« Sam n'est pas riche et Tania n'est pas pauvre. »

Exercice 5.1

1. En vous servant du tableau de négation des propositions composées, écrivez une phrase équivalente pour chacune des phrases suivantes.

a) Il est faux de dire que la Terre est ronde ou que le Soleil est une planète.

....

b) Il est faux de dire que le Soleil se couche s'il est 8 heures.

....

c) Il est faux de dire que le Soleil ne se couche pas.

....

d) Le Soleil se lève et il n'est pas 6 heures.

....

e) Il ne fait pas noir et il n'est pas 7 heures.

....

f) Il est faux de dire que le Soleil ne se lève pas.

....

2. Soit p : Anne adore le cinéma,
q : le cinéma coûte cher.

Exprimez les phrases suivantes de façon équivalente sans employer les mots « Il est faux de dire que... ».

a) Il est faux de dire que le cinéma coûte cher et qu'Anne adore le cinéma.

....

b) Il est faux de dire que si Anne adore le cinéma, alors celui-ci coûte cher.

....

c) Il est faux de dire que le cinéma ne coûte pas cher.

....

3. Soit p : j'achète une auto,
q : je vais à la campagne,
r : je suis heureux.

Utilisez les équivalences de la négation pour simplifier chacune des propositions composées suivantes et traduisez ensuite en langage courant la nouvelle proposition composée obtenue.

a) $\neg(p \vee r)$: ....

....

b) $\neg(r \rightarrow q)$: ....

....

c) $\neg(\neg q)$: ....

....

d) $\neg(r \wedge p)$: ....

....

e) $\neg(p \to q)$: ....

....

Les équivalences que nous venons de voir nous permettent de simplifier toute négation de propositions composées. Pourriez-vous trouver, avec les équivalences connues, la simplification de la proposition suivante?

$$\neg(p \vee \neg q)$$

Ce n'est certes pas évident! Mais voyons comment, en nous servant des équivalences connues et avec une méthode rigoureuse, nous pourrons la faire.

Exemple 2

Soit à simplifier $\neg(p \vee \neg q)$.

Nous avons $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q)$ (Négation d'une disjonction)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge q$ (Négation d'une négation)

D'où, $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$

Exemple 3

Soit à simplifier $\neg(p \to \neg q)$.

Nous avons $\neg(p \to \neg q) \Leftrightarrow p \wedge \neg(\neg q)$ (Négation d'une conditionnelle)

$\Leftrightarrow p \wedge q$ (Négation d'une négation)

D'où, $\neg(p \to \neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$

En fait, les simplifications que nous vous demanderons d'effectuer auront presque toutes les formes que vous venez de voir dans les deux exemples précédents. Suivez la méthode qui vous est proposée et vous trouverez que c'est simple!

Exercice 5.2

1. Complétez l'équivalence de façon à obtenir une proposition composée plus simple.

   a) $\neg(\neg q \rightarrow p)$

   Nous avons $\neg(\neg q \rightarrow p) \Leftrightarrow$ .... (Négation ....)

   D'où, $\neg(\neg q \rightarrow p) \Leftrightarrow$ ....

   b) $\neg(\neg q \wedge p)$

   Nous avons $\neg(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow$ .... (Négation ....)

   $\Leftrightarrow$ .... (Négation ....)

   D'où, $\neg(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow$ ....

2. Soit p : Claude a faim,
   q : Claude mange une pomme.

   Traduisez la phrase qui suit en langage logique, puis utilisez les équivalences sur la négation des propositions composées pour la simplifier.
   « Il est faux de dire que si Claude ne mange pas une pomme, alors il n'a pas faim. »

Saviez-vous que...

... Aristote a été l'un des premiers à traiter de logique? Cette branche des mathématiques n'a pratiquement pas progressé pendant des siècles. Tellement peu en fait que, vers 1965, un universitaire éminent aurait dit que rien de nouveau ne s'était fait en logique depuis Aristote!

5.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. En vous servant des quatre équivalences sur la négation des propositions composées, écrivez une phrase équivalente à chacune des phrases suivantes.

   a) Il est faux de dire que Michel est droitier et que Marc est gaucher.

   ....

   b) Il est faux de dire que le temps passe ou qu'il ne revient pas.

   ....

   c) Il est faux de dire que si nous voyons une hirondelle, alors c'est le printemps.

   ....

   d) La mer monte et les bateaux ne montent pas.

   ....

   e) Il est faux de dire que le bonheur ne s'achète pas.

   ....

2. Soit p : Pierre a 18 ans,
   q : Pierre joue au volley-ball.

   Exprimez les phrases suivantes de façon équivalente sans employer les mots « Il est faux de dire que... ».

   a) Il est faux de dire que si Pierre a 18 ans, alors il joue au volley-ball.

   ....

b) Il est faux de dire que Pierre a 18 ans et qu'il joue au volley-ball.

....

c) Il est faux de dire que Pierre joue au volley-ball ou qu'il a 18 ans.

....

d) Il est faux de dire que Pierre ne joue pas au volley-ball.

....

3. Soit p : Louise va au marché,
q : les tomates sont belles,
r : les épinards sont chers.

Utilisez les équivalences de la négation pour simplifier chacune des propositions composées suivantes et traduisez ensuite en langage courant la nouvelle proposition composée obtenue.

a) $\neg(p \vee r)$: ....

....

b) $\neg(r \rightarrow q)$: ....

....

c) $\neg(\neg q)$: ....

....

d) $\neg(r \wedge p)$: ....

....

e) $\neg(p \rightarrow q)$: ....

....

4. Complétez l'équivalence de façon à obtenir une proposition composée plus simple.

   a) $\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow$ ....

   ....

   ....

   b) $\neg(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow$ ....

   ....

   ....

5. Soit p : il fait noir,
   q : j'ai peur.

   Traduisez la phrase qui suit en langage logique, puis utilisez les équivalences sur la négation des propositions composées pour la simplifier.
   « Il est faux de dire qu'il ne fait pas noir et que je n'ai pas peur. »

   ....

   ....

5.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

Les cinq premiers sous-modules de ce cours nous ont entraînés dans le monde de la logique. Nous avons dû d'abord découvrir des **propositions** parmi une liste d'énoncés grammaticaux et avons appris à leur donner des **valeurs de vérité**. À partir de **propositions simples**, nous avons construit des **propositions composées** à l'aide des **opérateurs** logiques : ceux de la **négation**, de la **conjonction**, de la **disjonction**, de la **conditionnelle** et de la **biconditionnelle.** De plus, nous avons trouvé les **tables de vérité** de ces propositions composées après avoir établi les **règles de priorité** des opérateurs logiques.

Nous avons abordé, dans un deuxième temps, l'étude des propositions composées toujours vraies et toujours fausses que nous avons appelées respectivement **tautologie** et **contradiction**. À partir de propositions composées unies par la conditionnelle ou la biconditionnelle, nous avons défini l'**implication logique** et l'**équivalence logique**. Enfin, dans un dernier sous-module, nous nous sommes attardés sur la **négation** d'une proposition composée.

L'étude de la logique n'en est pas pour le moins terminée. Nous vous avons apporté des outils de travail qui vous seront utiles lors des sous-modules subséquents. Ne jetez pas vos tables de vérité à la poubelle! Vous verrez que nous les emploierons de façon un peu plus mathématique un peu plus tard dans ce module. En attendant, quoi de mieux qu'une bonne synthèse pour remettre tous ces concepts en place!

1. Trouvez, parmi les phrases suivantes, celles qui sont des propositions.

   a) Il a plu hier soir. ....
   b) Quel grand malheur! ....
   c) 38 est un nombre impair. ....
   d) C'était un grand homme. ....

e) Quel est le prix de ce pantalon? ....

f) La logique est une branche des mathématiques. ....

2. Trouvez la valeur de vérité des propositions suivantes si les deux propositions simples qui les composent sont fausses.

a) $p \vee q$ .... b) $p \wedge q$ ....

c) $p \rightarrow q$ .... d) $p \leftrightarrow q$ ....

3. a) Complétez la table de vérité suivante : $[p \wedge (p \rightarrow q\ )] \rightarrow q$.

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

b) Est-ce une tautologie? ....

c) Pourquoi? ....

....

d) Pouvons-nous écrire $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$? ....

e) Pouvons-nous écrire $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Leftrightarrow q$? ....

Pourquoi? ....

....

4. a) Dressez la table de vérité de $q \wedge (\neg p \wedge p)$.

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

b) Que pouvez-vous dire de cette proposition? ....

c) Pourquoi? ....

....

5. a) Reliez les propositions $(p \rightarrow q)$ et $(q \rightarrow p)$ par la biconditionnelle $\leftrightarrow$. Dressez la table de vérité de cette proposition.

p	q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
Ordre		

b) Que pouvez-vous dire de cette proposition? ....

c) Pouvons-nous écrire $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$? ....

6. Complétez les négations des propositions suivantes.

a) $\neg(p \rightarrow q) \quad \Leftrightarrow$ .... b) $\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow$ ....

c) $\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad$ .... d) $\neg(\neg p) \quad \Leftrightarrow \quad$ ....

7. En vous référant aux négations des propositions composées, complétez l'équivalence suivante.

$\neg(\neg p \vee \neg q) \quad \Leftrightarrow \quad$ .... Négation ....

$\Leftrightarrow \quad$ .... Négation ....

D'où, $\neg(\neg p \vee \neg q) \quad \Leftrightarrow \quad$ ....

8. Dans le préambule de ce sous-module, nous vous soumettions le cas de M. Bouchard qui se retrouvait devant le juge pour vol qualifié. Montrez que le juge a pu rendre un verdict rapidement dans ce cas-ci en expliquant votre démarche.
Suggestion : démontrez que les deux témoignages sont équivalents.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Une récréation... logique

Quatre couples se rencontrent pour passer quelques jours à la montagne. Leurs prénoms sont Annick, Béatrice, Chantal et Danielle chez les femmes. Leurs maris s'appellent André, Byron, Charles et Denis, mais pas nécessairement dans cet ordre.

Samedi matin, tout le monde choisit une activité. La femme d'André va faire du vélo avec le mari d'Annick. Denis et Danielle n'ont jamais fait de vélo et vont se promener dans la montagne. Byron, qui n'est pas le mari de Danielle, ramasse des fruits sauvages avec Chantal. Les autres se préparent pour aller à la pêche.

Qui est la femme de Denis?

SOUS-MODULE 6

PROPOSITIONS, FORMES PROPOSITIONNELLES ET ENSEMBLE-SOLUTION D'UNE FORME PROPOSITIONNELLE

6.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Logique et inéquations?

Lors de son dernier cours d'algèbre, Simon a appris à résoudre des équations et des inéquations. En se penchant sur ces dernières, il se demande s'il n'est pas possible de trouver une solution commune à deux inéquations données.

Par exemple, soit les inéquations $3x - 2 < 12$ et $4x + 1 > 10$.

Il se demande s'il existe un ou plusieurs nombres naturels qui soient à la fois la solution des deux inéquations. Évidemment, il peut trouver des solutions par la méthode du tâtonnement, la méthode algébrique ou encore la méthode graphique.

Mais savez-vous que la logique peut lui fournir un mode de résolution de ce genre de problème... et de bien d'autres?

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable de déterminer parmi des énoncés ceux qui sont des propositions et ceux qui sont des formes propositionnelles. De plus, étant donné un *ensemble de référence*, vous devrez pouvoir décrire en *extension* l'*ensemble-solution* d'une forme propositionnelle simple ou d'une forme propositionnelle composée de deux formes propositionnelles simples reliées par un opérateur logique.

6.1.1 Propositions et formes propositionnelles

Vous avez vu dans le premier sous-module de ce cours ce qu'est une proposition. Nous avons aussi brièvement parlé de ce qu'est une **forme propositionnelle** sans en donner une définition. Après avoir étudié les propositions et leurs valeurs de vérité, nous allons définir ici ce que sont les formes propositionnelles et trouver leur **ensemble-solution**.

Rappelons-nous ceci : une proposition est un énoncé qui peut être soit vrai, soit faux, mais pas les deux à la fois. Ainsi, « 5 est un nombre pair » est une proposition qui est fausse, tandis que $7 > 3$ est une proposition qui est vraie.

Si nous affirmons que « x est inférieur à 12 », nous avons une forme propositionnelle, car cet énoncé est vrai si la ***variable*** x prend des valeurs plus petites que 12, mais faux si les valeurs de cette variable sont égales ou supérieures à 12.

Une variable est une lettre ou encore un mot qui peut prendre différentes valeurs.

Une **forme propositionnelle** est un énoncé qui renferme une ou plusieurs variables et qui peut devenir une proposition vraie ou fausse selon les valeurs de ces variables.

Exemples 1

a) Soit la forme propositionnelle : « x est un carré. »

- Si nous remplaçons la variable x par les valeurs 1, 4, 9, 16 ou 25 (entre autres), cette forme propositionnelle devient une proposition vraie.
- Si nous remplaçons x par 2, 19, 37 ou 59, cette forme propositionnelle devient une proposition fausse.

b) Soit la forme propositionnelle : « Il a été premier ministre du Québec. »

- Si la variable Il est remplacée par Adélard Godbout, Maurice Duplessis ou René Lévesque, nous obtenons une proposition vraie.
- Si nous remplaçons Il par Brian Mulroney, Jean Chrétien ou Votre Nom, alors cette proposition devient fausse.

Un forme propositionnelle peut aussi contenir plus de une variable.

Soit « x est le carré de y ». C'est une forme propositionnelle qui contient deux variables, x et y. « 100 est le carré de 10 » devient une proposition vraie et « 50 est le carré de 7 », une proposition fausse.

Soit la forme propositionnelle « a est le double de b ». Cette forme propositionnelle devient-elle une proposition vraie ou une proposition fausse :

? si a vaut 20 et b vaut 10? ....
? si a vaut 10 et b vaut 20? ....
? si a vaut 5 et b vaut 7? ....

Réponse

La première est vraie et les deux autres sont fausses.

Exercice 6.1

1. Parmi les énoncés suivants, déterminez les propositions et les formes propositionnelles. Dans le cas des propositions, indiquez si elles sont vraies ou fausses et, dans le cas des formes propositionnelles, écrivez la ou les variables utilisées.

   a) 25 est le cube de 3 : ....

   b) x est divisible par 2 : ....

   c) Elle mesure 1,80 m : ....

d) a et b sont des nombres pairs : ....

e) 8 est inférieur à 10 : ....

f) Il a 30 ans : ....

g) Il y a n côtés dans un triangle : ....

h) 23 est un diviseur de z : ....

i) 25 est un multiple de 5 : ....

j) m est un nombre entier : ....

2. Dans chacune des formes propositionnelles suivantes, trouvez une valeur de la variable qui transforme la forme propositionnelle en proposition vraie et une autre valeur qui la transforme en proposition fausse.

	Vraie	Fausse
a) x est un nombre pair.	....	....
b) a est plus grand que 9.	....	....
c) n est un multiple de 5.	....	....
d) $x - 2 < 4$	....	....
e) $3x - 1$ est un nombre impair.	....	....

Les formes propositionnelles utilisent, tout comme les propositions, un langage symbolique particulier. Pour identifier les propositions, nous avons utilisé les lettres minuscules p, q et r. Pour identifier les formes propositionnelles, nous utiliserons cette fois-ci les lettres majuscules P, Q et R. Nous noterons alors les formes propositionnelles de la façon suivante.

$P(x)$: x est un nombre premier,
$Q(a)$: a est un nombre pair,
$R(elle)$: *Elle* est née à Montréal.

rappel

Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et par lui-même. Conséquemment, il possède exactement deux diviseurs.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... sont des nombres premiers.

Dans la forme propositionnelle « $P(x)$: x est un nombre premier », nous notons par $P(2)$, $P(4)$ et $P(5)$ les propositions obtenues en remplaçant x successivement par 2, 4 et 5. Nous obtenons ce qui suit.

$P(2)$: 2 est un nombre premier. Proposition vraie.
$P(4)$: 4 est un nombre premier. Proposition fausse.
$P(5)$: 5 est un nombre premier. Proposition vraie.

Nous voyons ainsi que, selon la valeur donnée à la variable, nous obtenons des propositions qui sont vraies ou des propositions qui sont fausses.

Dans la proposition « $Q(a)$: a est un nombre pair », remplacez a par les valeurs 9, 12 et 18 et donnez la valeur de vérité des propositions obtenues.

Réponse

- $Q(9)$: 9 est un nombre pair. C'est une proposition fausse.
- $Q(12)$: 12 est un nombre pair. C'est une proposition vraie.
- $Q(18)$: 18 est un nombre pair. C'est une proposition vraie.

Les formes propositionnelles vues jusqu'à maintenant étaient des formes propositionnelles simples. Nous pouvons maintenant, à l'aide des opérateurs logiques, former des formes propositionnelles composées comme nous l'avons fait précédemment avec des propositions simples.

Soit les formes propositionnelles suivantes.

$P(x)$: x est un nombre impair,

$Q(x)$: x est un multiple de 3,

$R(x)$: x est un diviseur de 12.

Les formes propositionnelles simples $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ donneront, entre autres, les formes propositionnelles composées ci-dessous.

Forme propositionnelle composée	Langage courant
$P(x) \wedge Q(x)$	x est un nombre impair et un multiple de 3.
$R(x) \leftrightarrow \neg P(x)$	x est un diviseur de 12 si et seulement si il n'est pas un nombre impair.
$P(x) \vee Q(x)$	x est un nombre impair ou un multiple de 3.
$P(x) \rightarrow R(x)$	Si x est un nombre impair, alors c'est un diviseur de 12.

Traduisez les formes propositionnelles composées suivantes.

? $\neg(P(x) \wedge R(x))$ ....

....

? $\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x)$ ....

....

Réponses

- Il est faux de dire que x est un nombre impair et un diviseur de 12.
- Si x n'est pas un diviseur de 12, alors il n'est pas un multiple de 3.

Évidemment, nous pouvons aussi à partir du langage courant traduire des phrases en utilisant le langage symbolique.

La phrase « Si un nombre x est impair et un multiple de 3, alors c'est un diviseur de 12 » se traduit par :

$$(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)$$

? Traduisez la phrase suivante en utilisant le langage symbolique : « Un nombre x est un diviseur de 12 si et seulement si il n'est pas impair ou un multiple de 3. » ....

Réponse : $R(x) \leftrightarrow (\neg P(x) \vee Q(x))$

À vous de jouer au traducteur!

Exercice 6.2

1. Soit les formes propositionnelles suivantes.
   $P(x) : x > 0$,
   $Q(x) : x$ est entier,
   $R(x) : x$ est pair.

   Symbolisez les formes propositionnelles composées suivantes.

   a) x est entier et supérieur à 0. ....

   b) x est pair ou entier. ....

   c) Si x est pair, alors il est plus grand que 0. ....

   d) x n'est pas entier mais il est plus grand que 0. ....

   e) x n'est pas pair si et seulement si il n'est pas plus grand que 0.

   ....

   f) Il est faux de dire que $x > 0$ ou pair. ....

2. En utilisant les mêmes formes propositionnelles que dans le numéro précédent, écrivez en langage courant les formes propositionnelles composées suivantes.

   a) $\neg P(x) \vee R(x)$ ....

   ....

   b) $R(x) \leftrightarrow Q(x)$ ....

   ....

c) $(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)$ ....

....

d) $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ ....

....

e) $P(x) \vee (R(x) \wedge Q(x))$ ....

....

6.1.2 Ensemble-solution d'une forme propositionnelle

Maintenant que les formes propositionnelles simples et composées vous sont familières, nous allons tenter de trouver des « réponses » à ces formes propositionnelles.

Par exemple, quand nous avons la forme propositionnelle « x est un nombre impair ou un nombre premier », nous devons chercher quelles sont les valeurs de x qui rendent cette forme propositionnelle vraie. Mais avant d'en arriver là, il nous reste encore une notion à aborder : celle d'**ensemble de référence**.

Considérons la forme propositionnelle : « Il est premier ministre. »

C'est évident ici que nous ne pouvons remplacer la variable Il par le nombre 5, par exemple! La phrase n'aurait aucun sens. La variable peut, par contre, être remplacée par le nom de l'un des premiers ministres provinciaux du Canada ou, encore, par le nom du premier ministre du Canada ou d'un autre pays.

Si nous parlons du Canada, l'ensemble de référence est alors l'ensemble de tous les premiers ministres de chaque province et du Canada, tandis que si nous parlons du Québec, l'ensemble de référence ne comporte qu'un nom, soit celui du premier ministre actuel du Québec. Il est donc toujours important de savoir à quoi ou à qui la variable fait référence avant de trouver ses valeurs.

Nous notons la plupart du temps l'ensemble de référence en utilisant la lettre U et nous utilisons le langage des ensembles pour noter en extension les éléments de cet ensemble de référence. L'ensemble de référence est aussi appelé ***référentiel*** ou **ensemble universel**.

U = {1, 2, 3, 4, 5} signifie que l'ensemble de référence est U et que cet ensemble comprend les nombres de 1 à 5.

Un ensemble est formé d'éléments que nous énumérons les uns à la suite des autres en les séparant par des virgules et en les plaçant entre accolades.

L'**ensemble de référence** d'une forme propositionnelle est l'ensemble de toutes les valeurs possibles que peut prendre la variable.

Si nous avons la forme propositionnelle $P(x)$: x est un nombre pair et l'ensemble de référence U = {1, 2, 3, 4, 5}, nous pouvons trouver toutes les valeurs de la variable qui sont dans l'ensemble de référence U et qui rendent cette forme propositionnelle vraie. En effet, nous n'avons qu'à remplacer la variable x par chacun des éléments de l'ensemble U dans la forme propositionnelle et voir si la forme propositionnelle devient vraie.

P(1) : 1 est un nombre pair. Proposition fausse.
P(2) : **2 est un nombre pair. Proposition vraie.**
P(3) : 3 est un nombre pair. Proposition fausse.
P(4) : **4 est un nombre pair. Proposition vraie.**
P(5) : 5 est un nombre pair. Proposition fausse.

Les nombres 2 et 4 sont les deux seuls éléments de l'ensemble U qui rendent la proposition vraie. Nous disons alors que {2, 4} est **l'ensemble-solution** de la forme propositionnelle $P(x)$.

Nous notons habituellement cet ensemble-solution par la lettre S. Nous écrivons donc S = {2, 4}.

> L'**ensemble-solution** d'une forme propositionnelle est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable pour transformer la forme propositionnelle en proposition vraie par rapport à un ensemble de référence donné.

? Si l'ensemble de référence est U = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} au lieu de U = {1, 2, 3, 4, 5}, l'ensemble-solution de $P(x)$ est-il le même?

Non. L'ensemble-solution est alors {2, 4, 6, 8, 10} puisque maintenant les éléments 6, 8, et 10 sont ajoutés à l'ensemble de référence.

Exemple 2

Soit l'ensemble de référence U = {3, 6, 9, 13, 15, 17} et la forme propositionnelle $Q(x)$: x est un nombre premier. Trouvons l'ensemble-solution.

Trouvons la valeur de vérité de $P(3), P(6), \ldots, P(17)$ en substituant à la variable x chacun des éléments de l'ensemble de référence.

P(3). Proposition vraie.
P(6). Proposition fausse.
P(9). Proposition fausse.
P(13). Proposition vraie.
P(15). Proposition fausse.
P(17). Proposition vraie.

Donc, S = {3, 13, 17}.

L'ensemble de référence n'est pas toujours donné sous la forme de U = {...}. Par exemple, nous pouvons énoncer que l'ensemble de référence est :

- l'ensemble des nombres naturels ($\mathbb{N}$),
- l'ensemble des nombres rationnels ($\mathbb{Q}$),
- l'ensemble des jours de la semaine,
- l'ensemble des lettres du mot Mississippi,
- l'ensemble des entiers compris entre 12 et 24,
- l'ensemble des multiples de 3 qui sont inférieurs à 19.

Nous pouvons aussi avoir des formes propositionnelles composées contenant plus de une variable. Voyons l'exemple ci-dessous.

Exemple 3

Soit l'ensemble de référence $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Trouvons l'ensemble-solution de $P(x, y)$: x est le double de y.

Trouvons tous les couples (x, y) dans lesquels x est le double de y, les deux éléments du couple devant se trouver dans le référentiel $\mathbb{N}^*$.

- $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ est une proposition fausse puisque $\frac{1}{2}$ n'est pas dans le référentiel $\mathbb{N}^*$.
- $P(2, 1)$ est une proposition vraie.
- $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ est une proposition fausse puisque $\frac{3}{2}$ n'est pas dans le référentiel $\mathbb{N}^*$.
- $P(4, 2)$ est une proposition vraie.
- $P\left(5, \frac{5}{2}\right)$ est une proposition fausse puisque $\frac{5}{2}$ n'est pas dans le référentiel $\mathbb{N}^*$.
- $P(6, 3)$ est une proposition vraie.

  $\vdots$

Nous en déduisons que l'ensemble-solution contient tous les couples qui commencent par un nombre pair et dont le deuxième élément est la moitié du premier.

Nous écrivons donc S = {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), ...}.

Quelques exercices vous permettront de voir si vous avez bien assimilé les dernières notions.

Exercice 6.3

1. Soit $P(x)$: x est un facteur de 12 et U = {3, 4, 5, 6, 7}. Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes et donnez l'ensemble-solution S.

   a) $P(3)$ .... b) $P(4)$ .... c) $P(5)$ ....
   d) $P(6)$ .... e) $P(7)$ .... S = ...

2. Soit $P(x)$: x est un multiple de 5. Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions si l'ensemble de référence est $\mathbb{N}$ et donnez l'ensemble-solution S.

   a) $P(0)$ .... b) $P(8)$ .... c) $P(10)$ .... d) $P(50)$ ....
   e) $P(74)$ .... f) $P(1000)$ .... S = ...

3. Trouvez l'ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles suivantes si U est l'ensemble des nombres naturels plus petits que 10.

   a) $P(x)$: x est un nombre impair. S = ...
   b) $P(x)$: x est un nombre pair. S = ...
   c) $P(x)$: $x > 4$ S = ...
   d) $P(x)$: $x \leq 0$ S = ...
   e) $P(x)$: x est un nombre premier. S = ...
   f) $P(x)$: x est un multiple de 4. S = ...

g) $P(x)$: x est un diviseur de 24. S = ...

h) $P(x) : x + 5 < 12$ S = ...

4. Soit $Q(x, y) : x + y = 18$ et U = {1, 2, 3, ..., 12}. Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

   a) $P(8, 10)$:...... b) $P(3, 15)$: .... c) $P(5, 13)$: .... d) $P(7, 1)$: ....

Nous sommes désormais en mesure de trouver l'ensemble-solution de formes propositionnelles composées. Vous constaterez que la démarche ressemble beaucoup à celle que nous avons utilisée pour trouver la valeur de vérité d'une proposition.

Exemple 4

Soit $P(x) : 2x + 1 < 8$,
$Q(x)$: x est un nombre impair.

Si l'ensemble de référence est {0, 1, 2, 3, 4, 5}, trouvons l'ensemble-solution de la forme propositionnelle $P(x) \wedge Q(x)$.

1° Dressons une table de vérité dans laquelle la première colonne contient les éléments de l'ensemble de référence.

Élément du référentiel	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

2° Les deuxième et troisième colonnes contiennent les valeurs de vérité de $P(x)$ et $Q(x)$, tandis qu'ici notre dernière colonne renferme la valeur de vérité de la forme propositionnelle composée $P(x) \wedge Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
0			
1			
2			
3			
4			
5			

3° Complétons maintenant la colonne $P(x)$ en substituant chacun des éléments du référentiel dans la forme propositionnelle $P(x) : 2x + 1 < 8$.

P(0) : 2(0) + 1 < 8. Proposition **vraie.**
P(1) : 2(1) + 1 < 8. Proposition **vraie.**
P(2) : 2(2) + 1 < 8. Proposition **vraie.**
P(3) : 2(3) + 1 < 8. Proposition **vraie.**
P(4) : 2(4) + 1 < 8. Proposition **fausse.**
P(5) : 2(5) + 1 < 8. Proposition **fausse.**

4° Inscrivons ces résultats dans la colonne $P(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
0	V		
1	V		
2	V		
3	V		
4	F		
5	F		

5° Complétons ensuite la colonne $Q(x)$ en substituant chacun des éléments du référentiel dans la forme propositionnelle $Q(x)$: x est un nombre impair.

Q(0) : 0 est un nombre impair. Proposition **fausse.**
Q(1) : 1 est un nombre impair. Proposition **vraie.**
Q(2) : 2 est un nombre impair. Proposition **fausse.**
Q(3) : 3 est un nombre impair. Proposition **vraie.**
Q(4) : 4 est un nombre impair. Proposition **fausse.**
Q(5) : 5 est un nombre impair. Proposition **vraie.**

6° Inscrivons les résultats dans la colonne $Q(x)$ selon les valeurs de vérité trouvées.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
0	V	F	
1	V	V	
2	V	F	
3	V	V	
4	F	F	
5	F	V	

7° Complétons la table de vérité de la conjonction, comme nous l'avons fait dans les sous-modules précédents.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
0	V	F	F
1	V	V	V
2	V	F	F
3	V	V	V
4	F	F	F
5	F	V	F

8° La dernière colonne nous indique les éléments de l'ensemble-solution de la forme propositionnelle $P(x) \wedge Q(x)$. Nous pouvons écrire S = {1, 3}.

Qu'est-ce qui différencie la table de vérité des formes propositionnelles de la table de vérité des propositions? Dans la table de vérité des formes propositionnelles, nous indiquons les éléments de l'ensemble de référence et nous devons vérifier leurs valeurs de vérité dans les formes propositionnelles données. Pour le reste, nous procédons de la même façon que lors des tables de vérité des propositions en ce qui a trait, entre autres, aux tables de vérité des propositions composées et aux priorités des opérations.

Voyons si vous pouvez trouver l'ensemble-solution avec un autre exemple. Nous nous contenterons des principales étapes de la démarche puisque les opérateurs logiques vous sont déjà familiers.

Exemple 5

Soit U = {2, 5, 6, 7, 8, 9, 10},
$P(x)$: x est un diviseur de 10,
$Q(x)$: x est un nombre premier.

Dressons l'ensemble-solution de $\neg(P(x) \vee \neg Q(x))$.

1° Dressons un tableau en y insérant dans la première colonne les éléments du référentiel. Nous y ajoutons aussi une dernière ligne pour indiquer l'ordre dans lequel nous complétons les colonnes, comme dans les tables de vérité des propositions composées.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\vee \neg$	$Q(x))$
2						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
Ordre	1	2	6	3	5	4

2° Complétons les colonnes $P(x)$ et $Q(x)$ en substituant à la variable x les différentes valeurs de l'ensemble de référence.

$P(x)$: x est un diviseur de 10.
$P(2)$: 2 est un diviseur de 10. Proposition vraie.
$P(5)$: 5 est un diviseur de 10. Proposition vraie.
$P(6)$: 6 est un diviseur de 10. ....
$P(7)$: 7 est un diviseur de 10. ....
$P(8)$: 8 est un diviseur de 10. ....
$P(9)$: 9 est un diviseur de 10. ....
$P(10)$: 10 est un diviseur de 10. ....

$Q(x)$: x est un nombre premier.
$Q(2)$: 2 est un nombre premier. Proposition vraie.
$Q(5)$: 5 est un nombre premier. Proposition vraie.
$Q(6)$: 6 est un nombre premier. ....
$Q(7)$: 7 est un nombre premier. ....
$Q(8)$: 8 est un nombre premier. ....
$Q(9)$: 9 est un nombre premier. ....
$Q(10)$: 10 est un nombre premier. ....

Les réponses sont indiquées dans la table de vérité qui suit.

3° Complétez la table de vérité en suivant l'ordre des colonnes indiqué et en consultant, s'il y a lieu, les tables de vérité des opérateurs logiques.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$
2	V	V				
5	V	V				
6	F	F				
7	F	V				
8	F	F				
9	F	F				
10	V	F				
Ordre	1	2	6	3	5	4

Voici le tableau final que vous devriez obtenir. Les éléments de l'ensemble-solution se trouvent sur les lignes de la colonne 6 pour lesquels les résultats sont vrais.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$
2	V	V	**F**	V	V	F
5	V	V	**F**	V	V	F
6	F	F	**F**	F	V	V
7	F	V	**V**	F	F	F
8	F	F	**F**	F	V	V
9	F	F	**F**	F	V	V
10	V	F	**F**	V	V	V
Ordre	1	2	**6**	3	5	4

4° Dans ce cas-ci, un seul élément se retrouve dans l'ensemble-solution. Nous écrivons S = {7}.

Dans les exercices qui suivent, nous vous demandons de trouver l'ensemble-solution de diverses formes propositionnelles composées. Il n'est pas nécessaire d'écrire en détail ce que vous faites pour y arriver, mais vous devez par contre compléter entièrement les tables de vérité et indiquer clairement l'ensemble-solution.

Exercice 6.4

1. Trouvez l'ensemble-solution des formes propositionnelles composées dans lesquelles U = {1, 2, 3, 4, 5, 6},

   $P(x)$: x est un nombre pair,

   $Q(x)$: $x \leq 3$,

   $R(x)$: $x + 1 > 4$.

   a) $\neg P(x) \rightarrow Q(x)$

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\rightarrow$	$Q(x)$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
Ordre					

S = ...

b) $P(x) \leftrightarrow \neg R(x)$

Élément du référentiel	$P(x)$	$R(x)$	$P(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg R(x)$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
Ordre					

S = ...

c) $(R(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow Q(x)$

Élément du référentiel	$R(x)$	$Q(x)$	$(R(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$	$\rightarrow$	$Q(x)$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
Ordre							

S = ...

2. Soit U = {0, 4, 5, 16, 20, 25, 30},

   $P(x, y)$: x est la racine carrée de y,

   $Q(x, y)$: x est un multiple de y.

   a) Donnez la valeur de vérité de $P(16, 4)$: ....

   b) Donnez la valeur de vérité de $Q(16, 4)$: ....

   c) Donnez la valeur de vérité de $Q(25, 0)$: ....

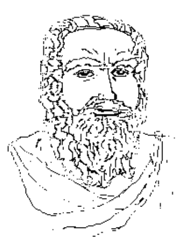
   d) Donnez la valeur de vérité de $P(30, 5)$: ....

   e) Donnez la valeur de vérité de $P(16, 4) \wedge Q(16, 4)$: ....

   f) Donnez la valeur de vérité de $P(16, 4) \rightarrow P(16, 4)$: ....

   g) Donnez la valeur de vérité de $P(30, 5) \vee Q(25, 0)$: ....

   h) Donnez la valeur de vérité de $P(30, 5) \leftrightarrow \neg Q(30, 5)$: ....



Saviez-vous que...

... G. Boole (1815-1864), logicien et mathématicien anglais, doit être considéré comme le véritable créateur de la logique symbolique moderne? Les ordinateurs d'aujourd'hui incarnent dans leurs circuits la logique de Boole. Et dire qu'à l'époque, cette logique n'avait intéressé personne, sinon quelques rares spécialistes, tant cette théorie très abstraite des propositions logiques semblait alors pure invention!

6.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Parmi les énoncés suivants, déterminez les propositions et les formes propositionnelles. Dans le cas des propositions, indiquez si elles sont vraies ou fausses et, dans le cas des formes propositionnelles, écrivez la ou les variables utilisées.

   a) 5 est un diviseur de 10 : ....

   b) y est le carré de 2 : ....

   c) x est la moitié de y: ....

   d) 8 est le triple de z : ....

2. Soit $P(x)$: x est impair,
   $Q(x)$: x est un nombre naturel,
   $R(x)$: $x > 7$.

   Symbolisez les formes propositionnelles composées suivantes.

   a) x est un nombre naturel supérieur à 7. ....

   b) x n'est pas un nombre impair. ....

   c) Si $x > 7$, alors il est impair ou naturel. ....

   d) x est un nombre naturel si et seulement si il est supérieur à 7 ou n'est pas impair. ....

3. En utilisant les mêmes formes propositionnelles que dans le numéro précédent, écrivez en langage courant les formes propositionnelles composées suivantes.

   a) $\neg P(x) \vee R(x)$ ....

   ....

   b) $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ ....

   ....

   c) $Q(x) \leftrightarrow \neg R(x)$ ....

   ....

4. Soit $P(x)$: x est un multiple de 8 et U = {8, 15, 16, 26, 56}. Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

   a) $P(8)$ .... b) $P(15)$ ....

   c) $P(64)$ .... d) $P(56)$ ....

5. Soit $P(x, y)$: $x - y = 3$ et U = {1, 2, 3, ..., 10}. Trouvez la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

   a) $P(8, 5)$ .... b) $P(5, 8)$ ....

   c) $P(10, 7)$ .... d) $P(12, 9)$ ....

6. Trouvez l'ensemble-solution des formes propositionnelles composées dans lesquelles U = {4, 5, 6, 7, 8, 9},

   $P(x)$: $x - 4 < 4$,

   $Q(x)$: $x \geq 3$,

   $R(x)$: x est un nombre premier.

a) $P(x) \rightarrow \neg Q(x)$

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$	$\rightarrow$	$\neg Q(x)$
4					
5					
6					
7					
8					
9					
Ordre					

S = ...

b) $Q(x) \leftrightarrow (Q(x) \vee \neg R(x))$

Élément du référentiel	$Q(x)$	$R(x)$	$Q(x)$	$\leftrightarrow$	$(Q(x)$	$\vee$	$\neg R(x))$
4							
5							
6							
7							
8							
9							
Ordre							

S = ...

6.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Quelle différence faites-vous entre une proposition et une forme propositionnelle? ....

....

2. Dites si les énoncés suivants représentent :
   1° une proposition simple,
   2° une proposition composée,
   3° une forme propositionnelle simple,
   4° une forme propositionnelle composée,
   5° aucune des quatre premières réponses.

   a) x est plus grand que y. ....

   b) 3 est un nombre impair et un nombre premier. ....

   c) Si $x > 0$, alors c'est un nombre positif. ....

   d) 5 n'est pas plus petit que 4. ....

   e) $7^3 + 3^2$ ....

3. Soit U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10},
   $P(x, y)$: x est le carré de y,
   $Q(x, y)$: x est le triple de y.

   a) Traduisez sous forme symbolique : Il est faux de dire que si x est le triple de y, alors ce n'est pas son carré. ....

b) Trouvez la valeur de vérité de :

1° $P(3, 9)$ .... 2° $P(9, 3)$..

3° $Q(9, 3)$.................................. 4° $P(9, 3) \wedge Q(9, 3)$ ....

c) Pourquoi $Q(12, 4)$ est-elle une proposition fausse? ....

....

d) Écrivez deux couples $P(x, y)$ qui sont vrais. ....

e) Écrivez deux couples $Q(x, y)$ qui sont vrais. ....

4. Soit U = {1, 2, 4, 7, 9, 16, 25},
$P(x) : x \leq 6$,
$Q(x)$: x est facteur de 16,
$R(x)$: x est un carré.

a) Traduisez sous forme symbolique : Si x est un carré, alors c'est un facteur de 16 inférieur ou égal à 6. ....

b) Traduisez en langage courant $R(x) \vee \neg P(x)$. ....

....

c) Dressez la table de vérité de la forme propositionnelle $R(x) \vee \neg P(x)$.

Élément du référentiel			
Ordre			

d) Quel est l'ensemble-solution de cette forme propositionnelle?

....

5. Nous avons dit au début de ce sous-module que la logique pouvait nous donner un moyen de trouver des solutions communes à des inéquations données. Nous avions les inéquations :

$$3x - 2 < 12 \text{ et } 4x + 1 > 10$$

Appelons $P(x)$ la première forme propositionnelle et $Q(x)$ la deuxième. En prenant U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, trouvez l'ensemble-solution de la forme propositionnelle composée $P(x) \wedge Q(x)$ et vous aurez trouvé du même coup les solutions communes aux deux inéquations.

Élément du référentiel			
Ordre			

6.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

L'anniversaire de Louise

Apprenant que c'est l'anniversaire de Louise au mois d'octobre prochain, Serge veut connaître sa date de naissance exacte pour lui faire une surprise. Aucune des amies de Louise n'a voulu lui donner la date de son anniversaire, mais chacune a tout de même consenti à lui donner un indice quant à cette date.

Johanne a affirmé : « C'est un nombre impair. »
Lorraine a affirmé : « Ce n'est pas un carré. »
Mance a affirmé : « C'est un cube. »
Pierrette a affirmé : « C'est un nombre plus grand que 13. »
Carole a affirmé : « C'est un nombre plus petit que 17. »

Serge a finalement appris que 4 d'entre elles mentaient! Pouvez- vous l'aider à trouver à quelle date cet anniversaire aura lieu?

SOUS-MODULE 7

VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE FORME PROPOSITIONNELLE COMPOSÉE QUANTIFIÉE

7.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Qui a raison?

Mario et Kamal sont dans la même classe depuis des années. Ils aiment beaucoup se taquiner et, surtout, résoudre des petits problèmes mathématiques.

Mario affirmait à son ami Kamal l'autre jour : « **Tous** les cubes plus petits que 500 sont des nombres impairs ou des multiples de 4. » Kamal affirmait plutôt : « Il n'y a qu'**un et un seul** cube plus petit que 500 qui soit un nombre pair et non un multiple de 4. »

Qui a raison, Mario ou Kamal? Ou auraient-ils tous les deux tort?

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez, étant donné un ensemble de référence, être capable de déterminer la valeur de vérité d'une forme propositionnelle quantifiée en respectant la priorité des opérateurs logiques. Les étapes de la résolution du problème ainsi que l'ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles sont exigés.

7.1.1 Quantificateur existentiel et quantificateur universel

Dans le langage courant, nous employons régulièrement des énoncés semblables à ceux de Mario et de Kamal, comme dans les formes propositionnelles suivantes.

« **Il y a au moins un** Québécois sur trois qui fume. »
« **Tous** les millionnaires sont heureux. »
« **Certains** professeurs sont érudits. »
« **Il existe au moins un** endroit tranquille. »
« **Quelques** personnes ne sont pas venues. »
« **Il n'y a qu'une** ville qui s'appelle Paris. »

Toutes ces expressions nous donnent une idée de quantité. C'est pourquoi nous les appelons des ***quantificateurs***. Puisque nous pouvons donner une valeur de vérité à ces énoncés, ces formes propositionnelles deviennent des propositions.

> Une forme propositionnelle devient une proposition si elle contient un quantificateur.

Il existe trois types de quantificateur reliés à l'ordre de grandeur qu'ils expriment.

- Le **quantificateur universel** qui exprime la totalité : pour tout, tous, toutes, etc.

- Le **quantificateur existentiel** qui exprime l'existence : certains, quelques, au moins un, etc.

- Le **quantificateur existentiel d'unicité** qui exprime l'existence d'un seul : un et un seul.

Voyons de plus près chacun de ces quantificateurs.

Le quantificateur universel

Le symbole utilisé pour représenter ce quantificateur est $\forall$. Ce symbole veut dire : **pour tout** élément du référentiel.

Soit la proposition : Tous les Montréalais aiment la ville.

Cela signifie que, **quel que soit l'élément** du référentiel choisi, cet élément aime la ville. Cette proposition comprend donc deux parties.

Pour tout élément du référentiel x,	x aime la ville.
$\forall x$	$P(x)$

Cette proposition se traduit par $\forall x : P(x)$.

> Le quantificateur $\forall$ s'appelle le **quantificateur universel**.
> $\forall$ se lit : **pour tout** élément de l'ensemble de référence.

? Quelle est, d'après vous, la valeur de vérité de la proposition : « Tous les Montréalais aiment la ville »?..............................

Il doit bien exister un Montréalais qui n'aime pas la ville! Cette proposition est donc fausse. Cette proposition serait vraie si **tous** les Montréalais, sans exception, aimaient la ville.

> La proposition $\forall x : P(x)$ est **vraie** si, pour **toute** valeur x de l'ensemble de référence, la proposition $P(x)$ est vraie.

Exemple 1

Soit U = {2, 3, 5, 7},

$P(x) : x > 0$,

$Q(x) : x$ est impair.

La proposition $\forall x : P(x)$ est une proposition vraie.
En effet, $P(2)$, $P(3)$, $P(5)$ et $P(7)$ sont **toutes** vraies.

La proposition $\forall x : Q(x)$ est une proposition fausse.
En effet, $Q(2)$ est fausse. Il suffit de trouver **un seul** élément de l'ensemble de référence qui rende la proposition fausse pour conclure que $\forall x : Q(x)$ est une proposition fausse.

Soit U = {2, 3, 5, 7}. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

? $\forall x : x$ est un nombre premier.......... $\forall x : x < 8$ .... $\forall x : x$ est impair.......

La première est vraie, car 2, 3, 5 et 7 sont tous des nombres premiers.
La deuxième est vraie, car ce sont tous des entiers inférieurs à 8.
La troisième est fausse, car 2 n'est pas impair.

Exercice 7.1

1. Soit l'ensemble U = {3, 5, 7, 8, 9}. Trouvez la valeur de vérité des formes propositionnelles quantifiées suivantes.

a) $\forall x : x$ est un nombre premier. .... b) $\forall x : x = 3$ ....
c) $\forall x : x$ est impair. .... d) $\forall x : x > 2$ ....
e) $\forall x : x < 9$ .... f) $\forall x : x + 2 > 4$ ....
g) $\forall x : x - 1 < 8$ ....

2. Soit U = {1, 4, 9, 25, 30, 49}. Toutes les formes propositionnelles quantifiées suivantes sont fausses. Trouvez un ou des éléments de l'ensemble référentiel qui les rendent fausses.

a) $\forall x : x$ est un carré. .... b) $\forall x : x > 1$ ....
c) $\forall x : x$ est impair. .... d) $\forall x : 3x - 2 < 100$ ....
e) $\forall x : x$ est un multiple de 3. ......

Passons maintenant à notre deuxième quantificateur.

Le quantificateur existentiel

Le symbole utilisé pour représenter ce quantificateur est $\exists$. Ce symbole veut dire : **il existe au moins un** élément du référentiel.

Soit les propositions :
- Certains Montréalais aiment la ville.
- Quelques Montréalais aiment la ville.
- Au moins un Montréalais aime la ville.
- La majorité des Montréalais aiment la ville.
- La plupart des Montréalais aiment la ville.

Ces propositions traduisent toutes la même situation : Il existe au moins un Montréalais qui aime la ville.

Cela signifie que, à l'intérieur du référentiel choisi, nous devons trouver **au moins un élément** qui aime la ville. Cette proposition comprend aussi deux parties.

Il existe au moins un élément du référentiel x, x aime la ville.
$\exists x$ $P(x)$

Cette proposition se traduit par $\exists x : P(x)$.

Le quantificateur $\exists$ s'appelle le **quantificateur existentiel**. $\exists$ se lit : il **existe au moins un** élément de l'ensemble de référence.

? Quelle est, d'après vous, la valeur de vérité de la proposition : « Certains Montréalais aiment la ville »?

Il existe sûrement un Montréalais qui aime la ville. Cette proposition est donc vraie. Cette proposition serait fausse si nous ne pouvions en trouver un seul.

La proposition $\exists x : P(x)$ est **vraie** s'il existe **au moins un** élément de l'ensemble de référence qui transforme la proposition $P(x)$ en proposition vraie.

Exemple 2

Soit U = {1, 4, 9, 16, 25, 27},
$P(x) : x > 25$,
$Q(x)$: x est un nombre premier.

La proposition $\exists x : P(x)$ est une proposition vraie.
En effet, $P(27)$ est vraie. Il s'agit de trouver au moins un élément de l'ensemble de référence qui rende la proposition vraie.

La proposition $\exists x : Q(x)$ est une proposition fausse.
En effet, $Q(1)$, $Q(4)$, $Q(9)$, $Q(16)$, $Q(25)$ et $Q(27)$ sont fausses. Puisque nous ne pouvons trouver au moins un élément de l'ensemble de référence qui soit un nombre premier, nous pouvons conclure que $\exists x : Q(x)$ est une proposition fausse.

Soit U = {1, 4, 9, 16, 25, 27}. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

$\exists x : x$ est pair. .... $\exists x : x$ est un carré. .... $\exists x : x$ est multiple de 6. ....

La première est vraie, car 4, entre autres, est pair.
La deuxième est vraie, car 1, 4, 9, 16, 25 sont des carrés.
La troisième est fausse : aucun nombre n'est multiple de 6.

Exercice 7.2

1. Soit l'ensemble U = {3, 4, 6, 8, 10, 12}. Trouvez la valeur de vérité des formes propositionnelles quantifiées suivantes.

   a) $\exists x : x$ est un nombre premier. .... b) $\exists x : x = 3$ ....
   c) $\exists x : x$ est impair. .... d) $\exists x : x < 2$ ....
   e) $\exists x : x < 9$ .... f) $\exists x : x + 2 > 15$ ....
   g) $\exists x : x - 1 < 8$ ....

2. Soit U = {3, 4, 5, 6, 8, 9}. Toutes les formes propositionnelles quantifiées suivantes sont vraies. Trouvez un ou des éléments de l'ensemble référentiel qui les rendent vraies.

   a) $\exists x : x$ est un cube. .... b) $\exists x : x < 4$ ....
   c) $\exists x : x$ est impair. .... d) $\exists x : 3x - 2 = 13$ ....
   e) $\exists x : x$ est facteur de 15. ....

3. Dites si, dans les énoncés suivants, nous utilisons les quantificateurs universel, existentiel ou aucun des deux.

   a) Tous les nombres impairs sont premiers. ....
   b) Certains chats sont noirs. ....
   c) La majorité des gens se disent heureux. ....
   d) Les Français habitent l'Europe. ....

e) Il y a au moins un honnête homme. ....

f) Toutes les familles ont leur mouton noir. ....

Voyons le dernier des quantificateurs.

Le quantificateur existentiel d'unicité

Le symbole utilisé pour représenter ce quantificateur est $\exists!$. Ce symbole veut dire : **il existe un et un seul** élément du référentiel.

Soit la proposition : Il y a un et un seul Montréalais qui aime la ville.

Cela signifie que, à l'intérieur du référentiel choisi, nous devons trouver **un et un seul élément** qui aime la ville. Comme les autres, cette proposition comprend deux parties.

Il existe un et un seul élément du référentiel x,	x aime la ville.
$\exists! x$	$P(x)$

Cette proposition se traduit par $\exists! x : P(x)$.

> Le quantificateur $\exists!$ s'appelle le **quantificateur existentiel d'unicité**. $\exists!$ se lit : il **existe un et un seul** élément de l'ensemble de référence.

? Quelle est d'après vous, la valeur de vérité de la proposition : « Il y a un et un seul Montréalais qui aime la ville »? ....

Vous conviendrez sans doute que plus d'un Montréalais aime la ville. Cette proposition est donc fausse. Cette proposition serait vraie si nous ne pouvions en trouver qu'un seul.

La proposition $\exists! x : P(x)$ est **vraie** s'il existe **un et un seul** élément de l'ensemble de référence qui transforme la proposition $P(x)$ en proposition vraie.

Exemple 3

Soit U = {1, 5, 6, 8, 9, 10},
$P(x) : x < 5$,
$Q(x) : x$ est un multiple de 5.

La proposition $\exists! x : P(x)$ est une proposition vraie.
En effet, $P(1)$ est vraie et toutes les autres propositions sont fausses.

La proposition $\exists! x : Q(x)$ est une proposition fausse.
En effet, $Q(5)$ et $Q(10)$ sont vraies. Puisque nous retrouvons plus d'un élément de l'ensemble de référence qui soit un multiple de 5, nous pouvons conclure que $\exists! x : Q(x)$ est une proposition fausse.

Soit U = {1, 5, 6, 8, 9, 10}. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

? $\exists! x : x$ est pair. .... $\exists! x : x$ est un carré. .... $\exists! x : x$ est multiple de 9. ....

La première est fausse, car plus d'un nombre est pair.
La deuxième est fausse, car 1 et 9 sont des carrés.
La troisième est vraie, car seulement 9 est multiple de 9.

Exercice 7.3

1. Soit l'ensemble U = {1, 2, 3, 4, 5}. Trouvez la valeur de vérité des formes propositionnelles quantifiées suivantes.

   a) $\exists! x : x$ est un nombre premier. .... b) $\exists! x : x = 5$ ....
   c) $\exists! x : x$ est multiple de 4. .... d) $\exists! x : x < 2$ ....
   e) $\exists! x : x > 4$ .... f) $\exists! x : x + 2 > 10$ ....
   g) $\exists! x : x$ est pair. ....

2. Soit U = {2, 3, 8, 9, 10, 12}. Toutes les formes propositionnelles quantifiées suivantes sont vraies. Trouvez l'élément de l'ensemble référentiel qui les rendent vraies.

a) $\exists! x : x$ est un cube. ....
b) $\exists! x : x < 3$ ....
c) $\exists! x : x$ est un carré. ....
d) $\exists! x : 3x - 7 = 23$ ....
e) $\exists! x : x$ est facteur de 15. ....

3. Dites si, dans les énoncés suivants, nous utilisons les quantificateurs universel, existentiel, existentiel d'unicité ou aucun des trois.

a) Tous les nombres entiers sont premiers. ....
b) La majorité des gens sont droitiers. ....
c) Il n'y a qu'un et un seul Dieu. ....
d) Les enfants sont souvent malades. ....
e) Certains animaux sont dangereux. ....
f) Toutes les guerres sont mortelles. ....

Le tableau ci-dessous résume les trois quantificateurs.

Les quantificateurs

$\forall$: quantificateur universel
$\exists$: quantificateur existentiel
$\exists!$: quantificateur existentiel d'unicité

7.1.2 Négation d'une forme propositionnelle composée quantifiée

Le sous-module 5 nous a permis de découvrir les négations de propositions composées. Nous vous rappelons ces différentes négations.

rappel

Négation de propositions composées

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Nous tenterons maintenant de découvrir les négations des deux principaux quantificateurs : le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Négation du quantificateur universel

Prenons la phrase suivante : « Tous les élèves de la classe portent des lunettes. » Cette forme propositionnelle est vraie si tous les élèves sans exception portent des lunettes. Il suffit qu'un seul élève ne porte pas de lunettes pour que cette forme propositionnelle devienne fausse.

Si U est l'ensemble des élèves et si $P(x) : x$ porte des lunettes, la phrase s'écrit donc de la façon suivante :

$$\forall x : P(x)$$

S'il existe au moins un élément de U qui ne porte pas de lunettes, nous pouvons alors écrire de façon symbolique :

$$\exists x : \neg P(x)$$

La **négation** de la proposition $\forall x : P(x)$ est **équivalente** à l'existence d'au moins un élément du référentiel qui rend la proposition fausse.

Négation du quantificateur $\forall$

$$\neg \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$\neg \forall x : P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x : \neg P(x)$
Il est faux de dire que tous les enfants sont petits.	$\Leftrightarrow$	Il existe au moins un enfant qui n'est pas petit. OU Certains enfants ne sont pas petits.
Il est faux de dire que tous les nombres naturels sont pairs.	$\Leftrightarrow$	Certains nombres naturels ne sont pas pairs.

Négation du quantificateur existentiel

Considérons la proposition prise dans l'ensemble de tous les nombres naturels : « **Certains** nombres sont supérieurs à un million. » Nous pouvons traduire cette proposition par :

$$\exists x : P(x)$$

La proposition : « **Il est faux** de dire que **certains** nombres sont supérieurs à un million » pourrait alors se traduire par :

$$\neg \exists x : P(x)$$

Cette proposition est équivalente à « Aucun nombre n'est supérieur à un million » ou encore mieux à « **Tous** les nombres **ne sont pas** supérieurs à un million » que nous pouvons écrire symboliquement : $\forall x : \neg P(x)$.

Négation du quantificateur $\exists$

$$\neg \exists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

$\neg\exists\, x : P(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall\, x : \neg P(x)$
Il est faux de dire que certains enfants sont petits.	$\Leftrightarrow$	Aucun enfant n'est petit. OU Tous les enfants ne sont pas petits.
Il est faux de dire que certaines maisons sont à vendre.	$\Leftrightarrow$	Aucune maison n'est à vendre. OU Toutes les maisons ne sont pas à vendre.

Voyez l'exemple suivant : il résume bien la situation et vous permettra de faire une synthèse des négations des quantificateurs.

Exemple 4

Soit U l'ensemble des élèves et $P(x)$: x a réussi.

Proposition	Négation
Tous les élèves ont réussi. $\forall\, x : P(x)$	Certains élèves n'ont pas réussi. $\exists\, x : \neg P(x)$
car $\neg\forall\, x : P(x) \Leftrightarrow \exists\, x : \neg P(x)$	

Proposition	Négation
Certains élèves ont réussi. $\exists\, x : P(x)$	Aucun élève n'a réussi. $\forall\, x : \neg P(x)$
car $\neg\exists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$	

Proposition	Négation
Certains élèves n'ont pas réussi. $\exists x : \neg P(x)$	Tous les élèves ont réussi. $\forall x : P(x)$
car $\neg \exists x : \neg P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg(\neg P(x))$ $\Leftrightarrow \forall x : P(x)$	

Proposition	Négation
Aucun élève n'a réussi. $\forall x : \neg P(x)$	Certains élèves ont réussi. $\exists x : P(x)$
car $\neg \forall x : \neg P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg(\neg P(x))$ $\Leftrightarrow \exists x : P(x)$	

Exercice 7.4

1. Écrivez en langage usuel la négation de chacune des propositions si l'ensemble de référence est l'ensemble des élèves.

   a) Tous les élèves sont en congé. ....

   ....

   b) Aucun élève n'est en congé. ....

   ....

   c) Certains élèves ne sont pas en congé. ....

   ....

   d) Il y a quelques élèves qui sont en congé. ....

2. Écrivez en langage usuel la négation de chacune des propositions si l'ensemble de référence est l'ensemble des humains.

   a) Certaines personnes ne sont pas sincères. ....

   ....

   b) Aucune personne n'est sincère. ....

   ....

   c) Il y a au moins une personne qui soit sincère. ....

   ....

   d) Tout le monde est sincère. ....

   ....

3. Écrivez la négation des phrases suivantes en langage courant si U est l'ensemble de tous les nombres et $P(x)$: x est un nombre naturel.

   a) $\forall x : \neg P(x)$ ....

   b) $\exists x : P(x)$ ....

   c) $\exists x : \neg P(x)$ ....

   d) $\forall x : P(x)$ ....

L'étape suivante consiste à simplifier certaines formes propositionnelles composées quantifiées. Pour ce faire, nous aurons besoin des équivalences logiques vues précédemment au sous-module 5 ainsi que les deux concernant les quantificateurs.

Résumé des équivalences

$$\begin{array}{rcll}
\neg(\neg P(x)) & \Leftrightarrow & P(x) & (1)\\
\neg(P(x) \wedge Q(x)) & \Leftrightarrow & \neg P(x) \vee \neg Q(x) & (2)\\
\neg(P(x) \vee Q(x)) & \Leftrightarrow & \neg P(x) \wedge \neg Q(x) & (3)\\
\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) & \Leftrightarrow & P(x) \wedge \neg Q(x) & (4)\\
\neg \forall x : P(x) & \Leftrightarrow & \exists x : \neg P(x) & (5)\\
\neg \exists x : P(x) & \Leftrightarrow & \forall x : \neg P(x) & (6)
\end{array}$$

Nous nous servirons des numéros entre parenthèses pour justifier chacune des étapes de nos simplifications.

Exemple 5

Soit à simplifier la proposition $\neg \exists x : P(x) \vee \neg Q(x)$.

$$\begin{array}{rcll}
\neg \exists x : P(x) \vee \neg Q(x) & \Leftrightarrow & \forall x : \neg(P(x) \vee \neg Q(x)) & (6)\\
 & \Leftrightarrow & \forall x : \neg P(x) \wedge \neg(\neg Q(x)) & (3)\\
 & \Leftrightarrow & \forall x : \neg P(x) \wedge Q(x) & (1)
\end{array}$$

Exemple 6

Soit à simplifier la proposition $\neg \forall x : \neg P(x) \wedge Q(x)$.

$$\begin{array}{rcll}
\neg \forall x : \neg P(x) \wedge Q(x) & \Leftrightarrow & \exists x : \neg(\neg P(x) \wedge Q(x)) & (5)\\
 & \Leftrightarrow & \exists x : \neg(\neg P(x)) \vee \neg Q(x) & (2)\\
 & \Leftrightarrow & \exists x : P(x) \vee \neg Q(x) & (1)
\end{array}$$

Exemple 7

Écrivons dans le langage courant la négation de la proposition « Certains nombres sont pairs ou premiers » en passant par l'écriture symbolique des propositions.

Soit $P(x)$: x est pair,
$Q(x)$: x est premier.
Trouvons alors la négation de $\exists x : P(x) \vee Q(x)$.

$$\begin{aligned} \neg \exists x : P(x) \vee Q(x) \quad & \Leftrightarrow \quad \forall x : \neg(P(x) \vee Q(x)) \qquad (6) \\ & \Leftrightarrow \quad \forall x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x) \qquad (3) \end{aligned}$$

Cette négation se traduit donc par : « Tous les nombres ne sont pas pairs et ne sont pas premiers. »

Exercice 7.5

1. Écrivez en langage usuel la négation de chacune des propositions si l'ensemble de référence est l'ensemble des nombres naturels.

   a) Tous les nombres naturels sont plus grands que 0. ....

   ....

   b) Aucun nombre naturel n'est supérieur à 0. ....

   ....

   c) Certains nombres naturels sont plus grands que 0. ....

   ....

   d) Il y a au moins un nombre naturel supérieur à 0. ....

   ....

2. Complétez la simplification de la proposition $\neg \forall x : P(x) \wedge \neg Q(x)$.

$\neg \forall x : P(x) \wedge \neg Q(x)$ $\Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....

3. Complétez la simplification de la proposition $\neg \exists x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$.

$\neg \exists x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$ $\Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....
$\Leftrightarrow$ ....

4. Écrivez dans le langage courant la négation de la proposition « Certains nombres sont multiples de 3 et multiples de 2 » en passant par l'écriture symbolique des propositions.
Soit $P(x)$: x est multiple de 3,
$Q(x)$: x est multiple de 2.

Il faut trouver la négation de ....

Cette négation peut se traduire par ....

....

7.1.3 Valeur de vérité d'une forme propositionnelle composée quantifiée

Maintenant que nous avons vu la négation d'une forme propositionnelle composée quantifiée, nous sommes en mesure d'en trouver la valeur de vérité. Voici quelques exemples de ces propositions et leur traduction en langage courant.

Exemple 8

Soit U = $\mathbb{N}$,

$P(x)$: x est diviseur de 12,

$Q(x)$: x est multiple de 2.

$\forall x : P(x) \wedge Q(x)$	Tous les nombres naturels sont diviseurs de 12 et multiples de 2.
$\exists x : P(x) \wedge Q(x)$	Certains nombres naturels sont diviseurs de 12 ou multiples de 2.
$\exists!\ x : P(x) \vee \neg Q(x)$	Il n'y a qu'un nombre naturel qui soit diviseur de 12 ou qui n'est pas multiple de 2.
$\exists x : P(x) \rightarrow Q(x)$	Il y a des nombres naturels qui, s'ils sont diviseurs de 12, sont multiples de 2.

De la même façon, nous pouvons traduire des phrases en langage symbolique.

Soit U = $\mathbb{N}$,

$P(x)$: x est un carré,

$Q(x)$: x est impair.

Tous les nombres naturels sont des carrés impairs.	$\forall x : P(x) \wedge Q(x)$
Certains nombres naturels sont des carrés ou sont impairs.	$\exists x : P(x) \vee Q(x)$
Il n'y a qu'un nombre naturel qui soit un carré ou qui n'est pas impair.	$\exists! x : P(x) \vee \neg Q(x)$
Il y a certains nombres naturels qui, s'ils sont des carrés, sont impairs.	$\exists x : P(x) \rightarrow Q(x)$

Pour trouver la valeur de vérité d'une forme propositionnelle composée quantifiée, nous devons :

1° dresser la table de vérité de la proposition composée sans nous occuper du quantificateur;

2° vérifier si :

- **toutes** les propositions composées obtenues sont **vraies** lorsque nous avons le quantificateur $\forall$;
- **au moins une** des propositions composées est **vraie** pour le quantificateur $\exists$;
- **une et une seule** des propositions composées est vraie pour le quantificateur $\exists$**!**.

Les exemples qui suivent vous aideront à mieux comprendre cette démarche.

Exemple 9

Soit U = {1, 2, 4, 8, 10, 12},

$P(x)$: x est un diviseur de 16,

$Q(x)$: x est pair.

Trouvons la valeur de vérité de $\forall x : P(x) \vee Q(x)$. Cette proposition signifie que tous les éléments du référentiel sont des diviseurs de 16 ou des nombres pairs.

1° Dressons la table de vérité de $P(x) \vee Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
1	V	F	**V**
2	V	V	**V**
4	V	V	**V**
8	V	V	**V**
10	F	V	**V**
12	F	V	**V**
Ordre	1	2	**3**

2° Toutes les propositions composées obtenues sont des propositions vraies. Puisque nous avons le quantificateur universel, c'est la condition nécessaire pour que la forme propositionnelle composée quantifiée soit vraie.

Nous pouvons donc dire que $\forall x : P(x) \vee Q(x)$ est une proposition vraie.

? Soit les mêmes données que l'exemple précédent. Pouvez-vous dire que $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition vraie?

? Complétez la table de vérité ci-dessous pour le savoir.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
1	V	F	
2	V	V	
4	V	V	
8	V	V	
10	F	V	
12	F	V	
Ordre	1	2	3

Avez-vous obtenu les mêmes résultats que ceux qui suivent?

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
1	V	F	**F**
2	V	V	**V**
4	V	V	**V**
8	V	V	**V**
10	F	V	**F**
12	F	V	**F**
Ordre	1	2	**3**

Est-ce que **toutes** les propositions obtenues sont vraies? ....

Quels sont les éléments du référentiel qui rendent cette proposition fausse?

....

Est-ce que $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition vraie? ....

Est-ce que $\exists\, x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition vraie? ....

Est-ce que $\exists! x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition vraie? ....

Toutes les propositions obtenues pour $P(x) \wedge Q(x)$ ne sont pas vraies puisque les éléments 1, 10 et 12 rendent cette proposition fausse. La proposition $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$ est alors une proposition fausse. Par contre, $\exists\, x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition vraie, car au moins un élément du référentiel rend cette proposition vraie : ce sont les éléments 2, 4 et 8. Nous savons alors $\exists!\ x : P(x) \wedge Q(x)$ est une proposition fausse puisqu'il aurait fallu qu'un et un seul élément du référentiel la rende vraie et il y en a trois.

Même si les propositions composées sont plus complexes, la démarche que nous avons employée restera la même. Toutefois, seuls les opérateurs logiques de la négation, de la conjonction et de la disjonction feront partie des formes propositionnelles composées quantifiées dont nous trouverons la valeur de vérité.

Exemple 10

Soit U = {1, 3, 4, 6, 9, 16, 17},

$P(x)$: x est un carré,

$Q(x)$: x est un multiple de 3.

Trouvons la valeur de vérité de $\exists x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

1° Dressons la table de vérité de $\neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\wedge$	$\neg Q(x))$
1	V	F	**F**	V	V	V
3	F	V	**V**	F	F	F
4	V	F	**F**	V	V	V
6	F	V	**V**	F	F	F
9	V	V	**V**	V	F	F
16	V	F	**F**	V	V	V
17	F	F	**V**	F	F	V
Ordre	1	2	**6**	3	5	4

2° Puisqu'**au moins un** des éléments de la proposition composée est vrai, nous pouvons affirmer que $\exists x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$ est une proposition composée quantifiée vraie.

? Soit les mêmes données que l'exemple précédent. Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$? ....

Pourquoi?

....

Quelle est la valeur de vérité de $\exists!\, x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$? ....

Pourquoi? ....

....

Les deux propositions sont fausses : la première parce que ce ne sont pas **tous** les éléments de l'ensemble de référence qui rendent la proposition vraie et la deuxième parce qu'il n'y en a pas **qu'un seul** qui la rende vraie.

À vous de jouer!

Exercice 7.6

1. Soit U = {1, 2, 3, 4, 8, 12, 17},
   $P(x)$: x est un nombre premier,
   $Q(x)$: x est un facteur de 12.

   a) Dressez la table de vérité de $P(x) \vee \neg Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x)$
Ordre					

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists ! x : P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

2. Soit U = {1, 4, 8, 11, 16, 27, 36},

   $P(x)$: x est un carré,

   $Q(x)$: x est un cube.

a) Dressez la table de vérité de $\neg P(x) \wedge \neg Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\wedge$	$\neg Q(x)$
Ordre					

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists ! x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$? ....

3. Soit U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8},

   $P(x) : x > 3$,

   $Q(x) : x < 7$,

   $R(x) : 2x - 3 = 9$.

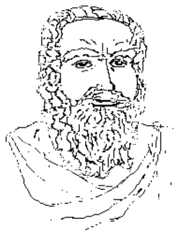
a) Dressez la table de vérité de $(P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$(P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(x)$		
Ordre						

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : (P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(x)$? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(x)$? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists! x : (P(x) \wedge Q(x)) \vee \neg R(x)$? ....



Saviez-vous que...

... la numération binaire, qui était, il y a peu de temps encore, une sorte de curiosité mathématique, est devenue l'instrument par excellence permettant de traduire des expressions numériques dans un système comportant des circuits électriques ou électroniques?

En effet, la numération binaire ne comprend que les chiffres 0 et 1 auxquels nous pouvons faire correspondre respectivement la fermeture et l'ouverture d'un circuit. Le passage du courant exprime techniquement le chiffre 1, tandis que son interruption est l'équivalent technique du chiffre 0. Les ordinateurs sont essentiellement des systèmes complexes d'interrupteurs qui fonctionnent des millions de fois par seconde et qui sont par la suite susceptibles de traduire très rapidement en termes d'ouverture et de fermeture des circuits tous les nombres et les opérations faites sur eux. Ils peuvent donc effectuer ces dernières en un temps record!

7.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Soit l'ensemble U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Trouvez la valeur de vérité des formes propositionnelles quantifiées suivantes.

a) $\forall x : x < 9$ ....
b) $\exists x : x = 5$ ....
c) $\exists! x : x$ est impair. ....
d) $\forall x : x > 2$ ....
e) $\exists! x : x > 6$ ....
f) $\forall x : x + 2 > 4$ ....
g) $\forall x : 2x - 1 < 18$ ....
h) $\exists x : x$ est premier. ....
i) $\forall x : x^2 < 50$ ....
j) $\exists! x : 5 < x < 7$ ....

2. Soit U = {0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14}. Toutes les formes propositionnelles quantifiées suivantes sont fausses. Trouvez tous les éléments de l'ensemble de référence qui les rendent fausses.

a) $\forall x : x > 1$ ....
b) $\exists x : x > 14$ ....
c) $\forall x : x$ est premier. ....
d) $\exists! x : 3x - 2 = 10$ ....
e) $\forall x : x$ est facteur de 9. ....

3. Soit U = l'ensemble des boxeurs,

$P(x)$: x est grand,
$Q(x)$: x est mince,
$R(x)$: x est fort.

1° Traduisez sous forme symbolique chacune des propositions suivantes.
2° Écrivez en langage courant la négation de ces propositions.

a) Certains boxeurs sont grands et minces.

1° ....
2° ....

b) Tous les boxeurs sont grands ou forts.

1° ....

2° ....

c) Il y a des boxeurs qui ne sont ni minces ni forts.

1° ....

2° ....

4. Complétez la simplification de la proposition $\neg\exists x : \neg P(x) \vee Q(x)$.

$\neg\exists x : \neg P(x) \vee Q(x)$	$\Leftrightarrow$	....	....
	$\Leftrightarrow$	....	....
	$\Leftrightarrow$	....	....

5. Soit U = {1, 4, 5, 10, 15, 16, 20, 25},

$P(x)$: x est un carré,

$Q(x)$: x est un multiple de 5.

a) Dressez la table de vérité de $\neg P(x) \wedge Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\wedge$	$Q(x)$
Ordre					

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : \neg P(x) \wedge Q(x)$? ....
Pourquoi? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : \neg P(x) \wedge Q(x)$? ....
Pourquoi? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists ! x : \neg P(x) \wedge Q(x)$? ....
Pourquoi? ....

6. Soit U = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10},
$P(x) : x = 6$,
$Q(x) : x$ est un cube,
$R(x) : 2x - 3 > 6$.

a) Dressez la table de vérité de $(P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge R(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$	$\wedge$	$R(x)$
Ordre								

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : (P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge R(x)$? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : (P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge R(x)$? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists ! x : (P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge R(x)$? ....

7.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Vrai ou faux?

   a) Le quantificateur $\forall$ peut se lire : certains éléments de... ....
   b) Si une forme propositionnelle contient un quantificateur, elle devient une proposition. ....

   c) Si la proposition $\forall x : P(x)$ est vraie, alors la proposition $\exists ! x : P(x)$ est nécessairement fausse. ....

   d) Si la proposition $\exists x : P(x)$ est vraie, alors la proposition $\exists ! x : P(x)$ est nécessairement vraie. ....

   e) Si la proposition $\exists ! x : P(x)$ est vraie, alors la proposition $\exists x : P(x)$ est nécessairement vraie et la proposition $\forall x : P(x)$ nécessairement fausse. ....

2. Qualifiez correctement les énoncés qui suivent selon qu'ils soient :
   - proposition simple,
   - proposition composée,
   - forme propositionnelle simple,
   - forme propositionnelle composée,
   - forme propositionnelle quantifiée,
   - forme propositionnelle composée quantifiée,
   - aucune des six premières réponses.

   a) $x < y$ ....
   b) 5 est supérieur à 2. ....
   c) Tous les nombres sont pairs. ....

d) $3 + 1 = 4$ et $7 - 3 = 2$ ....

e) $4^2 - 1$ ....

f) Certains nombres sont pairs ou premiers. ....

g) x est entier et x est un cube. ....

3. Soit U = {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9},

   $P(x) : x > 3$,

   $Q(x) : x$ est facteur de 12,

   $R(x) : x$ est un cube.

a) Traduisez sous forme symbolique : si $x > 3$, alors ce n'est pas un cube ou un facteur de 12. ....

b) Traduisez en langage courant : $\neg Q(x) \leftrightarrow P(x)$. ....

....

c) Dressez la table de vérité de cette forme propositionnelle.

Élément du référentiel			
Ordre			

d) Quel est l'ensemble-solution de cette forme propositionnelle?

....

4. Soit U = l'ensemble des animaux,

   $P(x)$: x est un lion,

   $Q(x)$: x est féroce.

   Traduisez sous forme symbolique les propositions suivantes.

   a) Certains animaux sont féroces. ....
   b) Il existe un et un seul animal qui soit féroce. ....
   c) Tous les animaux sont des lions féroces. ....
   d) Il existe au moins un animal qui soit un lion et qui ne soit pas féroce.
   ....
   e) Il est faux de dire que tous les animaux sont des lions. ....

5. Soit U = {2, 3, 6, 12, 18},

   $P(x)$: x est pair,

   $Q(x)$: x est divisible par 3.

   Trouvez la valeur de vérité des propositions suivantes.

   a) $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$ ....
   b) $\exists ! x : P(x) \vee Q(x)$ ....
   c) $\exists x : P(x) \wedge \neg Q(x)$ ....

6. Soit U = {1, 2, 4, 8, 9, 16, 25, 27},

   $P(x) : x$ est un carré,

   $Q(x) : x$ est un cube.

   a) Dressez la table de vérité de $\neg P(x) \vee \neg Q(x)$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x) \vee \neg Q(x)$		
Ordre					

   b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

   c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

   d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists ! x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$? ....

7.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Qui a raison?

Revenons aux affirmations que faisaient Mario et Kamal au début de ce sous-module.

Mario disait : «**Tous** les cubes plus petits que 500 sont des nombres impairs ou des multiples de 4.»

Kamal affirmait de son côté : «Il n'y a qu'**un et un seul** cube plus petit que 500 qui soit un nombre pair et non un multiple de 4.»

Soit $P(x)$: x est impair,
$Q(x)$: x est multiple de 4.

1. Quel est l'ensemble de référence U? ....

2. Écrivez en langage symbolique la proposition de Mario.
 ....

3. Écrivez en langage symbolique la proposition de Kamal.
 ....

4. Dressez la table de vérité de la proposition de Mario.

Élément du référentiel			
Ordre			

5. Cette proposition est-elle vraie? ....

6. Dressez la table de vérité de la proposition de Kamal.

Élément du référentiel			
Ordre			

7. Cette proposition est-elle vraie? ....

8. Quelle est votre conclusion concernant les affirmations de Mario et de Kamal? ....

Corrigé

SYNTHÈSE FINALE

Un tour d'horizon

Voyons brièvement les notions principales que vous avez étudiées afin de vous permettre de mieux synthétiser cette matière.

Après avoir fait la différence entre **proposition** et **forme propositionnelle**, nous avons fait connaissance avec les **opérateurs logiques** : la **négation**, la **conjonction**, la **disjonction**, la **conditionnelle** et la **biconditionnelle** et leur symbole respectif. Vous rappelez-vous les **tables de vérité** de ces opérateurs?

1. Complétez les tables de vérité suivantes.

Négation

p	$\neg p$
V	
F	

Conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Disjonction

p	q	$p \vee q$
V		
F		
V		
F		

Conditionnelle

p	q	$p \to q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Vous pouvez ainsi trouver la valeur de vérité d'une **proposition composée**, c'est-à-dire une proposition qui contient au moins un opérateur.

2. Dressez la table de vérité de $p \wedge (p \vee q) \to p$.

p	q	
Ordre		

Nous avons vu ensuite comment reconnaître une **tautologie**, une **contradiction** et une **implication logique**.

Pour savoir si une proposition composée est une tautologie ou une contradiction, nous devons dresser la table de vérité de la proposition composée.

- Si cette proposition est toujours vraie, c'est une tautologie.
- Si cette proposition est toujours fausse, c'est une contradiction.

Pour reconnaître une implication logique, nous devons :

1° transformer nos propositions composées en propositions utilisant le langage logique, si ce n'est déjà fait;

2° unir les deux propositions composées par le symbole de la conditionnelle si elles ne le sont pas;

3° dresser la table de vérité de la conditionnelle;

4° vérifier si c'est une tautologie;

5° relier les propositions composées avec le symbole de relation $\Rightarrow$ si c'est une tautologie, sinon utiliser le symbole $\not\Rightarrow$.

L'étape suivante a consisté à définir l'**équivalence logique**.

Pour reconnaître une équivalence logique, nous devons :

1° transformer nos propositions composées en propositions utilisant le langage logique, si ce n'est déjà fait;

2° unir les deux propositions composées par le symbole de la biconditionnelle si elles ne le sont pas;

3° dresser la table de vérité de la biconditionnelle;

4° vérifier si c'est une tautologie;

5° relier les propositions composées par le symbole de relation $\Leftrightarrow$ si c'est une tautologie, sinon utiliser le symbole $\not\Leftrightarrow$.

Nous avons ensuite abordé l'étude de la **négation de propositions composées** et avons pu établir les équivalences suivantes.

Négation de propositions composées

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Après avoir défini ce qu'était une **forme propositionnelle** dans un **ensemble référentiel** et défini des propositions telles $P(x)$ et $Q(x)$, nous avons recherché l'**ensemble-solution** de cette forme propositionnelle en dressant sa table de vérité.

3. Soit U = {2, 5, 6, 7, 8, 9, 10},

   $P(x)$: x est un diviseur de 20,

   $Q(x)$: x est un nombre premier.

   Trouvez l'ensemble-solution de $\neg(\mathrm{P}(x) \vee \neg\mathrm{Q}(x))$.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$
2						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
Ordre						

Enfin, après avoir donné les définitions du **quantificateur universel** $\forall$, du **quantificateur existentiel** $\exists$ et du **quantificateur existentiel d'unicité** $\exists!$, nous avons pu trouver la valeur de vérité d'une **forme propositionnelle composée quantifiée**.

4. En vous reportant à la table de vérité du numéro 3, donnez la valeur de vérité des propositions suivantes et dites pourquoi.

   a) $\exists x : \neg(P(x) \vee \neg Q\,(x))$ ....

   ....

b) $\forall x : \neg(P(x) \vee \neg Q(x))$ ....

....

c) $\exists! x : \neg(P(x) \vee \neg Q(x))$ ....

CORRIGÉ DE LA SYNTHÈSE FINALE

1.

Négation

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.

p	q	p	$\wedge$	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	p
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	V	**V**	F
F	F	F	F	F	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

3.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$
2	V	V	**F**	V	V	F
5	V	V	**F**	V	V	F
6	F	F	**F**	F	V	V
7	F	V	**V**	F	F	F
8	F	F	**F**	F	V	V
9	F	F	**F**	F	V	V
10	V	F	**F**	V	V	V
Ordre	1	2	**6**	3	5	4

4. a) Vraie, car il existe au moins un élément de U qui vérifie cette proposition, soit 7.

   b) Fausse, car il existe au moins un élément de U qui ne vérifie pas cette proposition, soit 2 ou 5 par exemple.

   c) Vraie, car il existe un et un seul élément de U qui vérifie cette proposition, soit 7.

OBJECTIFS TERMINAUX

Au début de ce module, nous présentions l'étude que vous deviez en faire par des objectifs intermédiaires et terminaux. Puisqu'une bonne compréhension des objectifs terminaux s'appuie sur des préalables (objectifs intermédiaires) qui doivent être bien assimilés, nous vous présentons ici les cinq objectifs terminaux de ce module. Vous devriez maintenant être en mesure d'en saisir toute la signification.

Déterminer la valeur de vérité d'une proposition composée d'au plus trois propositions simples dont la valeur de vérité de chacune est connue en respectant la priorité des opérateurs logiques et en connaissant la table de vérité de chaque type de proposition (négation, conjonction, disjonction, conditionnelle et biconditionnelle). La proposition composée doit être présentée sous forme symbolique et doit comporter au plus trois opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

ET

Dresser une table de vérité et **déterminer** si la biconditionnelle est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité attribuée à chacune des propositions simples qu'elle comporte étant donné deux propositions composées reliées par l'opérateur logique de la biconditionnelle. Si tel est le cas, relier les deux propositions composées par le symbole de l'équivalence logique ($\Leftrightarrow$). Les propositions composées doivent être présentées sous forme symbolique et doivent comporter, pour chacune, au plus trois propositions simples et trois opérateurs logiques. Toutes les possibilités à envisager doivent être exposées dans la table de vérité. Les étapes de résolution du problème sont exigées.

ET

Établir la négation d'une proposition composée présentée sous forme symbolique de façon que l'opérateur logique de la négation ne modifie plus que les propositions simples. Les propositions composées doivent comporter, pour chacune, au plus trois propositions simples et cinq opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème doivent être décrites.

ET

Décrire en extension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle simple ou d'une forme propositionnelle composée de deux formes propositionnelles simples reliées par un opérateur logique étant donné un ensemble référentiel comportant de cinq à dix éléments. Dans ce dernier cas, l'ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles simples doit également être donné. Les formes propositionnelles doivent être exprimées en langage mathématique.

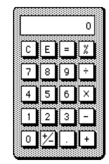
ET

Déterminer la valeur de vérité d'une forme propositionnelle composée quantifiée en respectant la priorité des opérateurs logiques étant donné un ensemble référentiel comportant de cinq à dix éléments. La forme propositionnelle composée doit comporter au plus trois formes propositionnelles simples exprimées en langage mathématique et trois opérateurs logiques. Les étapes de résolution du problème ainsi que l'ensemble-solution de chacune des formes propositionnelles sont exigés.

Corrigé

ÉPREUVE D'AUTOÉVALUATION

Consignes



1° Vous devez effectuer cette épreuve sans aide et sans vous référer à la partie théorique de ce module.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.

3° Répondez autant que possible à toutes les questions.

4° Inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire.

5° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez à la suivante. Vous y reviendrez à la fin de l'épreuve.

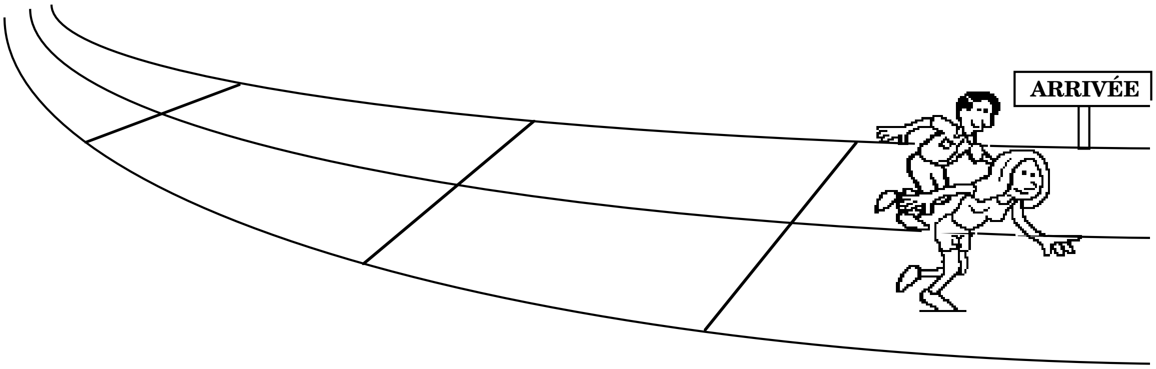
6° Dès que vous aurez répondu au maximum de questions possible, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve.

7° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

8° Remplissez la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve qui suit le corrigé.

9° Vous n'aurez atteint les objectifs visés par ce module que si **toutes** vos réponses sont correctes. Si tel n'est pas le cas, effectuez la révision suggérée sur la fiche d'analyse des résultats avant de vous présenter à l'évaluation finale. N'hésitez pas à consulter une personne-ressource, s'il y a lieu.

10° Si **toutes** vos réponses sont correctes, présentez-vous à l'évaluation finale.



1. a) Dressez la table de vérité de $p \vee (p \wedge q) \rightarrow p$.

p	q	

b) Que pouvez-vous dire de cette proposition composée?

....

2. a) Par quel opérateur logique devez-vous relier deux propositions composées pour savoir si elles sont équivalentes? ....

b) Vérifiez si les propositions suivantes sont équivalentes.

$$\neg(p \rightarrow q) \text{ et } p \wedge \neg q$$

p	q	

c) Reliez ces deux propositions composées par le symbole approprié.

....

3. Soit les propositions p : il est 8 heures,
q : il est en retard.

Traduisez la phrase qui suit en langage logique, puis utilisez les équivalences sur la négation des propositions composées pour la simplifier.
« Il est faux de dire qu'il est 8 heures ou qu'il n'est pas en retard. »

a) Langage logique : ....

b) Simplification :

....

....

....

4. Soit les formes propositionnelles $P(x) : x > 3$,
$Q(x)$: x est un multiple de 5,
$R(x)$: x est un cube

et l'ensemble référentiel U = {0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 12}.

a) Traduisez sous forme symbolique : x est un multiple de 5 si et seulement si x est plus grand que 3 ou si x est un cube.

....

b) Traduisez en langage courant $\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x)$. ....

....

c) Dressez la table de vérité de la forme propositionnelle donnée en b).

Élément du référentiel	

d) Quel est l'ensemble-solution de cette forme propositionnelle?

....

5. Soit U = {1, 2, 4, 8, 9, 16, 24, 27},
$P(x)$: x est un facteur de 16,
$Q(x)$: x est un carré.

a) Dressez la table de vérité de $Q(x) \wedge \neg P(x)$.

Élément du référentiel	

b) Quelle est la valeur de vérité de $\forall x : Q(x) \wedge \neg P(x)$? ....

c) Quelle est la valeur de vérité de $\exists x : Q(x) \wedge \neg P(x)$? ....

d) Quelle est la valeur de vérité de $\exists! x : Q(x) \wedge \neg P(x)$? ....

Corrigé

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'AUTOÉVALUATION

1. a)

p	q	p	$\vee$	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	p
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	V	F	**V**	V
F	V	F	F	F	**V**	F
F	F	F	F	F	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

b) C'est une tautologie.

2. a) Par la biconditionnelle $\leftrightarrow$.

b)

p	q	$\neg$	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	p	$\wedge$	$\neg q$
V	V	F	V	**V**	V	F	F
V	F	V	F	**V**	V	V	V
F	V	F	V	**V**	F	F	F
F	F	F	V	**V**	F	F	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

c) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

3. a) $\neg(p \vee \neg q)$

b) Nous avons : $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q)$ (Négation d'une disjonction)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge q$ (Négation d'une négation)

D'où, $\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$

4. a) $Q(x) \leftrightarrow (P(x) \vee R(x))$

   b) Si x n'est pas plus grand que 3, alors ce n'est pas un multiple de 5.

   c)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\rightarrow$	$\neg Q(x)$
0	F	V	V	**F**	F
1	F	F	V	**V**	V
2	F	F	V	**V**	V
5	V	V	F	**V**	F
8	V	F	F	**V**	V
9	V	F	F	**V**	V
10	V	V	F	**V**	F
12	V	F	F	**V**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

   d) S = {1, 2, 5, 8, 9, 10, 12}

5. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$Q(x)$	$\wedge$	$\neg P(x)$
1	V	V	V	**F**	F
2	V	F	F	**F**	F
4	V	V	V	**F**	F
8	V	F	F	**F**	F
9	F	V	V	**V**	V
16	V	V	V	**F**	F
24	F	F	F	**F**	V
27	F	F	F	**F**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

   b) Fausse.   c) Vraie.   d) Vraie.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE D'AUTOÉVALUATION

Questions	Réponses Correctes	Réponses Incorrectes	Révision
1.			Sous-modules 2 et 3
2.			Sous-module 4
3.			Sous-module 5
4.			Sous-module 6
5.			Sous-module 7

Pour chaque réponse **incorrecte**, vous devez revoir la section correspondante du sous-module identifié dans la colonne « Révision » avant de vous présenter à l'évaluation finale

Si toutes vos réponses sont **correctes** : félicitations! C'est la preuve que vous avez atteint tous les objectifs du module MAT-5112-1. Consultez la page suivante pour connaître les modalités d'évaluation qui conduisent à l'homologation de votre réussite.

ÉVALUATION FINALE

L'évaluation finale consiste en la passation de l'examen officiel du ministère de l'Éducation du Québec. La réussite de cet examen sanctionne vos apprentissages et vous donne droit à sa mention dans votre dossier scolaire.

Que votre inscription ait lieu à un centre d'éducation des adultes ou en formation à distance, la marche à suivre est la même. Renseignez-vous auprès de la personne-ressource ou auprès de la formatrice ou du formateur pour connaître les modalités de cette évaluation.

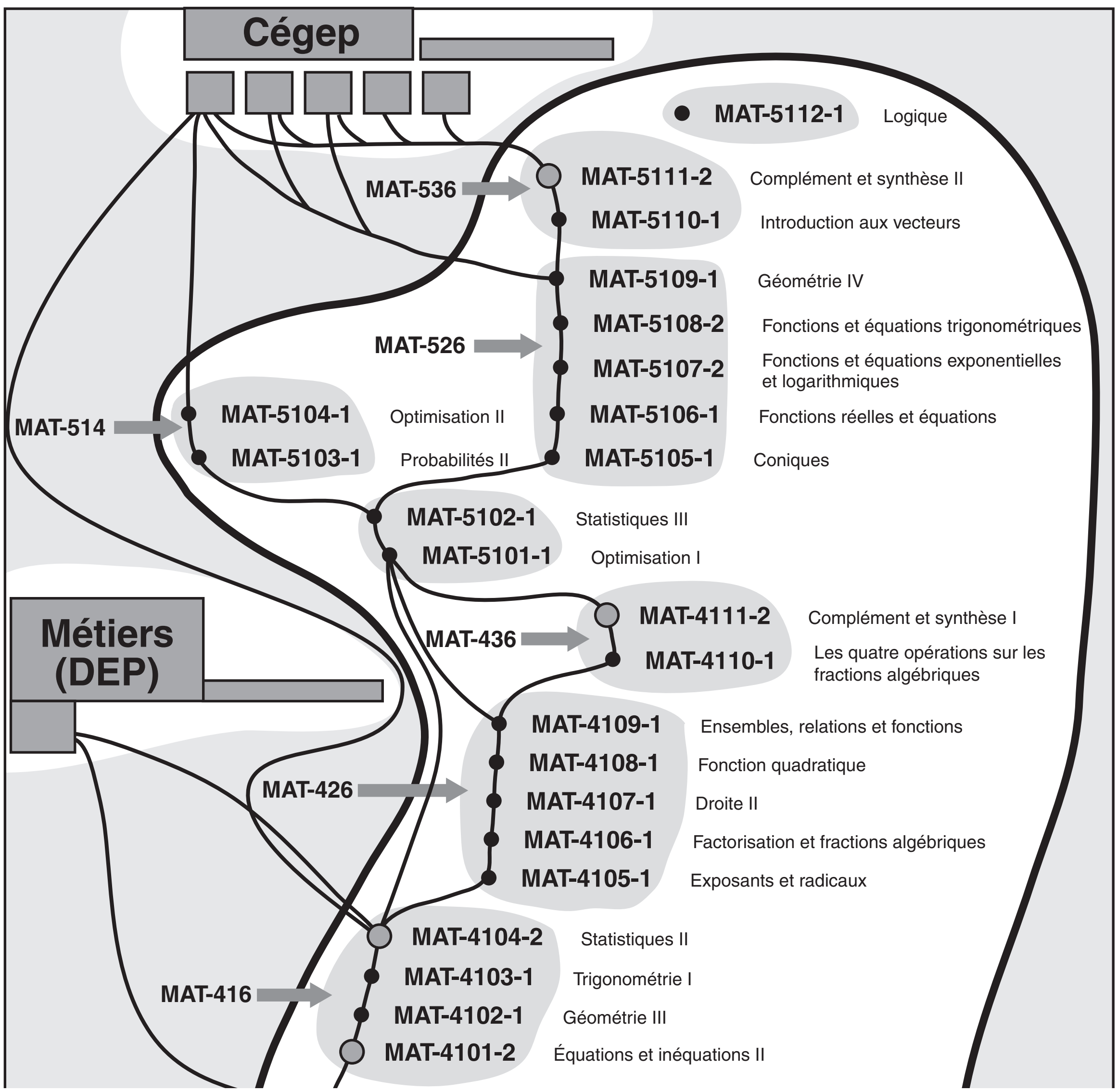


TABLE DES MATIÈRES DU CORRIGÉ DES EXERCICES

CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 1.1

1. Oui, fausse.
2. Oui, vraie.
3. Oui, vraie.
4. Non.
5. Oui, vraie.
6. Oui, vraie.
7. Oui, vraie.
8. Oui, fausse.
9. Non.
10. Oui, fausse.

Exercice 1.2

1. a) $\rightarrow$, conditionnelle. b) $\leftrightarrow$, biconditionnelle. c) $\neg$, négation.
   d) $\vee$, disjonction. e) $\wedge$, conjonction.

2. a) **Si** je bois un jus, **alors** j'ai soif.
   b) J'ai soif **ou** je bois un jus.
   c) Je bois un jus **si et seulement si** je **n**'ai **pas** soif.
   d) Je bois un jus **et** je **n**'ai **pas** soif.
   e) Je **ne** bois **pas** un jus.

3. a) $q \rightarrow \neg p$ b) $\neg p$ c) $q \wedge p$

Exercice 1.3

1. a) Éric est professeur ou il a 27 ans.
   b) Éric n'est pas professeur et il a 27 ans.
   c) Il est faux de dire qu'Éric est professeur ou qu'il habite Laval.
   d) Éric n'est pas professeur ou il n'habite pas Laval.
   e) Éric habite Laval et il n'a pas 27 ans.

2. a) $\neg p \vee q$ b) $\neg(\neg p \vee \neg q)$ c) $p \wedge \neg q$

3. a) Fausse. b) Vraie. c) Fausse.

Exercice 1.4

1. a) S'il pleut, alors Jérôme va au cinéma.
   b) Il pleut si et seulement si Karine prend le métro.
   c) Si Jérôme ne va pas au cinéma, alors il pleut.
   d) Il pleut si et seulement si Jérôme ne va pas au cinéma.
   e) Il est faux de dire que si Jérôme va au cinéma, alors Karine prend le métro.

2. a) $q \rightarrow p$ b) $r \leftrightarrow q$ c) $\neg(p \rightarrow r)$ d) $p \rightarrow \neg r$

3. a) Fausse.   b) Vraie.   c) Fausse.   d) Vraie.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. a) Montréal est une métropole si et seulement si Laval est une banlieue.
   b) Montréal n'est pas une métropole.
   c) Laval est une banlieue et Québec n'est pas une capitale.
   d) Montréal est une métropole ou Laval est une banlieue.
   e) Il est faux de dire que si Montréal est une métropole, alors Québec est une capitale.

2. a) $p \wedge q$ b) $r \rightarrow q$ c) $(p \vee r) \rightarrow q$
   d) $\neg(r \vee q)$ e) $r \leftrightarrow q$ f) $\neg q \wedge \neg r$

3. a) Vraie.   b) Fausse.   c) Fausse.   d) Vraie.   e) Fausse.

4. a) Faux.   b) Faux.   c) Vrai.   d) Vrai.

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

Table de vérité
de la négation

p	$\neg p$
V	**F**
F	**V**

Table de vérité
de la conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Table de vérité
de la disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Table de vérité
de la conditionnelle

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Table de vérité
de la biconditionnelle

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Le premier indice nous donne les 8 combinaisons suivantes possibles quant à l'âge des enfants de Serge.

Âge des enfants	Produit des âges	Somme des âges
36, 1 et 1	36	38
18, 2 et 1	36	21
12, 3 et 1	36	16
9, 4 et 1	36	14
9, 2 et 2	36	13
6, 6 et 1	36	13
6, 3 et 2	36	11
4, 3 et 3	36	10

Si l'édifice avait eu 10, 11, 14, 16, 21 ou 38 fenêtres, il est évident qu'Émile aurait pu dire tout de suite les âges des enfants de Serge. S'il ne le pouvait pas, c'est qu'il y avait ambiguïté : nous constatons en effet qu'il y a deux combinaisons d'âges qui ont une somme de 13, soit 9, 2 et 2 et 6, 6 et 1.

Quand Serge ajoute que son aîné a les yeux bleus, il élimine du même coup le cas 6, 6 et 1 où il y aurait eu deux jumeaux aînés.

Les trois enfants ont donc 9 ans, 2 ans et 2 ans.

Exercice 2.1

1.

p	q	$\neg p$	$\vee$	$\neg q$
V	V	F	**F**	F
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	F
F	F	V	**V**	V
Ordre		1	**3**	2

2.

p	q	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

3.

p	q	p	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F
F	V	F	**V**	F
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

4.

p	q	p	$\wedge$	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	p
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	V	**V**	F
F	F	F	F	F	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

Exercice 2.2

1.

p	q	r	$\neg p$	$\vee$	$(q \leftrightarrow r)$
V	V	V	F	**V**	V
V	V	F	F	**F**	F
V	F	V	F	**F**	F
V	F	F	F	**V**	V
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	V	**V**	F
F	F	V	V	**V**	F
F	F	F	V	**V**	V
Ordre			1	**3**	2

2.

p	q	r	p	$\rightarrow$	$(q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	V	**F**	F
V	F	V	V	**F**	F
V	F	F	V	**F**	F
F	V	V	F	**V**	V
F	V	F	F	**V**	F
F	F	V	F	**V**	F
F	F	F	F	**V**	F
Ordre			1	**3**	2

2.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1.

p	q	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**F**	V
F	V	F	**F**	V
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

2.

p	q	r	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \wedge \neg r)$		
V	V	V	V	**F**	V	F	F
V	V	F	V	**V**	V	V	V
V	F	V	V	**F**	V	F	F
V	F	F	V	**V**	V	V	V
F	V	V	V	**F**	F	F	F
F	V	F	V	**F**	F	F	V
F	F	V	F	**V**	F	F	F
F	F	F	F	**V**	F	F	V
Ordre			1	**5**	2	4	3

2.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

2.

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \to r$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

3. a) $r \leftrightarrow (p \vee q)$

b)

p	q	r	r	$\leftrightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	F	**F**	V
V	F	V	V	**V**	V
V	F	F	F	**F**	V
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	**F**	V
F	F	V	V	**F**	F
F	F	F	F	**V**	F
Ordre			1	**3**	2

c)
- Le père vient les chercher et il y a des autobus, mais ils ne sont pas à l'heure.
- Le père vient les chercher et il n'y a pas d'autobus, mais ils ne sont pas à l'heure.
- Le père ne vient pas les chercher et il y a des autobus, mais ils ne sont pas à l'heure.
- Ils sont à l'heure, mais le père ne vient pas les chercher et il n'y a pas d'autobus.

2.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

p	q	r	$[(p \vee q)$	$\wedge$	$r]$	$\leftrightarrow$	$[(r$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg q)]$
V	V	V	V	V	V	**F**	V	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	**V**	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	**V**	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	**V**	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F	**V**	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	**F**	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	**V**	F	F	F	V	V
Ordre			1	3	2	**9**	7	8	5	6	4

Exercice 3.1

1. C'est une tautologie.

p	p	$\leftrightarrow$	$\neg($	$\neg p)$
V	V	**V**	V	F
F	F	**V**	F	V
Ordre	1	**4**	3	2

2. C'est une tautologie.

p	q	$(p \wedge q)$	$\vee$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg q)$
V	V	V	**V**	V	F	F
V	F	F	**V**	V	V	V
F	V	F	**V**	F	V	F
F	F	F	**V**	F	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

3. C'est une tautologie.

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	F	V	F	F	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

4. C’est une contradiction.

p	q	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	F
V	F	F	**F**	F	F	V
F	V	F	**F**	V	F	F
F	F	F	**F**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

Exercice 3.2

1. a)

p	q	p	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$\neg q)$
V	V	V	**V**	V	V	F
V	F	V	**V**	V	V	V
F	V	F	**V**	F	F	F
F	F	F	**V**	F	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

C’est une implication, alors nous écrivons $p \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

b)

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	F
F	V	F	**V**	V
F	F	V	**V**	V
Ordre		1	**3**	2

C’est une implication, alors nous écrivons $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

c) Ce n'est pas une conditionnelle mais une biconditionnelle. Ce n'est donc pas une implication.

d)

p	q	p	$\rightarrow$	$(p \wedge q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**F**	F
F	V	F	**V**	F
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

Ce n'est pas une implication, alors nous écrivons $p \not\Rightarrow (p \wedge q)$.

2. a) $p \rightarrow p \vee \neg q$

b)

p	q	p	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$\neg q)$
V	V	V	**V**	V	V	F
V	F	V	**V**	V	V	V
F	V	F	**V**	F	F	F
F	F	F	**V**	F	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

c) Oui. d) Oui. e) Oui. f) Oui. g) $p \Rightarrow p \vee \neg q$

3.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Pour montrer que la proposition $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ est vraie, il s'agit de montrer que la conditionnelle $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ est une tautologie.

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	F	V	F	F	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

La conditionnelle étant une tautologie, c'est donc une implication.

2. a)

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\wedge$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V	F	F	**F**	V
V	F	V	V	V	**F**	F
F	V	F	F	F	**F**	V
F	F	F	F	V	**F**	V
Ordre		1	3	2	**5**	4

C'est une contradiction.

b)

p	q	$\neg$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
V	V	F	V	**V**	F	F	F
V	F	F	V	**V**	F	F	V
F	V	F	V	**V**	V	F	F
F	F	V	F	**V**	V	V	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

C'est une tautologie.

3.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. a) Une conditionnelle est fausse lorsque **l'antécédent est vrai et le conséquent est faux.**
   b) Une conjonction est vraie lorsque **les deux propositions simples sont vraies.**
   c) Une disjonction est fausse lorsque **les deux propositions simples sont fausses.**
   d) Une biconditionnelle est vraie lorsque **les deux propositions simples sont simultanément vraies ou fausses.**
   e) Une conditionnelle qui est une tautologie s'appelle **une implication.**
   f) Si nous nions une tautologie, nous obtenons **une contradiction.**
   g) En niant une proposition fausse, nous obtenons **une proposition vraie.**

2. a) Faux. b) Faux. c) Vrai. d) Faux. e) Vrai.

3. Pour obtenir le plus de renseignements possibles, il faut d'abord compléter les colonnes p et q.

p	q	$[(p\ ?\ q)$	?	$p\ ]$	$\rightarrow$	q
V	V		V	V		V
V	F	F	F	V		F
F	V	F	F	F		V
F	F	F		F		F
Ordre				1		2

Le premier ? est nécessairement une conjonction puisque les trois dernières lignes sont fausses. Ajoutons le symbole $\wedge$ et complétons la colonne $p \wedge q$.

p	q	$[(p \wedge q)$	?	$p\ ]$	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V		V
V	F	F	F	V		F
F	V	F	F	F		V
F	F	F		F		F
Ordre		3		1		2

Le deuxième ? ne peut être aussi qu'une conjonction puisque c'est le seul opérateur logique qui donne V, F, F pour VV, FV et FF.

Complétons le tableau.

p	q	$[(p \wedge q)$	$\wedge$	$p\ ]$	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	F	F	F	**V**	V
F	F	F	F	F	**V**	F
Ordre		3	4	1	**5**	2

3.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Il s'agit de démontrer que $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge p \to r$ est une tautologie et nous aurons une implication.

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to r)]$	$\wedge$	p	$\to$	r
V	V	V	V	V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	V	F	F	F	V	**V**	F
V	F	V	F	F	V	F	V	**V**	V
V	F	F	F	F	V	F	V	**V**	F
F	V	V	V	V	V	F	F	**V**	V
F	V	F	V	F	F	F	F	**V**	F
F	F	V	V	V	V	F	F	**V**	V
F	F	F	V	V	V	F	F	**V**	F
Ordre			1	3	2	5	4	**7**	6

C'est une implication.

Exercice 4.1

1. Soit p : je réussis,
   q : je vais au cégep.
   La première proposition s'écrit $(p \to q)$ et la deuxième s'écrit $(\neg p \wedge \neg q)$.

   $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$(p \to q)$	$\not\Leftrightarrow$	$(\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	F
V	F	F	**V**	F	F	V
F	V	V	**F**	V	F	F
F	F	V	**V**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

La biconditionnelle n'étant pas une tautologie, ce n'est pas une équivalence; alors :

$(p \to q) \not\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

2. a)

p	q	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p)$
V	V	V	**V**	F	V	F
V	F	V	**F**	V	F	F
F	V	V	**V**	F	V	V
F	F	F	**F**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

La biconditionnelle n'étant pas une tautologie, ce n'est pas une équivalence; alors :

$$(p \vee q) \not\Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

b)

p	q	$(\neg p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg p)$
V	V	F	V	V	**V**	V	V	F
V	F	F	F	F	**V**	F	F	F
F	V	V	V	V	**V**	V	V	V
F	F	V	V	F	**V**	F	V	V
Ordre		1	3	2	**7**	4	6	5

C'est une équivalence; alors : $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$.

c)

p	q	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V	**F**	F	V
V	F	V	**V**	V	F
F	V	V	**F**	F	V
F	F	F	**V**	F	V
Ordre		1	**4**	3	2

La biconditionnelle n'étant pas une tautologie, ce n'est pas une équivalence; alors :

$$(p \vee q) \not\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q).$$

4.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Soit p : Laura a 16 ans,

   q : Laura peut conduire une auto.

   La première proposition s'écrit $(p \to q)$ et la deuxième $(\neg q \leftrightarrow \neg p)$.

   $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg q$	$\leftrightarrow$	$\neg p)$
V	V	V	**V**	F	V	F
V	F	F	**V**	V	F	F
F	V	V	**F**	F	F	V
F	F	V	**V**	V	V	V
Ordre		1	**5**	2	4	3

La biconditionnelle n'est pas une tautologie, donc nous n'avons pas une équivalence; alors :

$(p \to q) \not\Leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$.

2. a)

p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p \to q)$
V	V	V	F	F	**V**	F	V
V	F	V	V	V	**V**	V	F
F	V	F	F	F	**V**	F	V
F	F	F	F	V	**V**	F	V
Ordre		1	3	2	**6**	5	4

Les deux propositions sont équivalentes; alors :

$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \to q)$.

b)

p	q	r	$[(p \vee r)$	$\rightarrow$	$\neg q]$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$[(p \vee r)$	$\wedge$	$\neg$	$(\neg q)]$
V	V	V	V	F	F	**V**	F	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	**V**	F	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	**V**	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	**V**	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	**V**	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	F	**V**	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	**V**	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	**V**	V	F	F	F	V
Ordre			1	3	2	**9**	8	4	7	6	5

C'est une équivalence; alors :

$[(p \vee r) \rightarrow \neg q] \Leftrightarrow \neg[(p \vee r) \wedge \neg(\neg q)]$.

c)

p	r	$(\neg r$	$\leftrightarrow$	$p)$	$\leftrightarrow$	$(\neg r$	$\rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$\neg r)$
V	V	F	F	V	**V**	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	**V**	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	**V**	V	F	F	F	F	V	V
Ordre		1	3	2	**11**	4	6	5	10	7	9	8

C'est une équivalence :

$(\neg r \leftrightarrow p) \Leftrightarrow (\neg r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg r)$.

4.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. a) $p \leftrightarrow q$ b) $p \wedge q$ c) $p \rightarrow q$

2. a)

p	q	$\neg p$	$\rightarrow$	$\neg q$
V	V	F	**V**	F
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	V	**V**	V
Ordre		1	**3**	2

$\neg p \not\Rightarrow \neg q$

b)

p	q	p	$\rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**V**	V
F	V	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F
Ordre		1	**3**	2

$p \Rightarrow (p \vee q)$

c)

p	q	$(\neg p$	$\rightarrow$	$\neg q)$	$\leftrightarrow$	$(q \rightarrow p)$
V	V	F	V	F	**V**	V
V	F	F	V	V	**V**	V
F	V	V	F	F	**V**	F
F	F	V	V	V	**V**	V
Ordre		1	3	2	**5**	4

$(\neg p \rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$

d)

p	q	$\neg$	$(p \leftrightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg q)$
V	V	F	V	**V**	V	F	F
V	F	V	F	**V**	V	V	V
F	V	V	F	**V**	F	V	F
F	F	F	V	**V**	F	F	V
Ordre		2	1	**6**	3	5	4

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

4.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Dressons la table de vérité de la biconditionnelle pour vérifier si nous obtenons une tautologie et par conséquent une équivalence.

p	q	r	$[(p \to q)$	$\to$	$r]$	$\leftrightarrow$	$[p$	$\to$	$(q \to r)]$
V	V	V	V	V	V	**V**	V	V	V
V	V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
V	F	V	F	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	F	V	F	**V**	V	V	V
F	V	V	V	V	V	**V**	F	V	V
F	V	F	V	F	F	**F**	F	V	F
F	F	V	V	V	V	**V**	F	V	V
F	F	F	V	F	F	**F**	F	V	V
Ordre			1	3	2	**7**	4	6	5

L'opération $\to$ n'est donc pas associative puisque la biconditionnelle n'est pas une tautologie.

Exercice 5.1

1. a) La Terre **n**'est **pas** ronde **et** le Soleil **n**'est **pas** une planète.
   b) Il est 8 heures **et** le Soleil **ne** se couche **pas**.
   c) Le Soleil se couche.
   d) **Il est faux de dire que** le Soleil se lève **s**'il est 6 heures.
   e) **Il est faux de dire qu**'il fait noir **ou** qu'il est 7 heures.
   f) Le Soleil se lève.

2. a) Le cinéma ne coûte pas cher ou Anne n'adore pas le cinéma.
   b) Anne adore le cinéma et celui-ci ne coûte pas cher.
   c) Le cinéma coûte cher.

3. a) $\neg p \wedge \neg r$: je n'achète pas une auto et je ne suis pas heureux.

   b) $r \wedge \neg q$: je suis heureux et je ne vais pas à la campagne.

   c) q : je vais à la campagne.

   d) $\neg r \vee \neg p$: je ne suis pas heureux ou je n'achète pas une auto.

   e) $p \wedge \neg q$: j'achète une auto et je ne vais pas à la campagne.

Exercice 5.2

1. a) Nous avons $\neg(\neg q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p)$ (Négation d'une conditionnelle)

   D'où, $\neg(\neg q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$

   b) Nous avons $\neg(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow \neg(\neg q) \vee \neg p$ (Négation d'une conjonction)
   $\Leftrightarrow q \vee \neg p$ (Négation d'une négation)

   D'où, $\neg(\neg q \wedge p) \Leftrightarrow q \vee \neg p$

2. La phrase se traduit par $\neg(\neg q \rightarrow \neg p)$.

   Nous avons $\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg(\neg p)$ (Négation d'une conditionnelle)
   $\Leftrightarrow \neg q \wedge p$ (Négation d'une négation)

   D'où, $\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg q \wedge p$

   Nous obtenons donc en langage courant : « Claude ne mange pas une pomme et il a faim. »

5.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. a) Michel n'est pas droitier ou Marc n'est pas gaucher.
   b) Le temps ne passe pas mais il revient.
   c) Nous voyons une hirondelle et ce n'est pas le printemps.
   (Une hirondelle ne fait pas le printemps!)
   d) Il est faux de dire que si la mer monte, alors les bateaux montent.
   e) Le bonheur s'achète.

2. a) Pierre a 18 ans et il ne joue pas au volley-ball.
   b) Pierre n'a pas 18 ans ou il ne joue pas au volley-ball.
   c) Pierre ne joue pas au volley-ball et n'a pas 18 ans.
   d) Pierre joue au volley-ball.

3. a) $\neg p \wedge \neg r$: Louise ne va pas au marché et les épinards ne sont pas chers.
   b) $r \wedge \neg q$: les épinards sont chers et les tomates ne sont pas belles.
   c) q : les tomates sont belles.
   d) $\neg r \vee \neg p$: les épinards ne sont pas chers ou Louise ne va pas au marché.
   e) $p \wedge \neg q$: Louise va au marché et les tomates ne sont pas belles.

4. a) Nous avons $\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg(\neg p)$ (Négation d'une conditionnelle)
   $\Leftrightarrow \neg q \wedge p$ (Négation d'une négation)
   D'où, $\neg(\neg q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg q \wedge p$

   b) Nous avons $\neg(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow \neg(p)$ (Négation d'une négation)

   D'où, $\neg(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow \neg p$

5. Nous avons $\neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q)$ (Négation d'une conjonction)
   $\Leftrightarrow p \vee q$ (Négation d'une négation)
   D'où, $\neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \vee q$

   Nous obtenons donc en langage courant : « Il fait noir ou j'ai peur. »

5.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Les phrases a), c) et f) sont des propositions.

2. a) Faux. b) Faux. c) Vrai. d) Vrai.

3.

			•		•	
p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \to q)]$	$\to$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	F	F	**V**	F
F	V	F	F	V	**V**	V
F	F	F	F	V	**V**	F
Ordre		1	3	2	**5**	4

b) Oui.

c) Parce que, quelle que soit la valeur des propositions simples qui la composent, la proposition composée est toujours vraie.

d) Oui.

e) Non parce que, pour avoir une équivalence, les propositions composées doivent être reliées par une biconditionnelle.

4. a)

			•		•	
p	q	q	$\wedge$	$(\neg p$	$\wedge$	$p)$
V	V	V	**F**	F	F	V
V	F	F	**F**	F	F	V
F	V	V	**F**	V	F	F
F	F	F	**F**	V	F	F
Ordre		1	**5**	2	4	3

b) C’est une contradiction.

c) Parce que, quelle que soit la valeur des propositions simples qui la composent, la proposition composée est toujours fausse.

5. a)

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(q \to p)$
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**F**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	V	**V**	V
Ordre		1	**3**	2

b) Ce n'est ni une tautologie ni une contradiction.

c) Non.

6. a) $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ d) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

7. $\neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)$ (Négation d'une disjonction)

$\Leftrightarrow p \wedge q$ (Négation d'une négation)

D'où, $\neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow p \wedge q$

8. M^me^ Hernandez fut la première à témoigner. Elle affirma: « Le soir du vol, M. Bouchard n'était pas à son appartement ou M. Bouchard n'était pas au restaurant. »

Quand arriva le tour de M. Pilon de se présenter à la barre, il déclara : « Au moment du vol, il est faux de dire que M. Bouchard était à son appartement et que M. Bouchard était au restaurant. »

Soit p : M. Bouchard était à son appartement,

q : M. Bouchard était au restaurant.

Le premier témoignage se traduit par $\neg p \vee \neg q$.

Le deuxième témoignage par $\neg(p \wedge q)$.

Ces deux témoignages sont équivalents puisque le premier est la forme simplifiée de la négation du deuxième, soit la négation d'une conjonction. Quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples, la proposition composée $\neg p \vee \neg q \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ sera toujours vraie. Le juge n'a donc pas hésité à rendre son verdict!

5.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Nous allons résoudre ce problème par élimination. Dans le tableau qui suit, cochons d'un X les cas où les deux personnes ne peuvent former un couple et d'un O les cas contraires.

	Annick	Béatrice	Chantal	Danielle
André	X_1			X_3
Byron	X_5			X_4
Charles	O_6	X_7	X_7	X_7
Denis	X_2			O_8

X_1 : Annick n'est pas la femme d'André.

X_2 : Denis n'est pas le mari d'Annick.

X_3 : Danielle n'est pas la femme d'André.

X_4 : Byron n'est pas le mari de Danielle.

X_5 : Byron n'est pas le mari d'Annick.

O_6 : Charles est alors le mari d'Annick.

X_7 : Charles étant le mari d'Annick ne peut donc être le mari de Béatrice, Chantal et Danielle.

O_8 : Danielle est donc la femme de Denis.

Exercice 6.1

1. a) Proposition, fausse.
   b) Forme propositionnelle, x.
   c) Forme propositionnelle, *elle*.
   d) Forme propositionnelle, a et b.
   e) Proposition, vraie.
   f) Forme propositionnelle, *il*.
   g) Forme propositionnelle, n.
   h) Forme propositionnelle, z.
   i) Proposition, vraie.
   j) Forme propositionnelle, m.

2. a) Vraie : 0, 2, 4, 6, ... Fausse : 1, 3, 5, 7, ...
   b) Vraie : 10, 11, 12, ... Fausse : 9, 8, 7, ...
   c) Vraie : 0, 5, 10, 15, ... Fausse : 1, 2, 3, 4, 6, ...
   d) Vraie : 5, 4, 3, 2, ... Fausse : 6, 7, 8, 9, ...
   e) Vraie : 2, 4, 6, ... Fausse : 1, 3, 5, 7, ...

Exercice 6.2

1. a) $Q(x) \wedge P(x)$ b) $R(x) \vee Q(x)$ c) $R(x) \rightarrow P(x)$

   d) $\neg Q(x) \wedge P(x)$ e) $\neg R(x) \leftrightarrow \neg P(x)$ f) $\neg(P(x) \vee R(x))$

2. a) x n'est pas plus grand que 0 ou est pair.

   b) x est pair si et seulement si c'est un entier.

   c) Si $x > 0$ et un entier, alors il est pair.

   d) Il est faux de dire que si $x > 0$, alors c'est un entier.

   e) $x > 0$ ou x est un entier pair.

Exercice 6.3

1. a) Vrai. b) Vrai. c) Faux. d) Vrai. e) Faux. S = {3, 4, 6}

2. a) Vrai. b) Faux. c) Vrai. d) Vrai. e) Faux. f) Vrai.
   S = {0, 5, 10, 15, 20, ...}

3. a) S = {1, 3, 5, 7, 9} b) S = {0, 2, 4, 6, 8} c) S = {5, 6, 7, 8, 9}

   d) S = {0} e) S = {2, 3, 5, 7} f) S = {0, 4, 8}

   g) S = {1, 2, 3, 4, 6, 8} h) S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

4. a) Vrai. b) Faux. c) Faux. d) Faux.

Exercice 6.4

1. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\rightarrow$	$Q(x)$
1	F	V	V	**V**	V
2	V	V	F	**V**	V
3	F	V	V	**V**	V
4	V	F	F	**V**	F
5	F	F	V	**F**	F
6	V	F	F	**V**	F
Ordre	1	2	3	**5**	4

S = {1, 2, 3, 4, 6}

b)

Élément du référentiel	$P(x)$	$R(x)$	$P(x)$	$\leftrightarrow$	$\neg R(x)$
1	F	F	F	**F**	V
2	V	F	V	**V**	V
3	F	F	F	**F**	V
4	V	V	V	**F**	F
5	F	V	F	**V**	F
6	V	V	V	**F**	F
Ordre	1	2	3	**5**	4

S = {2, 5}

c)

Élément du référentiel	$R(x)$	$Q(x)$	$(R(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$	$\rightarrow$	$Q(x)$
1	F	V	F	F	F	**V**	V
2	F	V	F	F	F	**V**	V
3	F	V	F	F	F	**V**	V
4	V	F	V	V	V	**F**	F
5	V	F	V	V	V	**F**	F
6	V	F	V	V	V	**F**	F
Ordre	1	2	3	5	4	**7**	6

S = {1, 2, 3}

2. a) Faux. b) Vrai. c) Faux. d) Faux. e) Faux. f) Vrai.
   g) Faux. h) Vrai.

6.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. a) Proposition, vraie.
   b) Forme propositionnelle, y.
   c) Forme propositionnelle, x et y.
   d) Forme propositionnelle, z.

2. a) $Q(x) \wedge R(x)$ b) $\neg P(x)$

   c) $R(x) \rightarrow (P(x) \vee Q(x))$ d) $Q(x) \leftrightarrow (R(x) \vee \neg P(x))$

3. a) x n'est pas impair ou $x > 7$.
   b) Il est faux de dire que si x est impair, alors c'est un nombre naturel.
   c) x est un nombre naturel si et seulement si il n'est pas supérieur à 7.

4. a) Vrai. b) Faux. c) Faux. d) Vrai.

5. a) Vrai. b) Faux. c) Vrai. d) Faux.

6. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$	$\rightarrow$	$\neg Q(x)$
4	V	V	V	**F**	F
5	V	V	V	**F**	F
6	V	V	V	**F**	F
7	V	V	V	**F**	F
8	F	V	F	**V**	F
9	F	V	F	**V**	F
Ordre	1	2	3	**5**	4

S = {8, 9}

b)

Élément du référentiel	$Q(x)$	$R(x)$	$Q(x)$	$\leftrightarrow$	$(Q(x)$	$\vee$	$\neg R(x))$
4	V	F	V	**V**	V	V	V
5	V	V	V	**V**	V	V	F
6	V	F	V	**V**	V	V	V
7	V	V	V	**V**	V	V	F
8	V	F	V	**V**	V	V	V
9	V	F	V	**V**	V	V	V
Ordre	1	2	3	**7**	4	6	5

S = {4, 5, 6, 7, 8, 9}

6.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Une proposition est toujours soit vraie soit fausse, tandis qu'une forme propositionnelle peut être vraie ou fausse selon la valeur de la variable.

2. a) Une forme propositionnelle simple.
   b) Une proposition composée.
   c) Une forme propositionnelle composée.
   d) Une proposition composée.
   e) Aucune des quatre premières réponses.

3. a) $\neg(Q(x, y) \rightarrow \neg P(x, y))$
   b) 1° Faux. 2° Vrai. 3° Vrai. 4° Vrai.
   c) Parce que 12 n'est pas un élément du référentiel.
   d) $P(1, 1)$, $P(4, 2)$ et $P(9, 3)$.
   e) $Q(3, 1)$, Q(6, 2) et Q(9, 3).

4. a) $R(x) \rightarrow (Q(x) \wedge P(x))$
   b) x est un carré ou x n'est pas inférieur ou égal à 6.

   c)

Élément du référentiel	$R(x)$	$P(x)$	$R(x)$	$\vee$	$\neg P(x)$
1	V	V	V	**V**	F
2	F	V	F	**F**	F
4	V	V	V	**V**	F
7	F	F	F	**V**	V
9	V	F	V	**V**	V
16	V	F	V	**V**	V
25	V	F	V	**V**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

   d) S = {1, 4, 7, 9, 16, 25}

5.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
0	V	F	**F**
1	V	F	**F**
2	V	F	**F**
3	V	V	**V**
4	V	V	**V**
5	F	V	**F**
6	F	V	**F**
7	F	V	**F**
Ordre	1	2	**3**

S = {3, 4}

6.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Louise est née le 4 octobre. Le tableau ci-dessous, dans lequel nous avons mis les affirmations des cinq amies, nous montre que le 4 est la seule date du mois sur laquelle quatre d'entre elles ont menti!

Date	IMPAIR	PAS UN CARRÉ	UN CUBE	>13	<17
1	V	F	V	F	V
2	F	V	F	F	V
3	V	V	F	F	V
4	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**
5	V	V	F	F	V
6	F	V	F	F	V
7	V	V	F	F	V
8	F	V	V	F	V
9	V	F	F	F	V
10	F	V	F	F	V
11	V	V	F	F	V
12	F	V	F	F	V
13	V	V	F	F	V
14	F	V	F	V	V
15	V	V	F	V	V
16	F	F	F	V	V
17	V	V	F	V	F
18	F	V	F	V	F
19	V	V	F	V	F
20	F	V	F	V	F
21	V	V	F	V	F
22	F	V	F	V	F
23	V	V	F	V	F
24	F	V	F	V	F
25	V	F	F	V	F
26	F	V	F	V	F
27	V	V	V	V	F
28	F	V	F	V	F
29	V	V	F	V	F
30	F	V	F	V	F
31	V	V	F	V	F

Exercice 7.1

1. a) Faux. b) Faux. c) Faux. d) Vrai. e) Faux. f) Vrai. g) Faux.

2. a) 30 b) 1 c) 4, 30 d) 49 e) 1, 4, 25, 49

Exercice 7.2

1. a) Vrai. b) Vrai. c) Vrai. d) Faux. e) Vrai. f) Faux. g) Vrai.

2. a) 8 b) 3 c) 3, 5, 9 d) 5 e) 3, 5

3. a) Universel. b) Existentiel. c) Existentiel.
   d) Aucun. e) Existentiel. f) Universel.

Exercice 7.3

1. a) Faux. b) Vrai. c) Vrai. d) Vrai. e) Vrai. f) Faux. g) Faux.

2. a) 8 b) 2 c) 9 d) 10 e) 3

3. a) Universel. b) Existentiel. c) Existentiel d'unicité.
   d) Aucun. e) Existentiel. f) Universel.

Exercice 7.4

1. a) Certains élèves ne sont pas en congé.
   b) Certains élèves sont en congé.
   c) Tous les élèves sont en congé.
   d) Aucun élève n'est en congé.

2. a) Tout le monde est sincère.
   b) Certaines personnes sont sincères.
   c) Aucune personne n'est sincère.
   d) Certaines personnes ne sont pas sincères.

3. a) Certains nombres sont naturels.
   b) Aucun nombre n'est naturel.
   c) Tous les nombres sont naturels.
   d) Certains nombres ne sont pas naturels.

Exercice 7.5

1. a) Certains nombres naturels ne sont pas plus grands que 0.
   b) Certains nombres naturels sont supérieurs à 0.
   c) Aucun nombre naturel n'est plus grand que 0.
   d) Aucun nombre naturel n'est supérieur à 0.

2. $\neg\forall x : P(x) \wedge \neg Q(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$ (5)

   $\Leftrightarrow \exists x : \neg P(x) \vee \neg(\neg Q(x))$ (2)

   $\Leftrightarrow \exists x : \neg P(x) \vee Q(x)$ (1)

3. $\neg\exists x : \neg P(x) \vee \neg Q(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$ (6)

   $\Leftrightarrow \forall x : \neg(\neg P(x) \wedge \neg(\neg Q(x))$ (3)

   $\Leftrightarrow \forall x : P(x) \wedge Q(x)$ (1)

4. Il faut trouver la négation de $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$.

   $\neg\exists x : P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg(P(x) \wedge Q(x))$ (6)

   $\Leftrightarrow \forall x : \neg P(x) \vee \neg Q(x)$ (2)

   Cette négation peut se traduire par « tous les nombres ne sont pas multiples de 3 ou de 2 » .

Exercice 7.6

1. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x)$
1	F	V	F	**F**	F
2	V	V	V	**V**	F
3	V	V	V	**V**	F
4	F	V	F	**F**	F
8	F	F	F	**V**	V
12	F	V	F	**F**	F
17	V	F	V	**V**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

b) Fausse. c) Vraie. d) Fausse.

2. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\wedge$	$\neg Q(x)$
1	V	V	F	**F**	F
4	V	F	F	**F**	V
8	F	V	V	**F**	F
11	F	F	V	**V**	V
16	V	F	F	**F**	V
27	F	V	V	**F**	F
36	V	F	F	**F**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

b) Fausse. c) Vraie. d) Vraie.

3. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$(P(x) \wedge Q(x))$	$\vee$	$\neg R(x)$
1	F	V	F	F	**V**	V
2	F	V	F	F	**V**	V
3	F	V	F	F	**V**	V
4	V	V	F	V	**V**	V
5	V	V	F	V	**V**	V
6	V	V	V	V	**V**	F
7	V	F	F	F	**V**	V
8	V	F	F	F	**V**	V
Ordre	1	2	3	4	**6**	5

b) Vraie. c) Vraie. d) Fausse.

7.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. a) Vrai. b) Vrai. c) Faux. d) Faux. e) Vrai.
   f) Faux. g) Vrai. h) Vrai. i) Vrai. j) Vrai.

2. a) 0 b) 0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14 c) 0, 9, 14
   d) 0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14 e) 0, 2, 5, 7, 11, 14

3. a) 1° $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$
   2° Tous les boxeurs ne sont pas grands ou ne sont pas minces.

   b) 1° $\forall x : P(x) \vee R(x)$
   2° Certains boxeurs ne sont ni grands ni forts.

   c) 1° $\exists x : \neg Q(x) \wedge \neg R(x)$
   2° Tous les boxeurs sont minces ou forts.

4. $\neg \exists x : \neg P(x) \vee Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$ (6)
   $\Leftrightarrow \quad \forall x : \neg(\neg P(x)) \wedge \neg pQ(x)$ (3)
   $\Leftrightarrow \quad \forall x : P(x) \wedge \neg Q(x)$ (1)

5. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\wedge$	$Q(x)$
1	V	F	F	**F**	F
4	V	F	F	**F**	F
5	F	V	V	**V**	V
10	F	V	V	**V**	V
15	F	V	V	**V**	V
16	V	F	F	**F**	F
20	F	V	V	**V**	V
25	V	V	F	**F**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

b) Fausse. Tous les éléments du référentiel ne transforment pas la forme propositionnelle en proposition vraie.

c) Vraie. Au moins un élément du référentiel transforme la forme propositionnelle en proposition vraie.

d) Fausse. Plus de un élément du référentiel transforme la forme propositionnelle en proposition vraie.

6. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$R(x)$	$(P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x))$	$\wedge$	$R(x)$
3	F	F	F	F	V	V	**F**	F
4	F	F	F	F	V	V	**F**	F
5	F	F	V	F	V	V	**V**	V
6	V	F	V	V	V	V	**V**	V
7	F	F	V	F	V	V	**V**	V
8	F	V	V	F	F	F	**F**	V
9	F	F	V	F	V	V	**V**	V
10	F	F	V	F	V	V	**V**	V
Ordre	1	2	3	4	6	5	**8**	7

b) Fausse. c) Vraie. d) Fausse.

7.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. a) Faux. b) Vrai. c) Vrai. d) Faux. e) Vrai.

2. a) Forme propositionnelle simple.
   b) Proposition simple.
   c) Forme propositionnelle quantifiée.
   d) Proposition composée.
   e) Aucune des réponses.
   f) Forme propositionnelle composée quantifiée.
   g) Forme propositionnelle composée.

3. a) $P(x) \rightarrow (\neg R(x) \vee \neg Q(x))$

   b) x n'est pas un facteur de 12 si et seulement si $x > 3$.

   c)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg Q(x)$	$\leftrightarrow$	$P(x)$
0	F	F	V	**F**	F
1	F	V	F	**V**	F
2	F	V	F	**V**	F
3	F	V	F	**V**	F
4	V	V	F	**F**	V
6	V	V	F	**F**	V
8	V	F	V	**V**	V
9	V	F	V	**V**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

   d) {1, 2, 3, 8, 9}

4. a) $\exists x : Q(x)$ b) $\exists! x : Q(x)$ c) $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$

d) $\exists x : P(x) \wedge \neg Q(x)$ e) $\neg \forall x : P(x)$

5. a) Fausse. b) Fausse. c) Vraie.

6. a)

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\vee$	$\neg Q(x)$
1	V	V	F	**F**	F
2	F	F	V	**V**	V
4	V	F	F	**V**	V
8	F	V	V	**V**	F
9	V	F	F	**V**	V
16	V	F	F	**V**	V
25	V	F	F	**V**	V
27	F	V	V	**V**	F
Ordre	1	2	3	**5**	4

b) Fausse. c) Vraie. d) Fausse.

7.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

1. Tous les cubes plus petits que 500 ou U = {1, 8, 27, 64, 125, 216, 343}.

2. $\forall x : P(x) \vee Q(x)$

3. $\exists! x : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$

4.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
1	V	F	**V**
8	F	V	**V**
27	V	F	**V**
64	F	V	**V**
125	V	F	**V**
216	F	V	**V**
343	V	F	**V**
Ordre	1	2	**3**

5. Oui.

6.

Élément du référentiel	$P(x)$	$Q(x)$	$\neg P(x)$	$\wedge$	$\neg Q(x)$
1	V	F	F	**F**	V
8	F	V	V	**F**	F
27	V	F	F	**F**	V
64	F	V	V	**F**	F
125	V	F	F	**F**	V
216	F	V	V	**F**	F
343	V	F	F	**F**	V
Ordre	1	2	3	**5**	4

7. Non.

8. C’est Mario qui a raison.

GLOSSAIRE

Les définitions données dans ce glossaire précisent le sens des termes utilisés dans le présent module. Cependant, ces termes peuvent avoir d'autres sens dans un autre contexte.

Antécédent *n. m.* Première proposition d'une conditionnelle. Dans $p \rightarrow q$, c'est la proposition p.

Biconditionnelle *n. f.* Opérateur logique représenté par le symbole $\leftrightarrow$.

Conditionnelle *n. f.* Opérateur logique représenté par le symbole $\rightarrow$.

Conjonction *n. f.* Opérateur logique représenté par le symbole $\wedge$.

Conséquent *n. m.* Deuxième proposition d'une conditionnelle. Dans $p \rightarrow q$, c'est la proposition q.

Contradiction *n. f.* Proposition qui est toujours fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

Disjonction *n. f.* Opérateur logique représenté par le symbole $\vee$.

Ensemble de référence Ensemble de toutes les valeurs possibles que peut prendre une variable.

Ensemble-solution *n. m.* Ensemble des valeurs de l'ensemble de référence que peut prendre la variable pour transformer la forme propositionnelle en proposition vraie.

Équivalence ou équivalence logique Biconditionnelle qui est une tautologie. L'équivalence est représentée par le symbole $\Leftrightarrow$.

Extension (définition d'un ensemble en) Énumération sans répétition des éléments qui appartiennent à un ensemble.

Forme propositionnelle Énoncé qui renferme une ou plusieurs variables et qui peut devenir vrai ou faux selon les valeurs de ces variables.

Implication ou implication logique Conditionnelle qui est une tautologie. L'implication est représentée par le symbole $\Rightarrow$.

Logique *n. f.* Science qui étudie le raisonnement en lui-même.

Négation *n. f.* Opérateur logique représenté par le symbole $\neg$.

Opérateurs logiques Opérateurs qui relient deux propositions simples. Ce sont : ne... pas, et, ou, si... alors, si et seulement si.

Proposition *n. f.* Énoncé qui est soit vrai soit faux.

Proposition composée Proposition dans laquelle nous retrouvons au moins un opérateur logique.

Proposition simple Proposition qui n'est pas reliée par un opérateur logique.

Propositions équivalentes Deux propositions qui, lorsqu'elles sont reliées par le symbole de la biconditionnelle ($\leftrightarrow$), forment une tautologie. Nous relions ensuite ces deux propositions par le symbole $\Leftrightarrow$.

Quantificateur *n. m.* Symbole indiquant qu'une propriété s'applique à tous les éléments d'un ensemble (quantificateur universel noté $\forall$), à certains éléments d'un ensemble (quantificateur existentiel noté $\exists$) ou à un seul d'entre eux (quantificateur existentiel d'unicité noté $\exists!$).

Référentiel *n. m.* Voir ensemble de référence.

Table de vérité Tableau qui nous permet de vérifier la valeur de vérité d'une proposition composée.

Tautologie *n. f.* Proposition qui est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent.

Valeur de vérité Valeur que peut prendre une proposition ou une forme propositionnelle. Celle-ci peut être vraie (V) ou fausse (F).

Variable *n. f.* Lettre ou mot qui peut prendre différentes valeurs.

LISTE DES SYMBOLES

$\mathbb{N}$	:	ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	:	ensembles des nombres entiers
$\neg$	:	négation, ne... pas
$\wedge$	:	conjonction
$\vee$	:	disjonction
$\rightarrow$	:	conditionnelle
$\leftrightarrow$	:	biconditionnelle
$\Rightarrow$	:	implication logique
$\not\Rightarrow$	:	n’est pas une implication logique
$\Leftrightarrow$	:	équivalence logique
$\not\Leftrightarrow$	:	n’est pas une équivalence logique
$\forall$	:	pour tout
$\exists$	:	il existe, existence
$\exists!$	:	il existe un et un seul, unicité
$=$	:	égal a
$\neq$	:	n’est pas égal à
$>$	:	supérieur à, plus grand que
$<$	:	inférieur à, plus petit que

BIBLIOGRAPHIE

ADLER, I., traduction de D. Meunier. *Découverte des mathématiques*, Paris, Édition des deux coqs d'or, 1961, 141 p.

BELL, E. T. *Les grands mathématiciens*, Paris, Payot, 1961, 615 p.

BERGAMINI, David et autres. *Les mathématiques*, s.l., 3e éd. rev., Collection Time Life, 1972, 200 p.

BOURBAKI, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1969, 323 p.

COLETTE, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques I*, Ottawa, Éditions du renouveau pédagogique inc., 1973, 228 p.

DALLAIRE, J. LAMBERT et G. ROCHETTE. *Mathématique Soleil 4*, *Option 1*, Tome 1, Montréal, Guérin, 1986, 336 p.

DEDRON, P. et J. ITARD. *Mathématiques et mathématiciens*, Paris, Les éditions Magnard, 1959, 433 p.

DORÉ, J., J. LAMBERT., N. L'ÉCUYER., C. JOBIN et G. ROCHETTE. *Mathématique Soleil 4*, *Option 1*, Tome 2, Montréal, Guérin, 1986, 552 p.

HOGBEN, L. *Les mathématiques pour tous*, Paris, Payot, 1962, 687 p.

MOISE, É., F. L. DOWNS. *Mathématiques modernes*, Montréal, Éditions du renouveau pédagogique inc., 1967, 591 p.

PAQUET, J. C. *50 énigmes du prof Jissé*, Montréal, La Presse, 1975, 126 p.

PATENAUDE, P. *Guide des termes et symboles*, Ottawa, GRMS, 1981, 195 p.

PESEZ, Y. *Les mathématiques*, Paris, CEPL, 1975, 544 p.

Corrigé

ACTIVITÉS DE RÉVISION

POURQUOI DEVONS-NOUS RÉVISER CERTAINES NOTIONS?

Pour répondre à cette question, comparons la révision aux exercices d'échauffement que font les athlètes avant un match ou une épreuve sportive.

Tous les athlètes savent qu'il est imprudent de se lancer dans la compétition sans une préparation adéquate. En échauffant leurs muscles par des exercices d'assouplissement appropriés, ils diminuent les risques de blessures et augmentent leurs chances de succès.

De ce point de vue, l'apprentissage intellectuel ressemble beaucoup au sport. Tout nouvel apprentissage s'appuie en effet sur les précédents. Dans le cas de l'apprentissage, le « muscle » utilisé est la mémoire, une faculté qui oublie; nous devons donc, comme l'athlète, nous échauffer un peu avant de commencer la partie.

L'épreuve sur les préalables aura peut-être révélé des petits trous de mémoire. C'est normal. Vous devez donc les combler avant de commencer les apprentissages, sinon votre rendement en sera diminué. Comme l'échauffement pour l'athlète, la révision vous permettra d'aiguiser votre mémoire et d'accroître votre rendement. Résumons ici les objectifs de la révision :

- faciliter et améliorer l'apprentissage;
- vous permettre de gagner du temps en faisant une brève mise à jour des préalables.

Consignes

1° N'effectuez que les activités de révision correspondant aux réponses **incorrectes** de l'épreuve diagnostique sur les préalables.

2° Effectuez ces activités dans l'ordre où elles se succèdent sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique.

3° Lisez toutes les explications qui correspondent aux notions à réviser, observez attentivement les exemples et effectuez les exercices prévus.

4° Vérifiez vos exercices avec le corrigé qui suit les activités de révision.

5° Assurez-vous de bien comprendre toutes les notions que vous devez réviser avant d'entreprendre les apprentissages. S'il y a lieu, demandez l'aide de votre formateur ou de votre formatrice ou, si vous suivez des cours en formation à distance, de la personne-ressource chargée de vous encadrer.

6° Une fois la révision terminée, retournez au sous-module correspondant pour commencer les apprentissages.

7° Même en cours d'apprentissage, n'hésitez pas à revenir, s'il le faut, au fascicule de révision.

9.1 MULTIPLES, DIVISEURS, NOMBRES PREMIERS

Définitions

Les **multiples** d'un nombre naturel sont tous les nombres qui peuvent être divisés sans reste par ce nombre.

Les **diviseurs** d'un nombre naturel sont les nombres par lesquels nous pouvons diviser ce nombre et obtenir un quotient sans reste. Nous les appelons aussi **facteurs** de ce nombre.

Un **nombre premier** est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 1

Les multiples de 12 sont 0, 12, 24, 36, 48, 60, ... En effet, tous ces nombres peuvent être divisés sans reste par 12. Par convention, nous les notons M(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, ...}.
N.B. – Les trois points de suspension (...) signifient que la suite des nombres est infinie.

Exemple 2

Les diviseurs ou les facteurs de 12 sont 12, 6, 4, 3, 2 et 1 parce que nous pouvons diviser 12 par 12 (= 1), par 6 (= 2), par 4 (= 3), par 3 (= 4), par 2 (= 6) et par 1 (= 12). Par convention, nous les notons D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Explication 1

Pour trouver les multiples d'un nombre, il suffit de multiplier ce nombre par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Dans l'exemple précédent, pour trouver les multiples de 12, nous avons calculé :

$$\begin{array}{cccccc} 12 & \times & 0 & = & \mathbf{0} \\ 12 & \times & 1 & = & \mathbf{12} \\ 12 & \times & 2 & = & \mathbf{24} \\ 12 & \times & 3 & = & \mathbf{36} \\ 12 & \times & 4 & = & \mathbf{48} \\ 12 & \times & 5 & = & \mathbf{60} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

En fait, nous pouvons trouver une infinité de multiples d'un même nombre, car il y a une infinité de nombres naturels. D'où, M(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, ...}.

Exemple 3

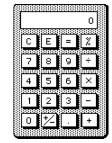
Quels sont les multiples de 5?

$$\begin{array}{cccccc} 5 & \times & 0 & = & \mathbf{0} \\ 5 & \times & 1 & = & \mathbf{5} \\ 5 & \times & 2 & = & \mathbf{10} \\ 5 & \times & 3 & = & \mathbf{15} \\ 5 & \times & 4 & = & \mathbf{20} \\ 5 & \times & 5 & = & \mathbf{25} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

D'où, M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, ...}.

Ce n'est pas le cas quand nous cherchons les facteurs ou les diviseurs d'un nombre. Dans l'exemple 2, nous avons trouvé six facteurs pour le nombre 12. Inutile de chercher plus longtemps, il n'y en a pas d'autres!

Explication 2



Pour trouver les diviseurs (ou facteurs) d'un nombre, il suffit de bien utiliser la calculatrice. Pour trouver les diviseurs (ou facteurs) de 12 à l'aide de la calculatrice, nous devons faire comme suit :

12	÷	**1**	=	**12**	1×12
12	÷	**2**	=	**6**	2×6
12	÷	**3**	=	**4**	3×4
12	÷	**4**	=	**3**	4×3

Les deux derniers diviseurs (ou facteurs), 4 et 3, ont déjà été déterminés. Nous arrêtons alors l'opération. Nous avons donc trouvé tous les diviseurs (ou facteurs) de 12. D'où, D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Exemple 4

Trouvons tous les diviseurs de 98.

98	÷	**1**	=	**98**	1×98
98	÷	**2**	=	**49**	2×49
98	÷	**3**	=	32.666...	
98	÷	**4**	=	24.5	
98	÷	**5**	=	19.6	
98	÷	**6**	=	16.333...	
98	÷	**7**	=	**14**	7×14
98	÷	**8**	=	12.25	
98	÷	**9**	=	10.888...	
98	÷	**10**	=	9.8	
98	÷	**11**	=	8.9090...	
98	÷	**12**	=	8.1666...	
98	÷	**13**	=	7.5384...	
98	÷	**14**	=	**7**	14×7

Les deux derniers diviseurs, 14 et 7, ont déjà été déterminés. Nous arrêtons alors l'opération et D(98) = {1, 2, 7, 14, 49, 98}.

Dans les faits, nous n'écrivons que les lignes qui déterminent les diviseurs.

Exemple 5

Trouvons tous les diviseurs de 100.

$\boxed{100}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\boxed{=}$	**100**	1×100
$\boxed{100}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{\mathbf{2}}$	$\boxed{=}$	**50**	2×50
$\boxed{100}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{\mathbf{4}}$	$\boxed{=}$	**25**	4×25
$\boxed{100}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{\mathbf{5}}$	$\boxed{=}$	**20**	5×20
$\boxed{100}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{\mathbf{10}}$	$\boxed{=}$	**10**	10×10

D(100) = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}

Explication 3

Quand nous voulons déterminer les diviseurs (ou facteurs) d'un nombre, il est utile de savoir rapidement si ce nombre est divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 et 10 sans effectuer la division en entier.

Règles de divisibilité

1° Tous les nombres pairs sont divisibles par 2.
2° Si la somme des chiffres qui composent un nombre est divisible par 3, ce nombre est lui aussi divisible par 3.
3° Un nombre naturel est divisible par 4 si le nombre formé par les deux derniers chiffres (dizaines et unités) est divisible par 4.
4° Tout nombre naturel qui se termine par 0 ou 5 est divisible par 5.
5° Tous les nombres pairs divisibles par 3 sont divisibles par 6.
6° Un nombre naturel est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres (centaines, dizaines et unités) est divisible par 8.
7° Un nombre naturel est divisible par 9 si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.
8° Tout nombre naturel qui se termine par 0 est divisible par 10.

Exemple 6

72 est divisible par :

- 2 parce que c'est un nombre pair;
- 3 parce que la somme de ses chiffres (7 + 2 = 9) est divisible par 3;
- 4 parce que le nombre formé par les dizaines et les unités (72) est divisible par 4;
- 6 parce qu'il est pair et divisible par 3;
- 9 parce que la somme de ses chiffres (7 + 2 = 9) est divisible par 9.

Donc, 2, 3, 4, 6 et 9 sont des facteurs de 72.

Exemple 7

324 est divisible par :

- 2 parce que c'est un nombre pair;
- 3 parce que la somme de ses chiffres (3 + 2 + 4 = 9) est divisible par 3;
- 4 parce que le nombre formé par les dizaines et les unités (24) est divisible par 4;
- 6 parce qu'il est pair et divisible par 3;
- 9 parce que la somme de ses chiffres (3 + 2 + 4 = 9) est divisible par 9.

Explication 4

Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... sont des nombres premiers. En effet, chacun de ces nombres ne peut se diviser sans reste que par 1 et lui-même. Ils possèdent donc exactement 2 diviseurs.

D(2) = {1, 2}	D(3) = {1, 3}	D(5) = {1, 5}	D(7) = {1, 7}
D(11) = {1, 11}	D(13) = {1, 13}	D(17) = {1, 17}	...

Le nombre 9, par exemple, n'est pas un nombre premier, car il possède plus de deux diviseurs. Nous pouvons en effet diviser 9 par 1, par 3 et par 9.

Le nombre 1 non plus n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un diviseur, soit 1.

Parmi les nombres pairs, seul le nombre 2 est un nombre premier puisque tout autre nombre pair possède 1 et lui-même comme diviseurs ainsi que le nombre 2, nécessairement. Pour trouver les nombres premiers parmi les nombres impairs, il s'agit simplement de trouver les diviseurs de ce nombre comme vu précédemment à l'exemple 4.

Exercice 9.1

1. Quels sont les multiples des nombres suivants?

   a) 5 ....

   b) 7 ....

   c) 12 ....

2. Quels sont les diviseurs des nombres suivants?

   a) 50 ....

   b) 124 ....

   c) 126 ....

   d) 90 ....

3. Écrivez les nombres premiers compris entre 1 et 50.

   ....

4. Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers?

   a) 77 .... b) 93 .... c) 51 .... d) 73 ....

Vérifiez vos réponses avec le corrigé à la page 9.19.

Si vous avez bien compris cette activité de révision, retournez à la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique pour entreprendre le sous-module correspondant à cette activité. Sinon, revoyez les explications et reprenez les exercices.

9.2 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE VARIABLE

Une **équation du premier degré** est une équation dont la ou les variables sont affectées de l'exposant 1.

Une **équation à une variable** est une équation dont une lettre peut prendre différentes valeurs.

Résoudre une équation signifie trouver la valeur de la variable pour laquelle l'égalité est vérifiée.

Dans l'équation $x + 3 = 5$, la variable x ne peut prendre qu'une seule valeur. Trouvons-la. Comme cette équation est très simple, nous pouvons calculer la valeur de x en un clin d'œil. Il suffit de chercher quelle quantité doit être ajoutée à 3 pour obtenir 5 comme résultat. Vous l'avez deviné : x doit valoir **2**!

Mais si nous vous demandons de trouver la valeur de x dans l'équation $2x - 3 = 5$, la solution n'est pas aussi évidente. Dans ce cas, nous devons appliquer certaines règles d'algèbre.

Explication 1

Pour résoudre une équation à une variable, nous devons **isoler** la variable, c'est-à-dire effectuer des opérations arithmétiques ($+, -, \times, \div$) pour que la variable soit **isolée** à la gauche du signe d'égalité (=). Observez attentivement l'exemple qui suit.

Exemple 1

Calculons la valeur de $\boldsymbol{x}$ dans l'équation $\mathbf{2\boldsymbol{x} - 3 = 5}$.

1° Pour isoler la variable x à gauche du signe =, nous devons d'abord éliminer le terme **3** du membre à gauche de l'égalité. Pour ce faire, il suffit d'additionner 3 aux deux membres de l'égalité.

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3$$

N.B. – Si nous ajoutons 3 à gauche de l'égalité, nous devons aussi l'ajouter au membre de droite pour ne pas modifier la valeur de l'équation.

2° Après avoir effectué ces additions, nous obtenons la nouvelle égalité suivante.

$$2x = 8$$

3° Pour supprimer le coefficient **2** de la variable x, nous divisons chacun des membres de l'égalité par 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

4° Nous effectuons les divisions et nous obtenons la solution de l'équation, c'est-à-dire la valeur de la variable.

$$x = 4$$

5° Vérifions ce résultat en remplaçant dans l'équation d'origine la variable x par le chiffre 4.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 5 \\ 2(4) - 3 &= 5 \\ 8 - 3 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

Puisque l'égalité est vérifiée, nous sommes certains de la justesse de la solution!

Exemple 2

Résolvons l'équation $3x + 7 = 10 + 3$.

1°	$3x + 7 = 10 + 3$ $3x + 7 = 13$	• Nous effectuons, s'il y a lieu, les sommes de termes semblables dans chaque membre de l'équation.
2°	$3x + 7 - 7 = 13 - 7$	• Nous éliminons le terme 7 en le soustrayant de chacun des membres de l'égalité.
3°	$3x = 6$	• Nous effectuons les soustractions.
4°	$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{6}{3}$	• Nous éliminons le 3 en divisant chacun des membres de l'égalité par 3.
5°	$x = 2$	• Nous effectuons les divisions et nous obtenons le résultat recherché.
6°	$3x + 7 = 10 + 3$ $3(2) + 7 = 13$ $6 + 7 = 13$ $13 = 13$	• Nous vérifions le résultat en remplaçant la variable par la valeur trouvée dans l'équation d'origine.

Exemple 3

$3x - 4 + 6 = 5x - 2$

$3x + 2 = 5x - 2$	• En effectuant les sommes de termes semblables.

$$3x - 5x = -2 - 2$$
$$-2x = -4$$

• En transposant les termes et en effectuant les opérations.

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$$
$$x = 2$$

• En divisant par –2 les 2 membres de l'équation.

$$3x - 4 + 6 = 5x - 2$$
$$3(2) - 4 + 6 = 5(2) - 2$$
$$6 - 4 + 6 = 10 - 2$$
$$8 = 8$$

• En vérifiant le résultat.

Pour résoudre une équation du premier degré à une variable, nous devons :

1° effectuer, s'il y a lieu, les sommes de termes semblables dans chaque membre de l'équation;

2° transposer les termes contenant la variable dans un membre de l'équation et les termes constants dans l'autre membre;

3° effectuer les soustractions ou les additions des termes semblables;

4° éliminer le coefficient qui multiplie ou divise la variable :

- si la variable est multipliée par un nombre, nous devons diviser chacun des membres de l'égalité par ce nombre,
- si la variable est divisée par un nombre, nous devons multiplier chacun des membres de l'égalité par ce nombre;

5° effectuer les divisions ou les multiplications;

6° vérifier le résultat en remplaçant la variable par la valeur trouvée dans l'équation d'origine.

Exercice 9.2

Résolvez les équations ci-dessous en isolant la variable, puis vérifiez vos résultats.

Résolution Vérification

1. $x + 7 = 13$

....

....

....

2. $3x - 5 = 22$

....

....

....

....

3. $-x + 5 = 2$

....

....

....

....

4. $2x - 8 = x + 12$

....

....

....

....

5. $7y - 2y = 20 - 5$

....

....

....

....

6. $-4x = 16$

....

....

....

7. $-3y - 5 = 13$

....

....

....

....

8. $4x - 6x = -18 + 20$

....

....

....

....

9. $3y - 15 = 4y + 5$

....

....

....

....

10. $8x - 6x + 3 = -5 - 2x$

....

....

....

....

....

Vérifiez vos réponses avec le corrigé à la page 9.19.

Si vous avez bien compris cette activité de révision, retournez à la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique pour entreprendre le sous-module correspondant à cette activité. Sinon, revoyez les explications et reprenez les exercices.

1 [redacted]
2 [redacted]
3 [redacted]

CORRIGÉ DES EXERCICES

Exercice 9.1

1. a) M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, 25, ...}
   b) M(7) = {0, 7, 14, 21, 28, 35, ...}
   c) M(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...}

2. a) D(50) = {1, 2, 5, 10, 25, 50}
   b) D(124) = {1, 2, 4, 31, 62, 124}
   c) D(126) = {1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126}
   d) D(90) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}

3. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

4. a) Non. b) Non. c) Non. d) Oui.

Exercice 9.2

	Résolution	**Vérification**
1.	$x + 7 = 13$	$x + 7 = 13$
	$x = 13 - 7$	$6 + 7 = 13$
	$x = 6$	$13 = 13$
2.	$3x - 5 = 22$	$3x - 5 = 22$
	$3x = 22 + 5$	$3(9) - 5 = 22$
	$\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$	$27 - 5 = 22$
	$x = 9$	$22 = 22$

3. $$\begin{aligned}-x + 5 &= 2\\ -x &= 2 - 5\\ -x &= -3\\ -x \times (-1) &= -3 \times (-1)\\ x &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-x + 5 &= 2\\ -(3) + 5 &= 2\\ 2 &= 2\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}2x - 8 &= x + 12\\ 2x - x &= 12 + 8\\ x &= 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x - 8 &= x + 12\\ 2(20) - 8 &= 20 + 12\\ 40 - 8 &= 32\\ 32 &= 32\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}7y - 2y &= 20 - 5\\ 5y &= 15\\ \frac{5y}{5} &= \frac{15}{5}\\ y &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7y - 2y &= 20 - 5\\ 7(3) - 2(3) &= 20 - 5\\ 21 - 6 &= 15\\ 15 &= 15\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}-4x &= 16\\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{16}{-4}\\ x &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4x &= 16\\ -4(-4) &= 16\\ 16 &= 16\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}-3y - 5 &= 13\\ -3y &= 13 + 5\\ -3y &= 18\\ \frac{-3y}{-3} &= \frac{18}{-3}\\ y &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3y - 5 &= 13\\ -3(-6) - 5 &= 13\\ 18 - 5 &= 13\\ 13 &= 13\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}4x - 6x &= -18 + 20\\ -2x &= 2\\ \frac{-2x}{-2} &= \frac{2}{-2}\\ x &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x - 6x &= -18 + 20\\ 4(-1) - 6(-1) &= -18 + 20\\ -4 + 6 &= 2\\ 2 &= 2\end{aligned}$$

9. $3y - 15 = 4y + 5$

$$3y - 4y = 5 + 15$$
$$-y = 20$$
$$y = -20$$

$$3y - 15 = 4y + 5$$
$$3(-20) - 15 = 4(-20) + 5$$
$$-60 - 15 = -80 + 5$$
$$-75 = -75$$

10. $8x - 6x + 3 = -5 - 2x$

$$2x + 3 = -5 - 2x$$
$$2x + 2x = -5 - 3$$
$$4x = -8$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{-8}{4}$$
$$x = -2$$

$$8x - 6x + 3 = -5 - 2x$$
$$8(-2) - 6(-2) + 3 = -5 + 2(-2)$$
$$-16 + 12 + 3 = -5 + 4$$
$$-1 = -1$$

sofad

1434-01

ISBN : 978-2-89493-311-4

9 782894 933114