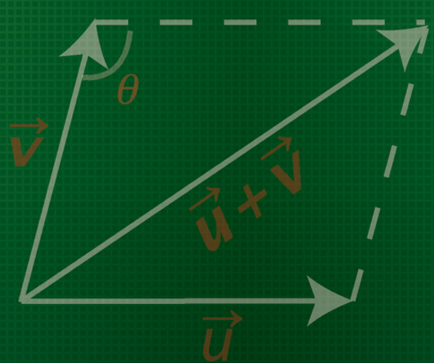
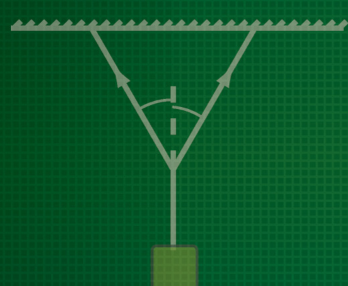
MAT-5110-1

INTRODUCTION AUX VECTEURS





sofad

MAT-5110-1

INTRODUCTION AUX VECTEURS

Coordonnateur des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteur : Alain Malouin

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseure linguistique : Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Première édition : 2008

Dépôt légal — 2008

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-89493-309-1

TABLE DES MATIÈRES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

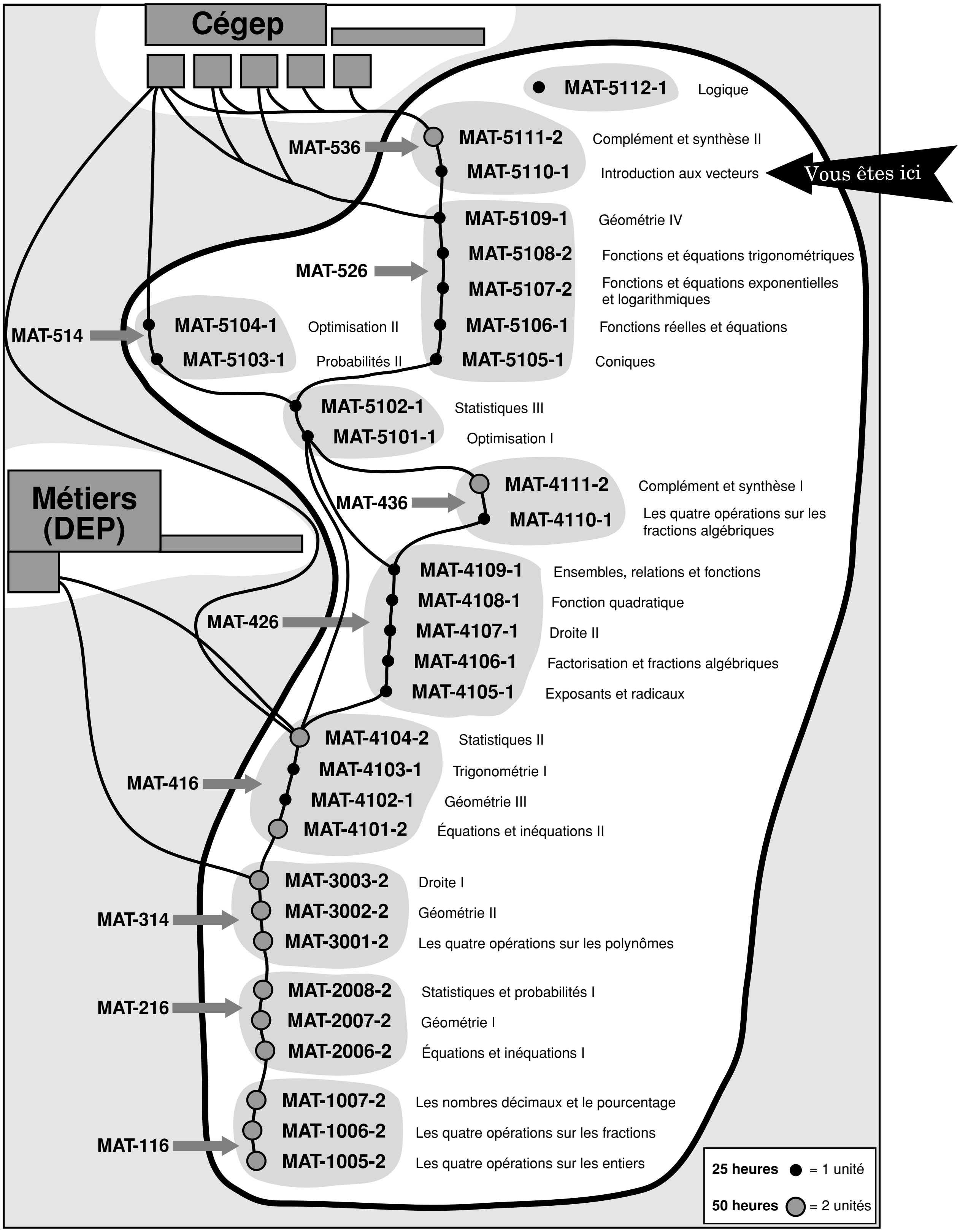
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

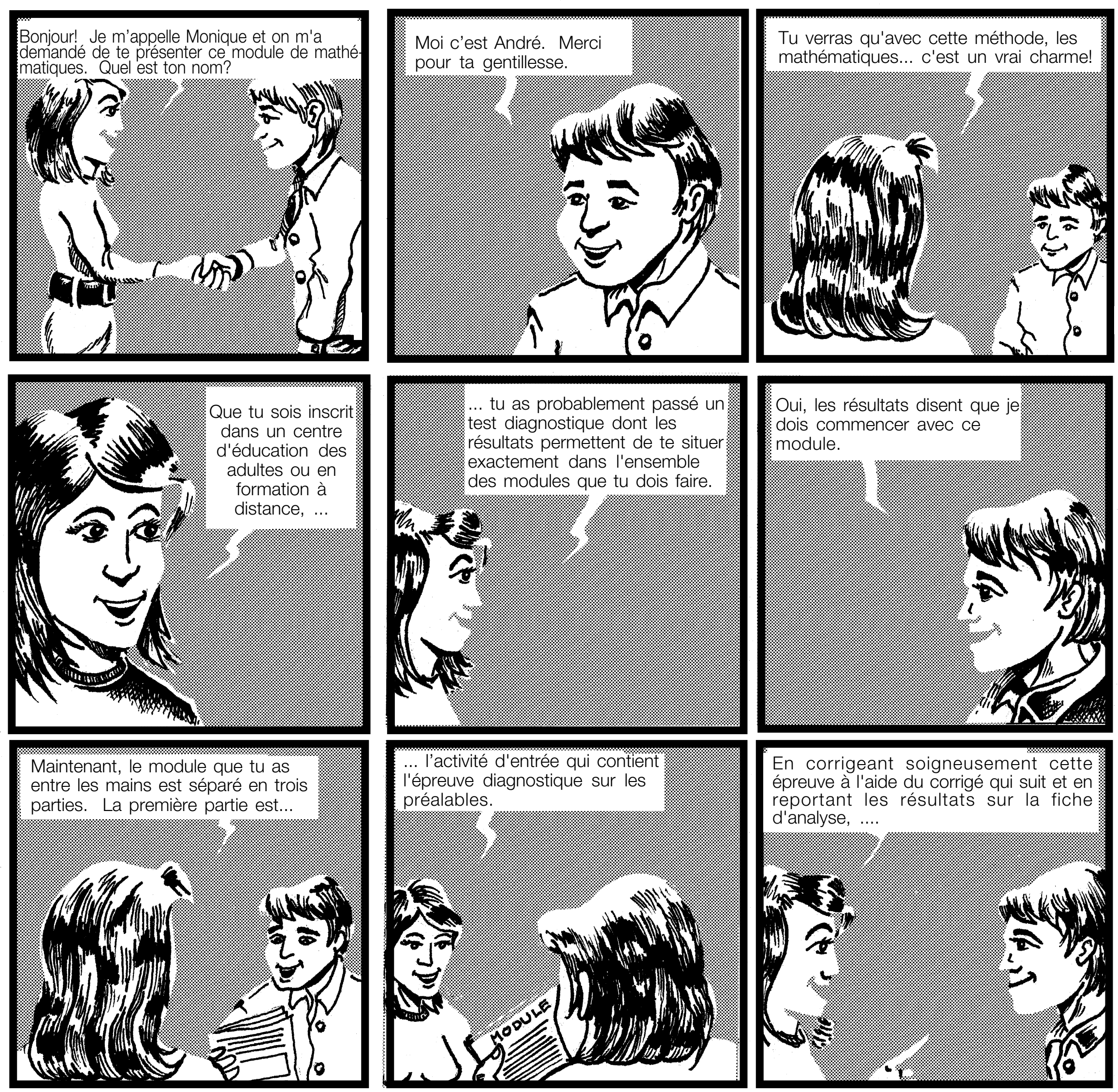
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

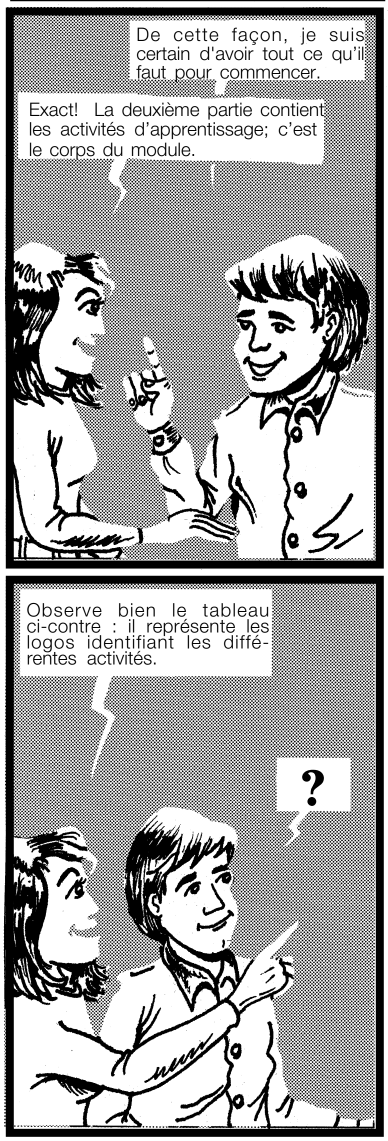
S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

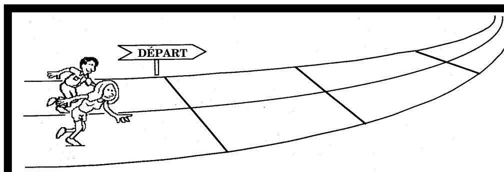
ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE







La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

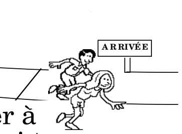
La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.



Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION AUX VECTEURS

Ce cours porte sur les vecteurs dans le plan. Nous y décrivons un vecteur géométrique et un vecteur algébrique, de même que la notation et le symbolisme propres aux vecteurs. Nous étudions les opérations sur les vecteurs et leurs propriétés : addition, multiplication par un scalaire et multiplication scalaire de deux vecteurs. Nous introduisons le formalisme mathématique propre aux vecteurs : combinaison linéaire de vecteurs, notion de base vectorielle dans le plan et démonstration d'énoncés de géométrie à l'aide des vecteurs. Ce cours insiste plus particulièrement sur la résolution de problèmes à l'aide des vecteurs.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5111-1 comporte 32 objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombres d'heures***	**% (évaluation)**
1 à **7**	4	20 %
8 à **15**	4	20 %
16 à **22, 23, 24, 25**	5	20 %
26 à **31**	5	20 %
32	5	20 %

* Deux heures sont réservées à l'évaluation finale.

1. Description d'un vecteur géométrique

   Décrire un vecteur géométrique, en tant que flèche orientée dans le plan, comme quantité qui possède à la fois une norme ou une grandeur, une direction et un sens.

2. Distinction entre vecteur et scalaire

   Distinguer les notions de vecteur et de scalaire.

3. Utilisation des diverses notations propres aux vecteurs

Utiliser les diverses notations propres aux vecteurs :

- symbole distinctif $\vec{v}$;
- origine A et extrémité B d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- norme $\| \vec{v} \|$;
- direction et sens : angle d'orientation, angle par rapport aux points cardinaux, angle par rapport à la verticale ou à l'horizontale.

4. Représentation algébrique d'un vecteur

Représenter un vecteur algébrique dans un plan cartésien :
origine (x_1, y_1) et extrémité (x_2, y_2).

5. Description d'un vecteur algébrique

Décrire un vecteur algébrique à l'aide de la notation par composantes : $\vec{v} = (a, b)$ dans laquelle $a = x_2 - x_1$ et $b = y_2 - y_1$.

6. Calcul des composantes d'un vecteur algébrique

À partir des composantes d'un vecteur algébrique, calculer :

- la norme de ce vecteur;
- la mesure de l'angle d'orientation décrivant sa direction et son sens.

7. Détermination du type de vecteur

Déterminer si un vecteur est nul ou unitaire, ou encore si deux vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux (perpendiculaires), équipollents (égaux) ou opposés.

8. Détermination de l'addition de deux vecteurs

   Effectuer l'addition de deux vecteurs par :
   - la méthode géométrique (méthode du parallélogramme et du triangle);
   - la méthode algébrique (addition de leurs composantes).

9. Énonciation des propriétés de l'addition de vecteurs

   Énoncer les propriétés de l'addition de vecteurs :
   - commutativité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
   - associativité $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$;
   - existence d'un élément neutre $\vec{u} + 0 = \vec{u}$;
   - existence d'un élément opposé $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$.

10. Calcul de la norme d'un vecteur

    Étant donné les normes de deux vecteurs et l'angle formé par ces vecteurs lorsque nous faisons coïncider leurs origines, calculer la norme de la somme (résultante) de ces vecteurs.

11. Calcul de la mesure de l'angle entre deux vecteurs

    Étant donné les normes de deux vecteurs et de leur résultante, calculer la mesure de l'angle formé par ces deux vecteurs lorsque nous faisons coïncider leurs origines.

12. Détermination de la multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire k

    Effectuer la multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire k.

13. Détermination des caractéristiques du produit $k\vec{v}$

Décrire les caractéristiques du produit $k\vec{v}$:

- $k\vec{v}$ est un vecteur de même direction que $\vec{v}$ (colinéaire à $\vec{v}$);
- la norme de $k\vec{v}$ $\left(\|k\vec{v}\|\right)$ est égale à $|k|\|\vec{v}\|$;
- $k\vec{v}$ est de même sens que $\vec{v}$ si $k > 0$ ou de sens contraire si $k < 0$;
- si $\vec{v} = (a, b)$, alors $\vec{k} = (ka, kb)$.

14. Énonciation des propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

Énoncer les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire :

- associativité : $k_1\left(k_2\vec{u}\right) = k_1 k_2\left(\vec{u}\right)$;
- existence d'un scalaire neutre : $1\vec{u} = \vec{u}$;
- existence d'un scalaire nul et d'un élément absorbant : $k\vec{u} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
- distributivité sur l'addition de vecteurs : $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- distributivité sur l'addition de scalaires : $\left(k_1 + k_2\right)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$.

15. Détermination de la résultante de deux vecteurs

Étant donné la description de deux vecteurs, déterminer :

- **leur somme (résultante) : norme, direction et sens;**
- **la mesure de l'angle entre la résultante et chaque vecteur original.**

16. Description d'un combinaison linéaire de vecteurs

Décrire ce qu'est une combinaison linéaire de deux vecteurs.

17. Description d'une base vectorielle

Décrire une base vectorielle dans le plan, c'est-à-dire un ensemble de deux vecteurs linéairement indépendants qui peuvent engendrer, par combinaison linéaire, tous les vecteurs du plan.

18. Description d'une base vectorielle orthonormée

    Décrire le cas particulier d'une base vectorielle orthonormée, c'est-à-dire une base formée des vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

19. Calcul de la multiplication scalaire de deux vecteurs sous forme algébrique

    Effectuer sous la forme algébrique, c'est-à-dire à l'aide des composantes de ceux-ci, la multiplication scalaire de deux vecteurs : $(a, b) \bullet (c, d) = ac + bd$.

20. Calcul de la multiplication scalaire de deux vecteurs sous forme géométrique

    Effectuer sous la forme géométrique la multiplication scalaire de deux vecteurs, à partir de la mesure de l'angle compris entre ceux-ci et de leur norme : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos\theta$ où θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs.

21. Énonciation des propriétés de la multiplication scalaire

    Énoncer les propriétés de la multiplication scalaire :
    - commutativité : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$;
    - distributivité sur l'addition de vecteurs : $\vec{u} \bullet \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$;
    - associativité des scalaires : $k_1\vec{u} \bullet k_2\vec{v} = k_1 k_2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$.

22. Détermination des caractéristiques du résultat d'une combinaison linéaire

Effectuer la combinaison linéaire de deux vecteurs décrits par leurs composantes, ou encore par leur norme, leur sens et leur direction. Déterminer les caractéristiques du résultat obtenu : composantes ou norme, sens et direction.

23. Détermination des coefficients d'une combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs décrits par leurs composantes, et sachant que l'un de ces vecteurs résulte d'une combinaison linéaire des deux autres, déterminer les coefficients de cette combinaison linéaire.

24. Calcul du produit scalaire de deux vecteurs

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leur norme et de la mesure de leur angle d'orientation respectif, ou encore à partir de leur norme et de la mesure de l'angle compris entre ces deux vecteurs.

25. Détermination de la mesure de l'angle entre deux vecteurs

Déterminer la mesure de l'angle entre deux vecteurs à l'aide de leurs composantes ou encore à l'aide de leur norme et de leur produit scalaire.

26. Énonciation de la relation de Chasles

Énoncer la relation de Chasles et l'appliquer à la vérification de quelques énoncés à l'aide des vecteurs.

27. Manifestation de la compréhension d'une démonstration faite à l'aide des vecteurs

Manifester sa compréhension d'une démonstration faite à l'aide des vecteurs.

28. Complétion d'une démonstration faite à l'aide des vecteurs

    Compléter une démonstration, faite à l'aide des vecteurs, d'une propriété des vecteurs ou d'un énoncé de géométrie.

29. Démonstration des propriétés des vecteurs

    Démontrer les propriétés des vecteurs à l'aide de vecteurs.

30. Démonstration des énoncés de géométrie à l'aide de vecteurs

    Démontrer des énoncés de géométrie à l'aide de vecteurs.

31. Vérification d'un énoncé formulé à l'aide de vecteurs

Vérifier un énoncé formulé à l'aide des vecteurs, en utilisant les propriétés des vecteurs, la relation de Chasles ou encore les propriétés des opérations portant sur les vecteurs.

32. Résolution des problèmes liés aux vecteurs

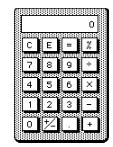
Résoudre des problèmes liés aux vecteurs.

Ce module comporte 32 objectifs. Nous avons regroupé leur étude comme dans le tableau ci-dessous.

Sous-module	Objectif(s)	
1	Description d'un vecteur géométrique Distinction entre vecteur et scalaire Utilisation des diverses notations propres aux vecteurs Représentation algébrique d'un vecteur Description d'un vecteur algébrique Calcul des composantes d'un vecteur algébrique **Détermination du type de vecteur**	1 2 3 4 5 6 **7**
2	Détermination de l'addition de deux vecteurs Énonciation des propriétés de l'addition de vecteurs Calcul de la norme d'un vecteur Calcul de la mesure de l'angle entre deux vecteurs Détermination de la multiplication d'un vecteu $\vec{v}$ par un scalaire k Détermination des caractéristiques du produit $k\vec{v}$ Énonciation des propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire **Détermination de la résultante de deux vecteurs**	8 9 10 11 12 13 14 **15**
3	Description d'une combinaison linéaire de vecteurs Description d'une base vectorielle Description d'une base vectorielle orthonormée Calcul de la multiplication scalaire de deux vecteurs sous forme algébrique Calcul de la multiplication scalaire de deux vecteurs sous forme géométrique Énonciation des propriétés de la multiplication scalaire **Détermination des caractéristiques du résultat d'une combinaison linéaire** **Détermination des coefficients d'une combinaison linéaire** **Calcul du produit scalaire de deux vecteurs** **Détermination de la mesure de l'angle entre deux vecteurs**	16 17 18 19 20 21 **22** **23** **24** **25**
4	Énonciation de la relation de Chasles Manifestation de la compréhension d'une démonstration faite à l'aide des vecteurs Complétion d'une démonstration faite à l'aide des vecteurs Démonstration des propriétés des vecteurs Démonstration des énoncés de géométrie à l'aide de vecteurs **Vérification d'un énoncé formulé à l'aide de vecteurs**	26 27 28 29 30 **31**
5	**Résolution des problèmes liés aux vecteurs**	**32**

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes



1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.

3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez pas répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez les réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être acceptées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Résolvez par la méthode de comparaison le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

   ① $7x - 2 = 3y$
   ② $y = 3x - 4$

2. Résolvez par la méthode de substitution le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

① $x - y = 9$
② $y = 7x - 3$

3. Résolvez par la méthode d'élimination le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

① $6x + 4y = 30$

② $3x + y = 12$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

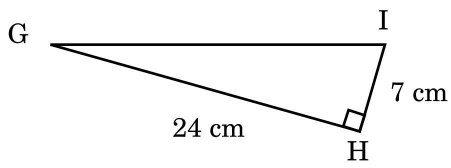
....

....

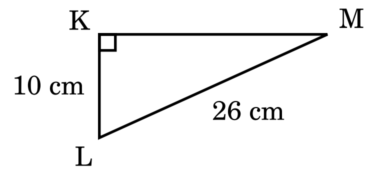
....

4. Trouvez la longueur du troisème côté dans les figures ci-dessous.

a)

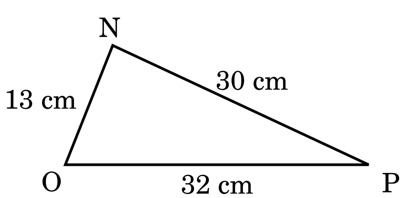


b)

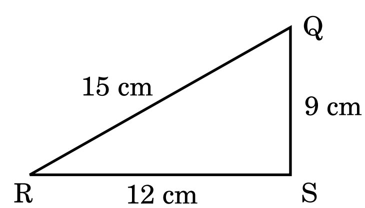


5. À l'aide du théorème de Pythagore, vérifiez si les figures ci-dessous sont des triangles rectangles.

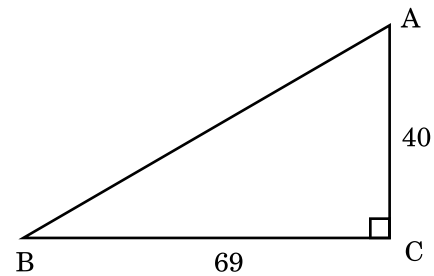
a)



b)



6. Soit le triangle rectangle ci-contre. À l'aide de votre calculatrice, répondez aux questions suivantes.



a) Trouvez la mesure du troisième côté à l'unité près.

....

....

....

....

....

....

b) Au moyen du rapport trigonométrique cosinus, déterminez au dixième de degré près la mesure de l'angle B.

cos B = ... ; m∠B = ...

c) Au moyen du rapport trigonométrique sinus, déterminez la mesure de l'angle A.

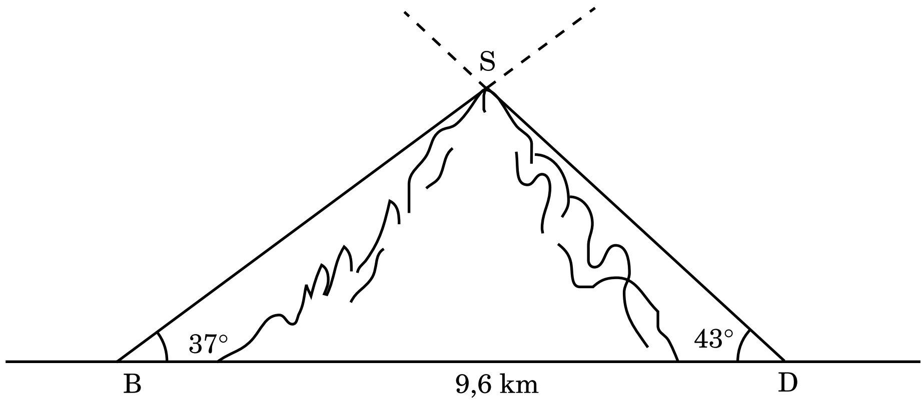
sin A = ... ; m∠A = ...

d) Inscrivez ci-dessous les valeurs des six éléments de ce triangle rectangle.

a = ... ; *b* = ... ; *c* = ...

m∠A = ... ; m∠B = ... ; m∠C = ...

7. Deux observateurs voient le sommet d'une montagne sous des angles d'élévation de 37° et 43°. Si ces deux observateurs sont distants de 9,6 km, calculez, au dixième de mètre près, les distances $\overline{BS}$ et $\overline{DS}$.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

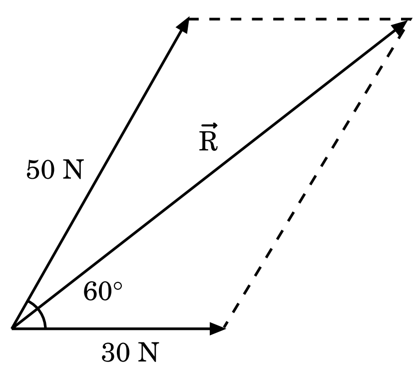
....

....

....

8. Deux forces respectivement de 30 newtons et de 50 newtons forment entre elles un angle de 60°. Si nous remplaçons ces deux forces par une seule force équivalente, nous obtenons la résultante $\vec{R}$. À partir de ces données et de celles du parallélogramme ci-dessous, calculez la grandeur de la résultante et l'angle qu'elle forme avec chacune des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

   N.B. – Un newton (N) est l'unité de mesure utilisée en physique pour exprimer une force ou un poids.



....

....

....

....

....

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. 1° Isolons la même variable dans les deux équations.

① $7x - 2 = 3y$ ② $y = 3x - 4$

① $y = \dfrac{7x-2}{3}$

2° Comparons les deux expressions obtenues.

① = ②

$$\frac{7x-2}{3} = 3x - 4$$

3° Appliquons la propriété fondamentale des proportions : le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

$$\frac{7x-2}{3} = \frac{3x-4}{1}$$

$$1(7x-2) = 3(3x-4)$$

$$7x - 2 = 9x - 12$$

$$7x - 9x = -12 + 2$$

$$-2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-2} = 5$$

4° Substituons x dans l'une des équations.

$x = 5$ dans ②.

② $y = 3x - 4$

$y = 3(5) - 4 = 15 - 4 = 11$

5° Vérifions la solution dans chacune des équations d'origine.

① $7x - 2 = 3y$	② $y = 3x - 4$
$7(5) - 2 = 3(11)$	$11 = 3(5) - 4$
$35 - 2 = 33$	$11 = 15 - 4$
$33 = 33$	$11 = 11$

6° Donnons la solution.

Le couple-solution est (5, 11).

2. 1° Isolons une variable dans l'une des deux équations.

Soit ② $y = 7x - 3$.

2° Substituons cette valeur dans l'autre équation.

$$\text{①}\ x - y = 9$$
$$x - (7x - 3) = 9$$

3° Résolvons l'équation obtenue.

$$x - 7x + 3 = 9$$
$$-6x = 9 - 3$$
$$-6x = 6$$
$$x = \frac{6}{-6} = -1$$

4° Substituons x dans l'une des équations.

$x = -1$ dans ②.

② $y = 7x - 3$

$y = 7(-1) - 3 = -7 - 3 = -10$

5° Vérifions la solution dans chacune des équations d'origine.

① $x - y = 9$	② $y = 7x - 3$
$-1 - (-10) = 9$	$-10 = 7(-1) - 3$
$-1 + 10 = 9$	$-10 = -7 - 3$
$9 = 9$	$-10 = -10$

6° Donnons la solution.
Le couple-solution est $(-1, -10)$.

3. Il y a deux solutions possibles.

1° Choisissons une variable à éliminer.

La variable x ou la variable y.

2° Transformons les équations pour que les coefficients de la variable choisie soient opposés.

① $6x + 4y = 30 \quad \times(-1)$	ou	① $6x + 4y = 30$
② $3x + y = 12 \quad \times(2)$		② $3x + y = 12 \quad \times(-4)$
① $-6x - 4y = -30$		① $6x + 4y = 30$
② $6x + 2y = 24$		② $-12x - 4y = -48$

3° Additionnons les équations.

$$\begin{array}{r} -6x - 4y = -30 \\ \underline{6x + 2y} = \underline{24} \\ 0 - 2y = -6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6x + 4y = 30 \\ \underline{-12x - 4y} = \underline{-48} \\ -6x + 0 = -18 \end{array}$$

4° Résolvons l'équation obtenue.

$-2y = -6$	ou	$-6x = -18$
$y = \dfrac{-6}{-2}$		$x = \dfrac{-18}{-6}$
$y = 3$		$x = 3$

5° Substituons la valeur obtenue dans l'une des équations d'origine.

① $6x + 4y = 30$	ou	② $3x + y = 12$
$6x + 4(3) = 30$		$3(3) + y = 12$
$6x + 12 = 30$		$9 + 6y = 12$
$6x = 30 - 12$		$y = 12 - 9$
$6x = 18$		$y = 3$
$x = \dfrac{18}{6}$		
$x = 3$		

6° Donnons la solution.

Le couple-solution est (3, 3).

4. a) $g = 7$ cm, $i = 24$ cm, $h = ?$

$h^2 = g^2 + i^2$

$h^2 = (7\text{ cm})^2 + (24\text{ cm})^2$

$h^2 = 49\text{ cm}^2 + 576\text{ cm}^2$

$h^2 = 625\text{ cm}^2$

$h = \sqrt{625\text{ cm}^2} = 25\text{ cm}$

Le côté GI mesure 25 cm.

b) $k = 26$ cm, $m = 10$ cm, $l = ?$

$l^2 = k^2 - m^2$

$l^2 = (26\text{ cm})^2 - (10\text{ cm})^2$

$l^2 = 676\text{ cm}^2 - 100\text{ cm}^2$

$l^2 = 576\text{ cm}^2$

$l = \sqrt{576\text{ cm}^2} = 24\text{ cm}$

Le côté KM mesure 24 cm.

5. a) $n^2 \overset{?}{=} o^2 + p^2$

$(32\text{ cm})^2 \overset{?}{=} (30\text{ cm})^2 + (13\text{ cm})^2$

$1\ 024\text{ cm}^2 \overset{?}{=} 900\text{ cm}^2 + 169\text{ cm}^2$

$1\ 024\text{ cm}^2 \neq 1\ 069\text{ cm}^2$

b) $s^2 \overset{?}{=} q^2 + r^2$

$(15\text{ cm})^2 \overset{?}{=} (12\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2$

$225\text{ cm}^2 \overset{?}{=} 144\text{ cm}^2 + 81\text{ cm}^2$

$225\text{ cm}^2 = 225\text{ cm}^2$

Ce triangle n'est pas un triangle rectangle parce que le théorème de Pythagore n'est pas vérifié.

Ce triangle est un triangle rectangle parce que le théorème de Pythagore est vérifié.

6. a) $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 69^2 + 40^2$

$c^2 = 4\,761 + 1\,600$

$c^2 = 6\,361$

$c = \sqrt{6\,361}$

$c = 80$

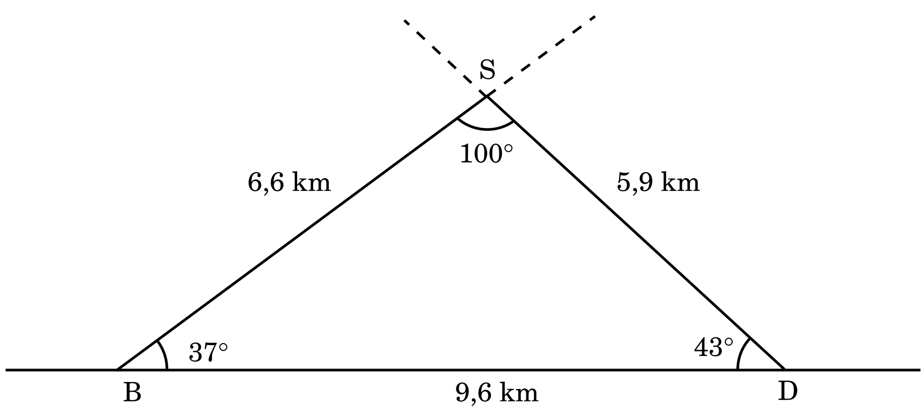
b) $\cos \text{B} = \dfrac{69}{80} = 0{,}862\,5$; $\text{m}\angle\text{B} = 30{,}4°$.

c) $\sin \text{A} = \dfrac{69}{80} = 0{,}862\,5$; $\text{m}\angle\text{A} = 59{,}6°$.

d) $a = 69$; $b = 40$; $c = 80$.

$\text{m}\angle\text{A} = 59{,}6°$; $\text{m}\angle\text{B} = 30{,}4°$; $\text{m}\angle\text{C} = 90°$.

7.



$\text{m}\angle\text{S} = 180° - 43° - 37° = 100°$

$\dfrac{s}{\sin \text{S}} = \dfrac{b}{\sin \text{B}}$

$b = \dfrac{s \sin \text{B}}{\sin \text{S}}$

$b = \dfrac{9{,}6 \sin 37°}{\sin 100°}$

$b = \dfrac{9{,}6 \times 0{,}601\,8}{0{,}984\,8}$

$b = 5{,}866$

$\text{m}\overline{\text{DS}} = 5{,}9 \text{ km}$

$\dfrac{s}{\sin \text{S}} = \dfrac{d}{\sin \text{D}}$

$d = \dfrac{s \sin \text{D}}{\sin \text{S}}$

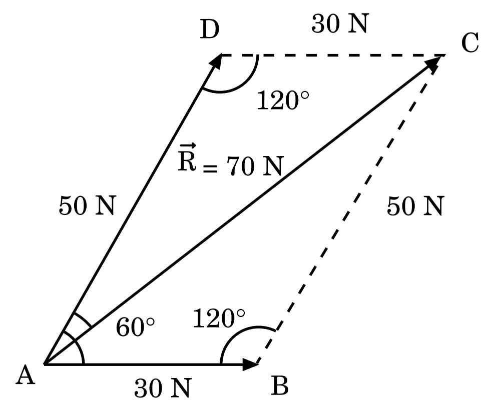
$d = \dfrac{9{,}6 \sin 43°}{\sin 100°}$

$d = \dfrac{9{,}6 \times 0{,}682\,0}{0{,}984\,8}$

$d = 6{,}648$

$\text{m}\overline{\text{BS}} = 6{,}6 \text{ km}$

8. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires : donc, m∠B = m∠D = 120°. De plus, les côtés opposés sont congrus.



Considérons le ΔABC ou le ΔACD.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \text{B}$

$b^2 = 50^2 + 30^2 - 2(50)(30)\cos 120°$

$b^2 = 2\,500 + 900 - 3\,000(-0{,}5)$

$b^2 = 3\,400 + 1\,500$

$b^2 = 4\,900$

$b = 70$

$\vec{\text{R}} = 70 \text{ N}$

Trouvons m∠A du ΔACD.

$\dfrac{d}{\sin \text{D}} = \dfrac{a}{\sin \text{A}}$

$\sin \text{A} = \dfrac{a \sin \text{D}}{d}$

$\sin \text{A} = \dfrac{30 \sin 120°}{70}$

$\sin \text{A} = \dfrac{30 \times 0{,}866\,0}{70}$

$\sin \text{A} = 0{,}371\,2$

$\text{m}\angle\text{A} = 21{,}8°$

Trouvons m∠A du ΔABC.

$60° – 21,8° = 38,2°$

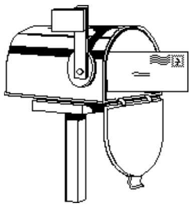
N.B. – Nous pourrions aussi appliquer la loi des cosinus pour résoudre ce triangle.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1.			7.1	7.4	Sous-module 3
2.			7.2	7.10	Sous-module 3
3.			7.3	7.16	Sous-module 3
4. a)			7.4	7.21	Sous-module 1
b)			7.4	7.21	Sous-module 1
5. a)			7.4	7.21	Sous-module 1
b)			7.4	7.21	Sous-module 1
6. a)			7.5	7.26	Sous-module 1
b)			7.5	7.26	Sous-module 1
c)			7.5	7.26	Sous-module 1
d)			7.5	7.26	Sous-module 1
7.			7.6	7.34	Sous-module 2
8.			7.7	7.38	Sous-module 2

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5110-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à votre tutrice ou à votre tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5110-1 comprend **trois** devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à la mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

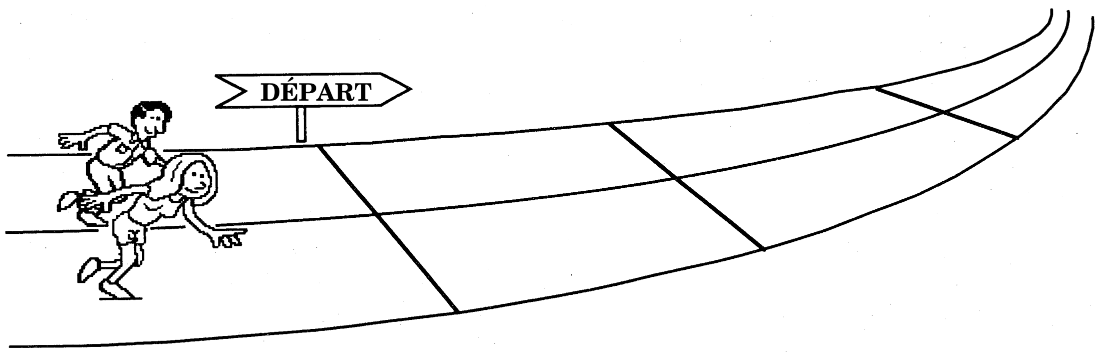
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, s'il y a lieu.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 3.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 4 et 5.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 5.

ATTESTATION D'ÉTUDES

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



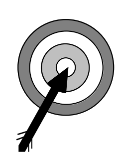
SOUS-MODULE 1

LES NOTATIONS ET SYMBOLES PROPRES AUX VECTEURS

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Vous savez déjà utiliser des vecteurs sans le savoir!

Chaque année, lorsque Alicia aborde le chapitre consacré aux ***vecteurs*** avec ses élèves de mathématiques 536, elle pose la même question : « Y a-t-il dans cette classe une personne qui n'a jamais utilisé de vecteurs? ». Et Alicia attend de pied ferme la personne qui osera dire oui. Or, elle sait très bien, comme chaque année d'ailleurs, qu'elle entendra au moins une réponse affirmative. C'est alors qu'elle demande à ses élèves s'ils se rappellent des ***isométries*** du plan étudiées en quatrième secondaire et plus particulièrement des ***translations***. Les élèves se questionnent, donnent des éléments de réponse et tout à coup, la notion de ***flèche*** survient. C'est à ce moment qu'Alicia explique à ses élèves que la flèche utilisée dans la translation est en réalité un vecteur. Nous verrons pourquoi dans le présent sous-module.



Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de déterminer si un *vecteur* est *nul* ou *unitaire*. Vous devrez également être capable de déterminer si deux vecteurs sont *colinéaires*, non colinéaires, *orthogonaux* (perpendiculaires), *équipollents* (égaux) ou *opposés*.

Alicia a eu l'excellente idée d'aborder la notion de vecteurs en faisant le rapprochement avec la notion de translation, car cette dernière est facile à comprendre.

- *Une translation est le déplacement d'un objet donné dans une direction constante du plan.*

- *Toute translation est représentée par une flèche pourvue d'un sens et montrant la grandeur du déplacement à effectuer.*

De cette définition, nous comprenons que la flèche représentant une translation est un vecteur, car elle possède à la fois une grandeur, un sens et une direction.

> Un **vecteur** est une quantité qui possède à la fois une grandeur, un sens et une direction.

Remarque

Il ne faut pas confondre sens et direction. En effet, une droite définit une direction et une direction possède deux sens.

Les vecteurs ne sont pas seulement utilisés pour représenter une translation, ils sont très utiles en physique mécanique pour représenter une vitesse, une force, un travail, etc. En opposition au terme vecteur, nous parlons de ***scalaire***.

> Un **scalaire** est une quantité qui ne possède qu'une grandeur.

Contrairement aux vecteurs qui définissent un nombre relativement restreint de quantités, les scalaires définissent un nombre infini de quantités. Le nombre d'élèves dans une classe, la taille d'une personne, la concentration d'une solution, la température, l'aire d'une surface et le volume d'un contenant ne sont que quelques exemples de quantités qui sont exprimées à l'aide d'un scalaire, car elles ne possèdent ni sens et ni direction.

Il est important de mentionner qu'une flèche correspond dans le plan à un seul vecteur, mais qu'un vecteur peut-être représenté par une infinité de flèches ayant la même grandeur, la même direction et le même sens.

> La **représentation géométrique** d'un vecteur est une flèche orientée dans le plan, c'est-à-dire qu'elle possède à la fois une grandeur, une direction et un sens.

Maintenant que nous en savons un peu plus sur les vecteurs, voyons quelques notations ou symboles couramment utilisés pour représenter les vecteurs.

- Les vecteurs sont souvent désignés par des lettres minuscules surmontées d'une flèche : $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, etc.

- Les vecteurs peuvent aussi être désignés par deux lettres majuscules surmontées d'une flèche : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$. La première lettre représente alors l'origine du vecteur et la deuxième lettre représente l'extrémité du vecteur.

- La ***norme d'un vecteur*** $\overrightarrow{v}$, notée $\| \overrightarrow{v} \|$, correspond à sa mesure.

Nous pouvons également parler de la norme d'un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, notée $\| \overrightarrow{\mathrm{AB}} \|$.

> Le vecteur de norme nulle est appelé le **vecteur nul**; il est noté $\overrightarrow{0}$. Il n'a ni sens et ni direction. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{BB}} = 0$.

Remarque

Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors A = B et, réciproquement, si A = B, alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exemple 1

Soit le triangle ABC et son image A'B'C' créée par une translation *t*.

- Le point A a été déplacé en A'.
- Le point B a été déplacé en B'.
- Le point C a été déplacé en C'.

N.B. – A' se lit A prime, B' se lit B prime et C' se lit C prime.

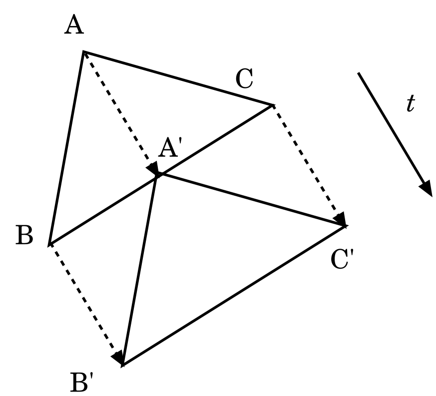


Fig. 1.1 Translation *t* du triangle ABC

La translation *t* est représentée par le vecteur $\vec{t}$. De plus, nous avons également trois vecteurs créés par la translation, soit les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$. Comme un vecteur peut être représenté par une infinité de flèches ayant la même grandeur, la même direction et le même sens, nous pouvons écrire ce qui suit.

- $\vec{t} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$
- $\|\vec{t}\| = \|\overrightarrow{AA'}\| = \|\overrightarrow{BB'}\| = \|\overrightarrow{CC'}\|$

La direction et le sens d'un vecteur peuvent être décrits de diverses façons. Dans ce module, nous utiliserons les trois méthodes suivantes.

1re méthode : angle d'orientation

Cet angle fait référence, dans le plan, à l'angle formé en tournant dans le sens anti-horaire, c'est-à-dire dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, par rapport à la direction positive de l'axe horizontal. Cet angle détermine à la fois le sens et la direction d'un vecteur.

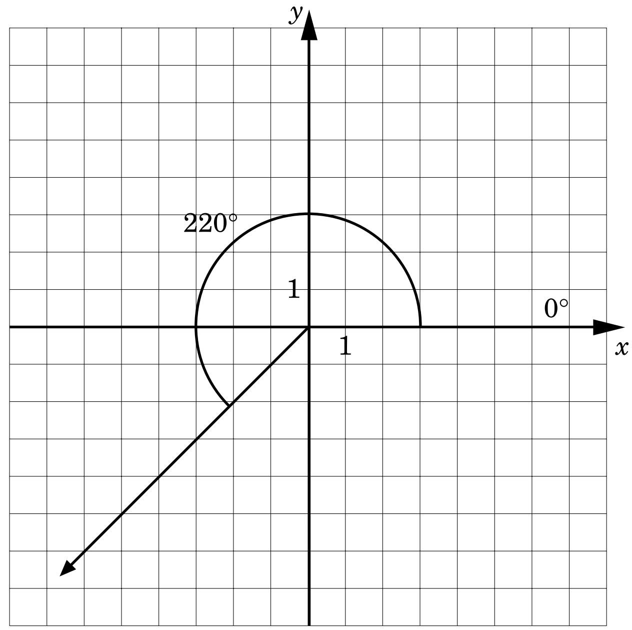


Fig. 1.2 Vecteur ayant un angle d'orientation de 220°

2e méthode : angle par rapport aux points cardinaux

Le nord (N.) correspond au sens positif (vers le haut) de l'axe vertical; le sud (S.) correspond au sens négatif (vers le bas) de l'axe vertical; l'est (E.) correspond au sens positif (vers la droite) de l'axe horizontal; l'ouest (O.) correspond au sens négatif (vers la gauche) de l'axe horizontal. Le nord-est (N.-E.), le nord-ouest (N.-O.), le sud-ouest (S.-O.) et le sud-est (S.-E.) partagent chacun des quadrants en deux angles congrus de 45°. Pour désigner tout autre angle, nous aurons recours à une direction principale donnée par l'un des quatre points cardinaux et à une déviation par une mesure d'angle et un autre point cardinal nous indiquant la direction de la déviation.

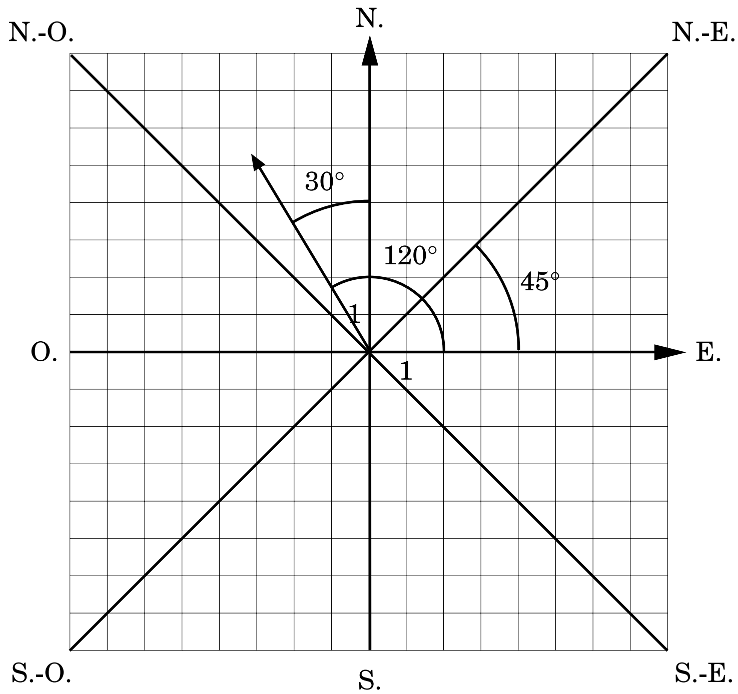


Fig. 1.3 Vecteur d'angle N. 30° O.

Le vecteur d'angle N. 30° O. est situé à 30° à l'ouest de nord, ce qui équivaut à un angle d'orientation de 120°.

3e méthode : angle par rapport à la verticale ou à l'horizontale

- Par rapport à la verticale : cet angle est mesuré à partir de l'axe vertical.

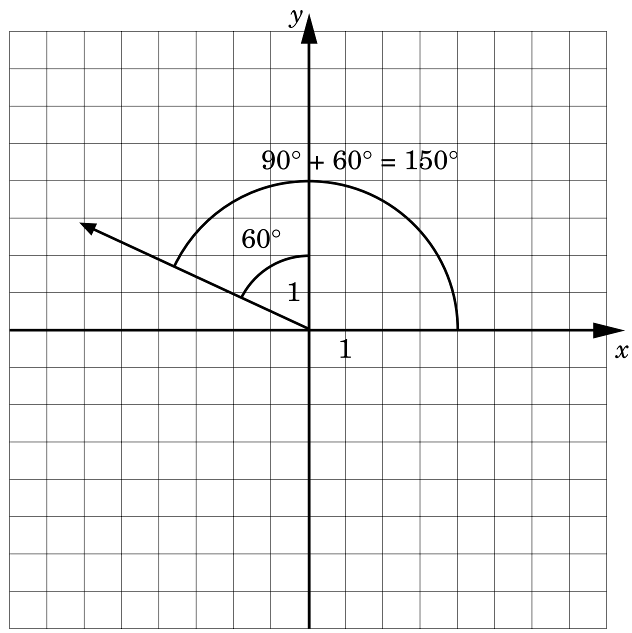


Fig. 1.4 Vecteur d'angle de 60° par rapport à la verticale

Cet angle équivaut à un angle d'orientation de 150°.

- Par rapport à l'horizontale : cet angle est mesuré à partir de l'axe horizontal.

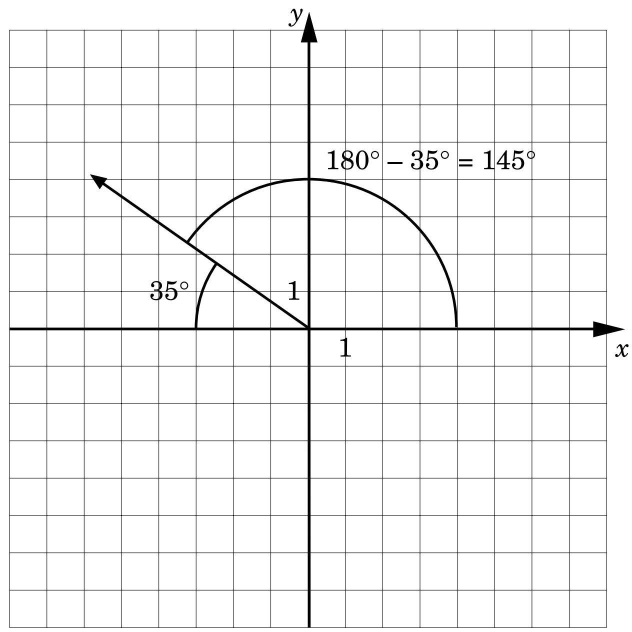


Fig. 1.5 Vecteur d'angle de 35° par rapport à l'horizontale

Cet angle équivaut à un angle d'orientation de 145°.

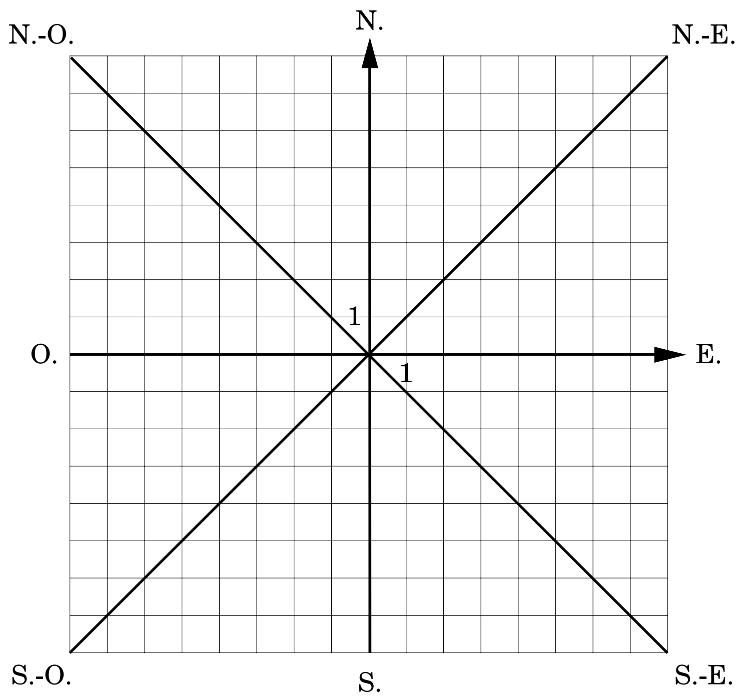
Notons que cette troisième et dernière façon est beaucoup moins utilisée que les deux premières. De même, tout au long de ce module, **nous utiliserons principalement les deux premières méthodes**.

Afin de vérifier si vous avez bien saisi la distinction entre un angle d'orientation et un angle par rapport aux points cardinaux, effectuez la série d'exercices qui suit.

Exercice 1.1

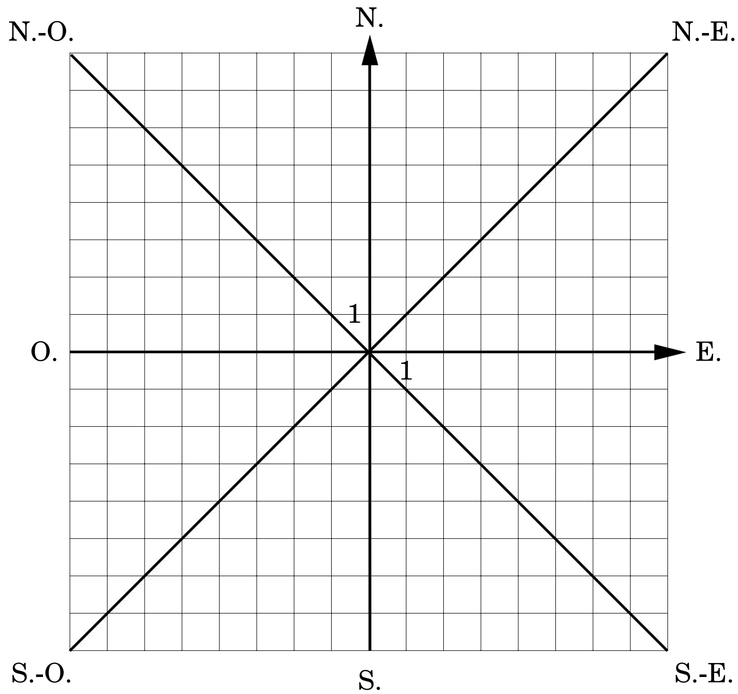
1. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit, puis donnez la mesure de son angle d'orientation.

   a) $\overrightarrow{v}$ de 4 cm, direction N. 35° E.



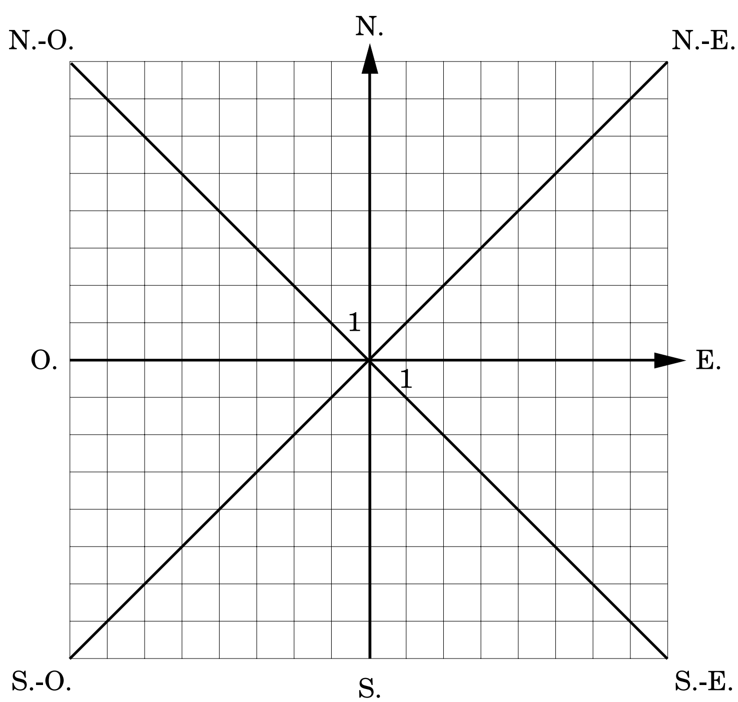
....

b) $\overrightarrow{u}$ de 3,5 cm, direction O. 25° N.



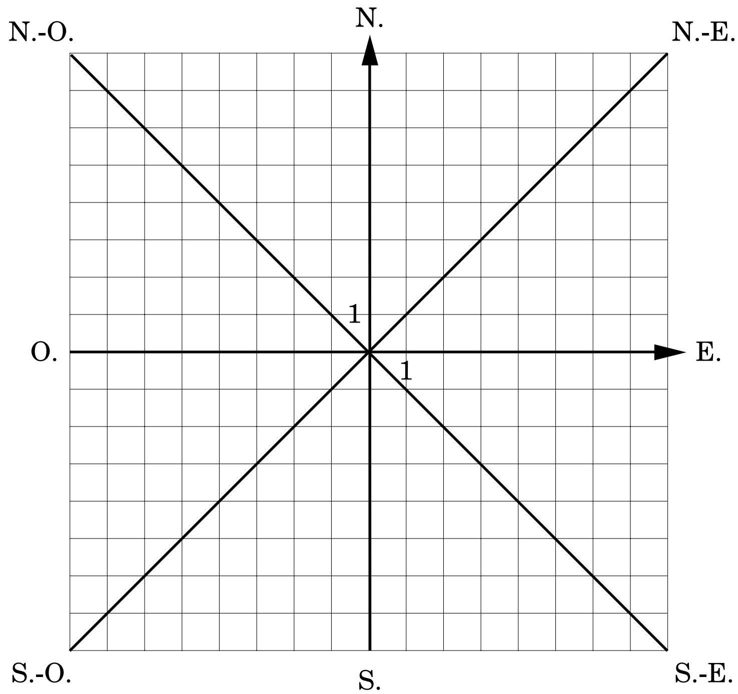
....

c) $\overrightarrow{w}$ de 3 cm, direction S. 30° O.



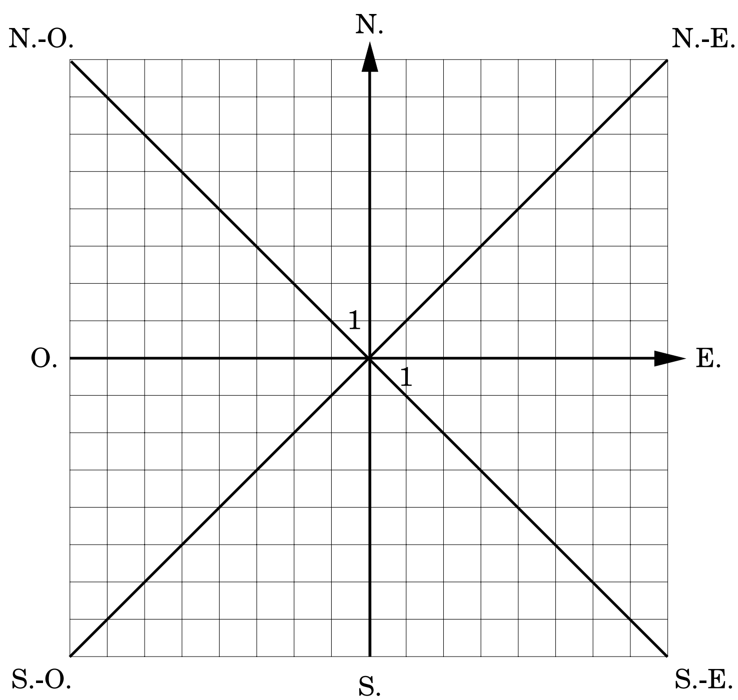
....

d) $\overrightarrow{t}$ de 4 cm, direction O. 35° S.



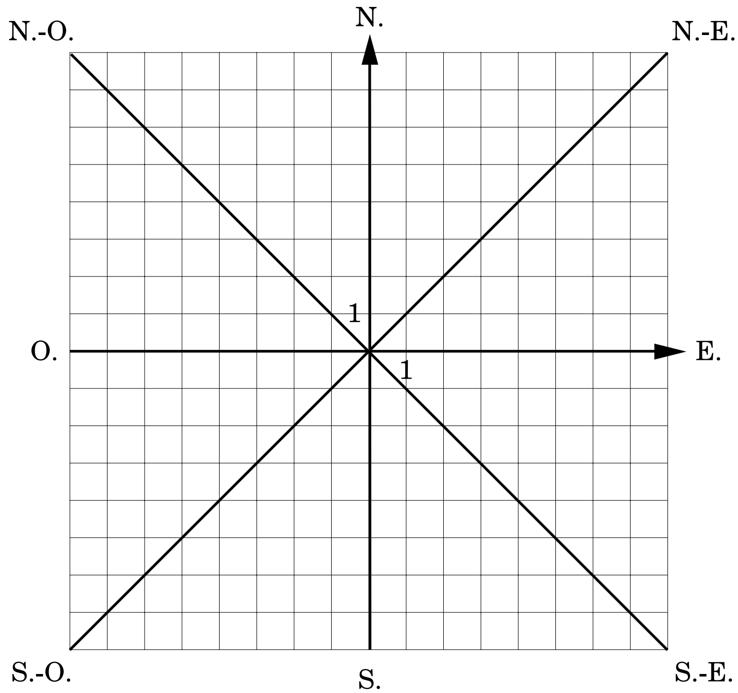
....

e) $\overrightarrow{v}$ de 4 cm, direction N.-O.



....

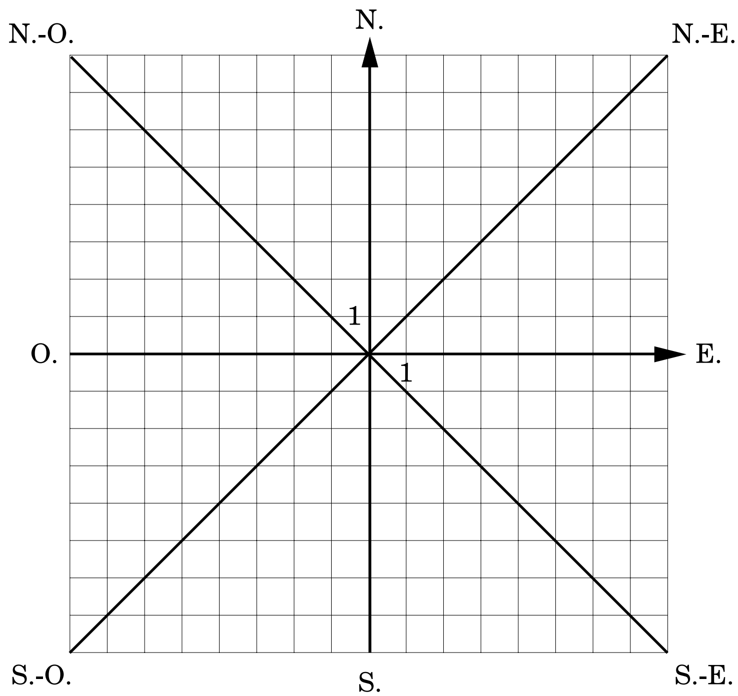
f) $\vec{t}$ de 4,5 cm, direction S.-E.



....

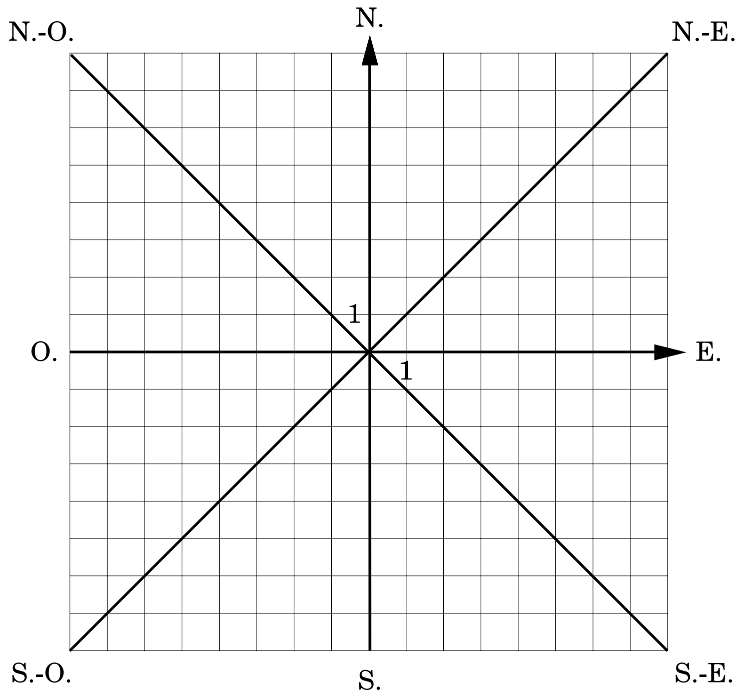
2. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit, puis donnez la mesure de son angle d'orientation par rapport aux points cardinaux.

   a) $\overrightarrow{u}$ de 4 cm selon un angle d'orientation de 210°.



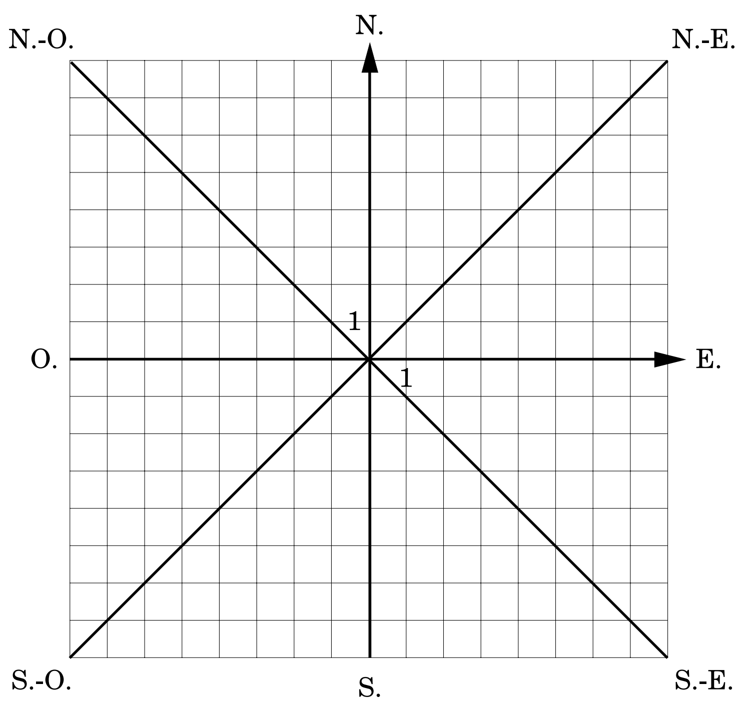
....

b) $\vec{s}$ de 4,5 cm selon un angle d'orientation de 135°.



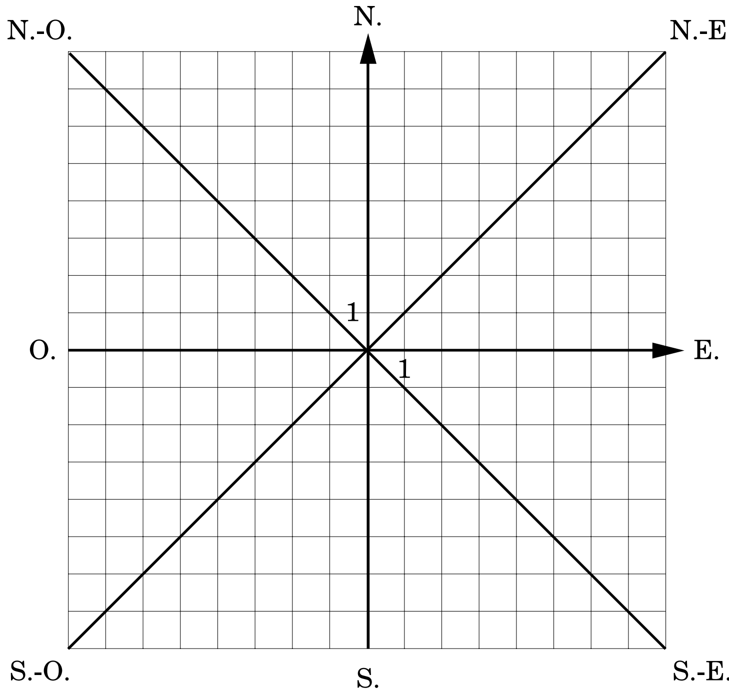
....

c) $\vec{t}$ de 3,5 cm selon un angle d'orientation de 300°.



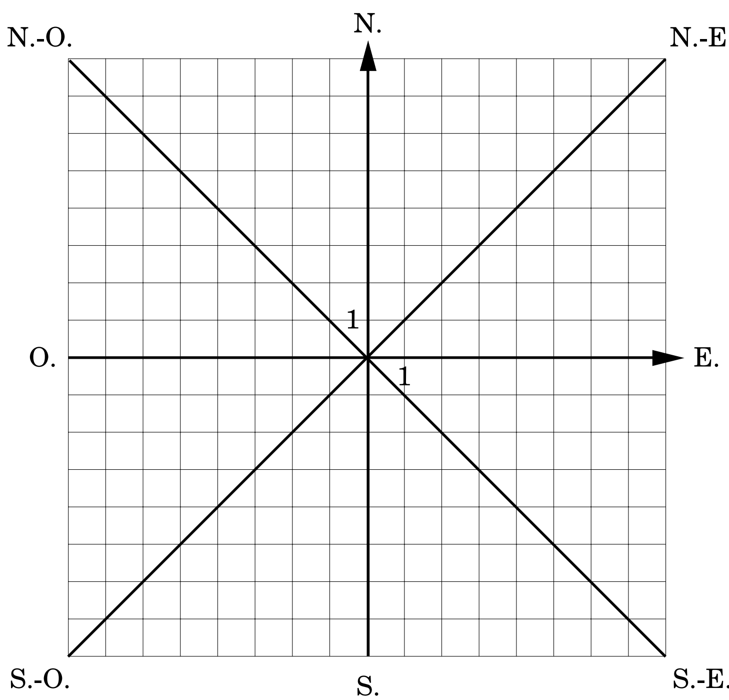
....

d) $\vec{v}$ de 4 cm selon un angle d'orientation de 115°.



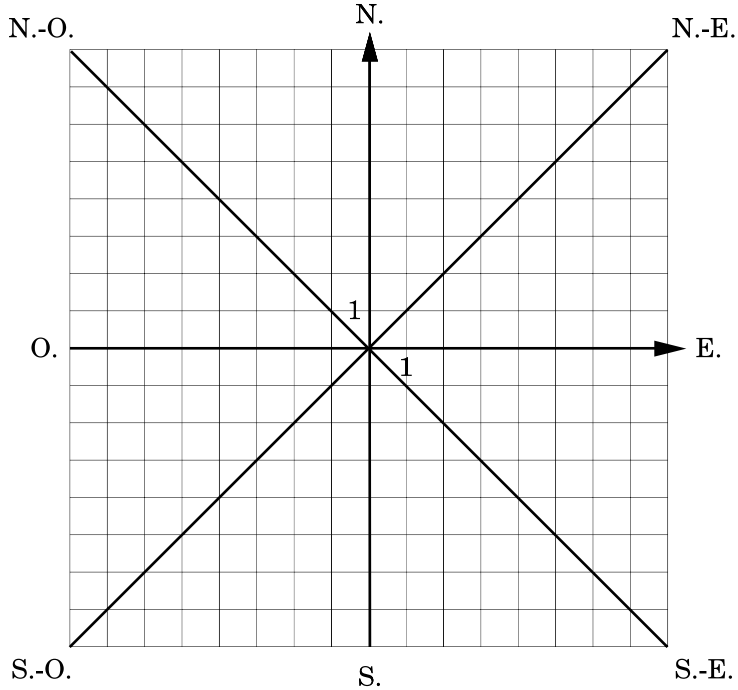
....

e) $\vec{u}$ de 4 cm selon un angle d'orientation de 225°.



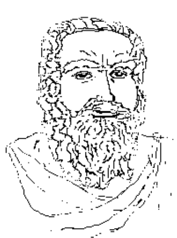
....

f) $\vec{t}$ de 4,5 cm selon un angle d'orientation de 315°.



....

Si vous avez commis une ou plusieurs erreurs à l'exercice précédent, révisez les définitions ainsi que les exemples présentés dans la première partie de ce sous-module avant de poursuivre votre étude. Au besoin, demandez l'aide d'une personne-ressource.



Saviez-vous que...

... le terme « vecteur » vient de l'indo-européen VAG ou VAGH qui désignait le chariot et qui a laissé quelques centaines de descendants dans les langues indo-européennes? En latin, « vector » désigne le conducteur de chariot. Le réemploi de ce terme en mathématiques date de 1837, à l'initiative de William Hamilton.

Nous avons jusqu'ici fait correspondre l'origine des vecteurs avec celle du repère (système d'axes) utilisé. Cependant, il est parfois plus pratique de procéder autrement, par exemple si les vecteurs ne sont pas issus du même point. Nous utiliserons alors le plan cartésien plutôt que les directions nord-sud et est-ouest pour situer les vecteurs.

Le plan cartésien offre la possibilité d'identifier un vecteur simplement à l'aide des points qui le délimitent.

Exemple 2

Soit un vecteur nommé $\overrightarrow{AB}$, où l'origine est A(−3, −4) et l'extrémité est B(2,1). Il est représenté dans le plan cartésien de la façon suivante.

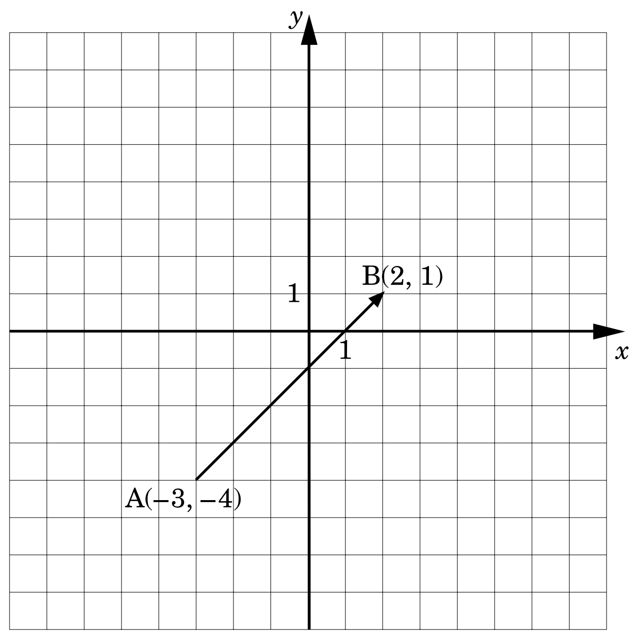


Fig. 1.6 Représentation dans le plan cartésien de $\overrightarrow{AB}$

Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons également identifier $\overrightarrow{AB}$ par une lettre minuscule surmontée d'une flèche, poser l'égalité $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et représenter $\vec{v}$ dans le plan cartésien.

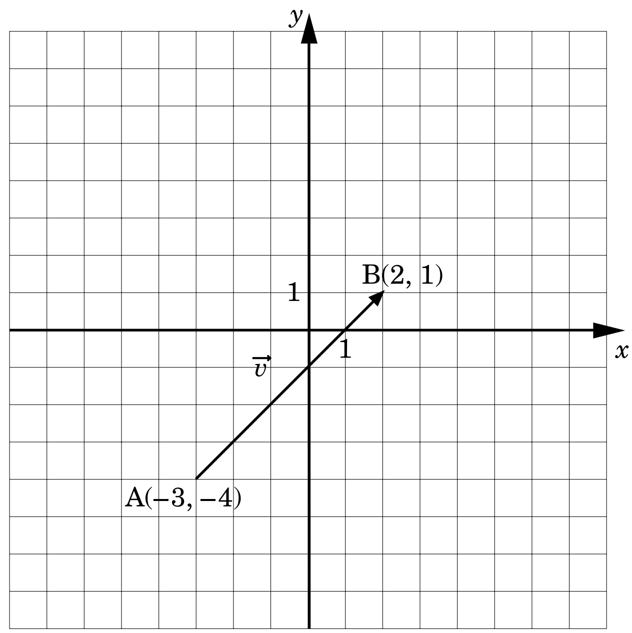


Fig. 1.7 Représentation dans le plan cartésien de $\vec{v}$

De plus, nous pouvons décrire $\vec{v}$ ou tout autre vecteur à l'aide de la notation par composantes.

Dans un plan cartésien, nous appelons **composantes** d'un vecteur les deux nombres correspondant respectivement à la variation des abscisses et à la variation des ordonnées de l'origine à l'extrémité de la flèche utilisée pour représenter ce vecteur.

Tout vecteur représenté par une flèche d'origine (x_1, y_1) et d'extrémité (x_2, y_2) a deux composantes :

- une **composante horizontale** correspondant à $x_2 - x_1$;
- une **composante verticale** corespondant à $y_2 - y_1$.

Les composantes d'un vecteur sont notées sous la forme d'un couple (a, b) et $\vec{v} = (a, b)$.

Dans l'exemple précédent $a = x_2 - x_1 = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ et $b = y_2 - y_1 = 1 - (-4) = 1 + 4 = 5$, alors $\vec{v} = (5, 5)$.

Sa représentation graphique est la suivante.

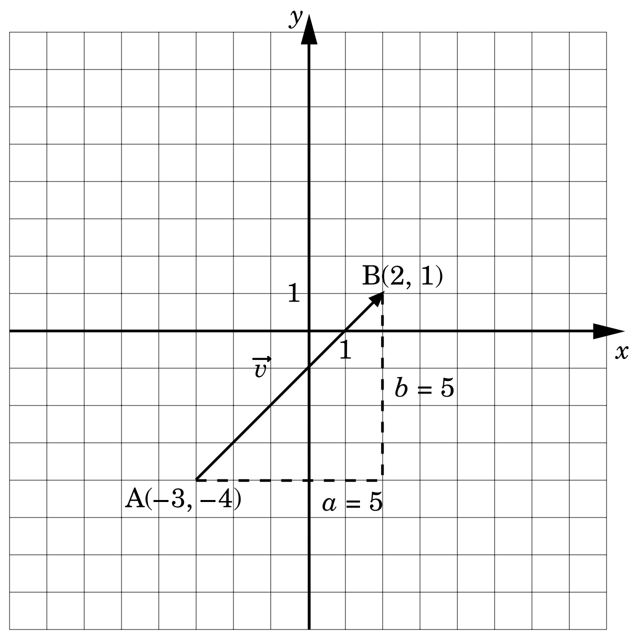


Fig. 1.8 Représentation dans le plan cartésien du vecteur et de ses composantes a et b

Il est à noter que la flèche représentée dans le plan cartésien ci-dessus correspond à un seul vecteur, mais comme celui-ci peut-être représenté par une infinité de flèches, nous pouvons conclure qu'il existe une infinité de flèches qui ont les mêmes composantes a et b et qui correspondent à une infinité de vecteurs égaux.

Des vecteurs ayant les mêmes composantes sont également nommés vecteurs **équipollents**.

Les **vecteurs équipollents** ont les mêmes composantes a et b et ont par le fait même, la même direction, le même sens et la même norme.

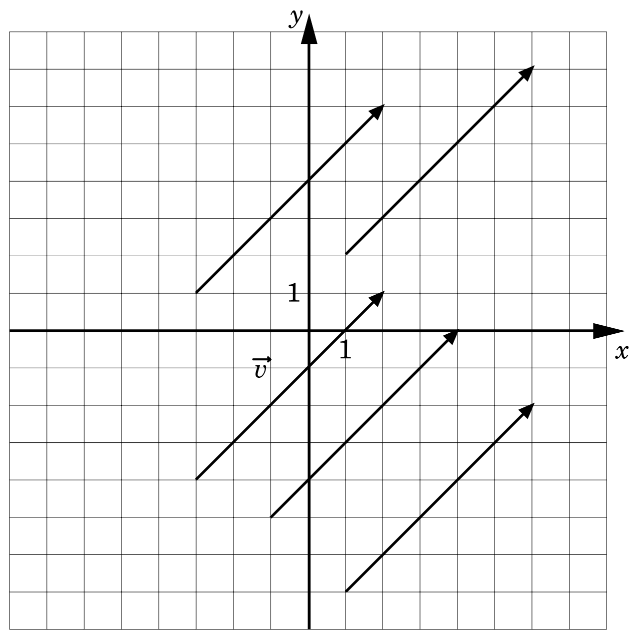
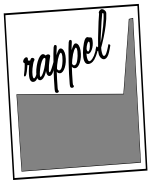


Fig. 1.9 Représentation dans le plan cartésien de vecteurs équipollents à $\vec{v}$

À partir des composantes horizontale a et verticale b d'un vecteur décrit algébriquement, nous pouvons calculer :

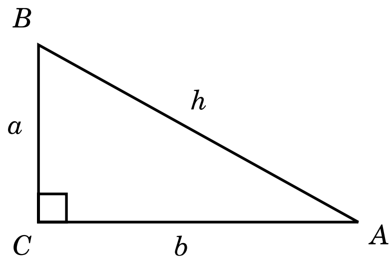
- la norme de ce vecteur;
- la mesure de l'angle d'orientation décrivant sa direction et son sens.

Revenons à la figure 1.8, où est illustré $\vec{v}$ ainsi que ses composantes a et b. Le tout forme un triangle rectangle dont $\vec{v}$ constitue l'hypoténuse. Nous pouvons donc calculer sa norme (grandeur) à l'aide du théorème de Pythagore.



Théorème de Pythagore

Dans tout triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit.



$h^2 = a^2 + b^2$

Fig. 1.10 Triangle rectangle ABC

Dans notre exemple, $a = 5$ unités et $b = 5$ unités. En substituant ces valeurs dans le théorème de Pythagore, nous obtenons ce qui suit.

$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 = 5^2 + 5^2$$
$$h^2 = 25 + 25$$
$$h^2 = 50$$
$$h = \sqrt{50}$$
$$h = 7{,}07 \text{ unités} = \text{la norme de } \vec{v}$$
$$\|\vec{v}\| = 7{,}07 \text{ unités}$$

Nous pouvons généraliser le résultat précédent en disant que $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Maintenant, nous allons utiliser un rapport trigonométrique pour calculer la mesure de l'angle d'orientation décrivant le sens et la direction du vecteur.

Dans un triangle rectangle, nous définissons les rapports trigonométriques de l'angle A à partir des éléments suivants.

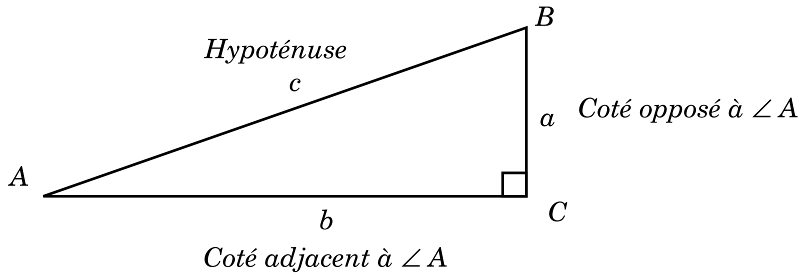


Fig. 1.11 Triangle rectangle ABC et rapports trigonométriques

Définition du sinus, du cosinus et de la tangente des angles A et B.

$$\sin A = \frac{\text{Mesure du côté opposé à } \angle A}{\text{Hypoténuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin B = \frac{\text{Mesure du côté opposé à } \angle B}{\text{Hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{Mesure du côté adjacent à } \angle A}{\text{Hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{\text{Mesure du côté adjacent à } \angle B}{\text{Hypoténuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{Mesure du côté opposé à } \angle A}{\text{Côté adjacent à } \angle A} = \frac{a}{b}$$

$$\tan B = \frac{\text{Mesure du côté opposé à } \angle B}{\text{Côté adjacent à } \angle B} = \frac{b}{a}$$

Nous cherchons donc la mesure de l'angle d'orientation de $\vec{v}$, qui correspond à l'angle A.

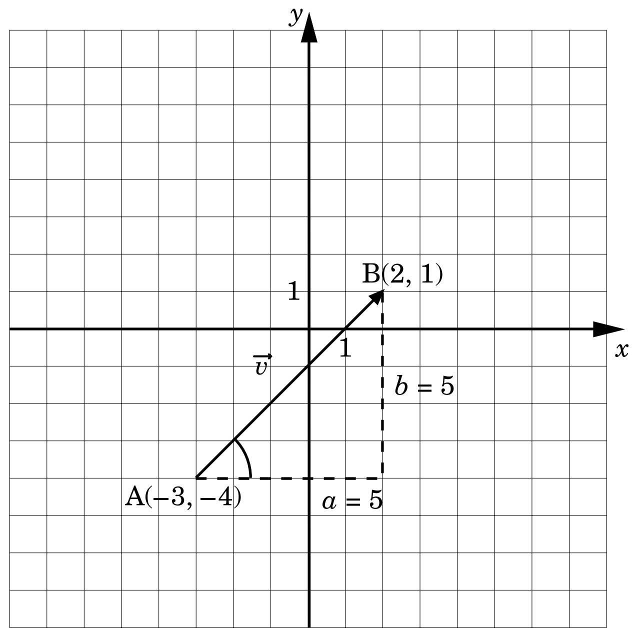


Fig. 1.12 Représentation dans le plan cartésien de l'angle d'orientation de $\vec{v}$

Nous utilisons la tangente, puisque nous connaissons la mesure du côté adjacent à l'angle d'orientation ainsi que la mesure du côté opposé à cet angle. Nous obtenons ce qui suit.

$$\tan A = \frac{b}{a}$$

$$\tan A = \frac{5}{5}$$

$$\tan A = 1$$

$m\angle A = 45°$ en appuyant sur $\boxed{\text{2nd}}\ \boxed{\text{TAN}^{-1}}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{ENTER}}$

N.B. – N'oubliez pas de mettre votre calculatrice en mode degrés.

Nous obtenons directement la mesure de l'angle d'orientation car les composantes a et b sont positives, ce qui correspond à un vecteur équipollent partant de l'origine et situé dans le premier quadrant.

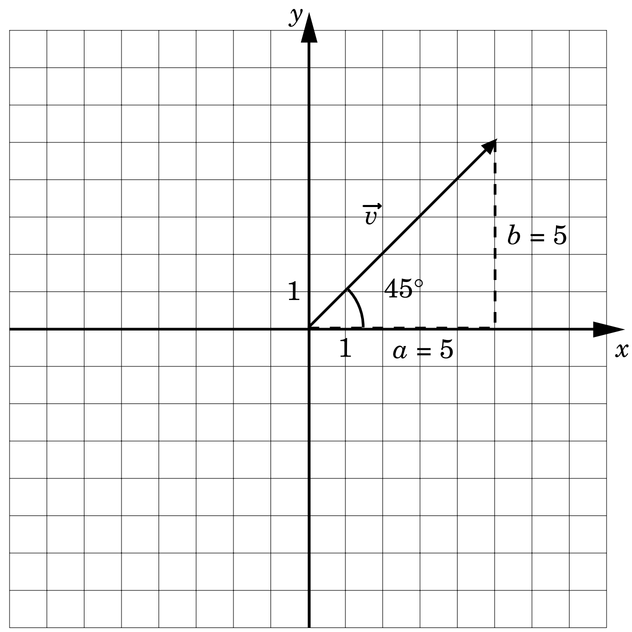
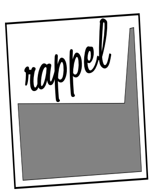


Fig. 1.13 Représentation dans le plan cartésien d'un vecteur équipollent à $\vec{v}$ partant de l'origine

Nous appellons **vecteur unitaire** un vecteur dont la norme est égale à 1 unité. Nous écrivons alors, $\|\vec{v}\| = 1$.



- *Le plan cartésien se divise en quatre parties nommées quadrants. L'ordre de succession des quadrants va dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire dans le sens anti-horaire.*

- *Les signes que prennent les coordonnées d'un point varient dans chacun des quadrants du plan cartésien.*

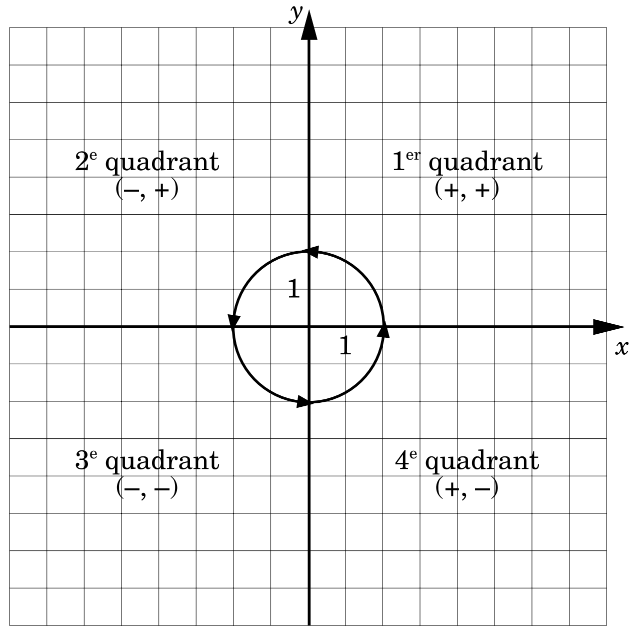


Fig. 1.14 Les 4 quadrants d'un plan cartésien et les signes des coordonnées des points dans chacun des quadrants

Voyons maintenant à l'aide d'un autre exemple comment trouver l'angle d'orientation lorsque les deux composantes a et b ne sont pas positives.

Exemple 3

Soit $\overrightarrow{CD}$ un vecteur dont les coordonnées de l'origine sont (3, 2) et celles de l'extrémité (–2, –4).

Représentez ce vecteur dans le plan cartésien, ci-dessous.

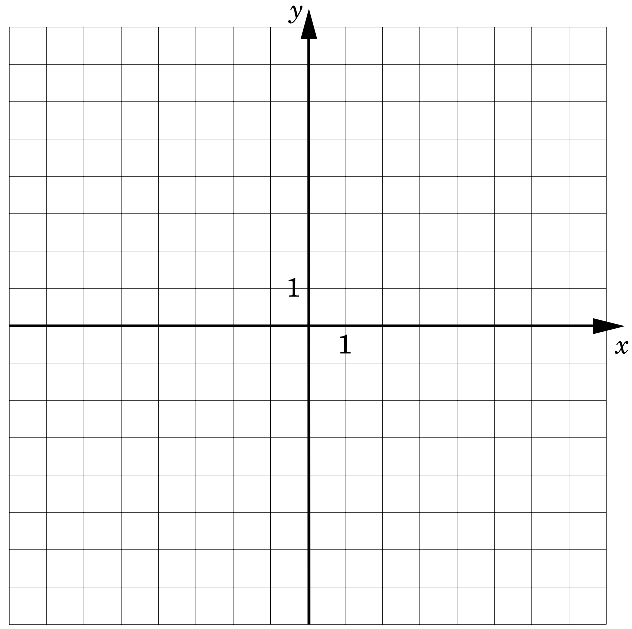


Fig. 1.15 Plan cartésien

Calculez les composantes horizontale et verticale de ce vecteur et illustrez-les dans le plan cartésien précédent.

....

....

Déterminez dans quel quadrant se situerait un vecteur équipollent à $\overrightarrow{CD}$ et partant de l'origine du plan cartésien en fonction du signe des composantes a et b. Tracez-les dans le plan cartésien ci-dessous.

....

....

....

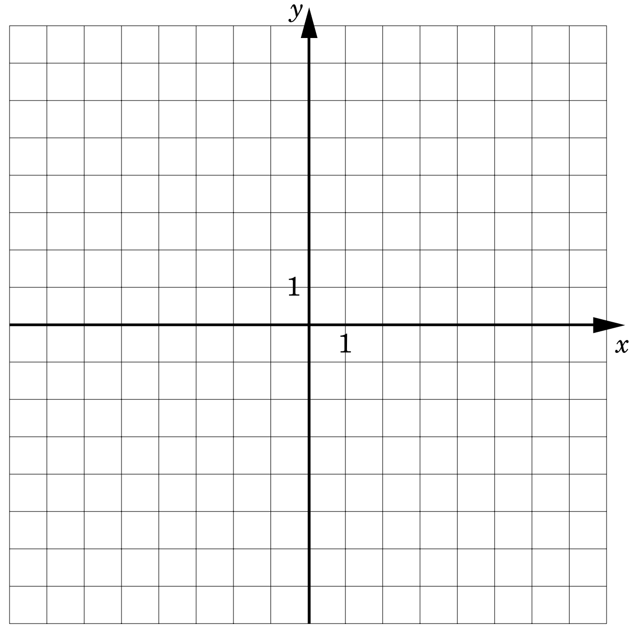


Fig.1.16 Plan cartésien

Calculez la mesure de son angle d'orientation.

....

....

Solution

$a = x_2 - x_1 = -2 - 3 = -5$
$b = y_2 - y_1 = -4 - 2 = -6$

Voici la représentation de $\overrightarrow{CD}$ dans le plan cartésien ainsi que sa composante horizontale a et sa composante verticale b.

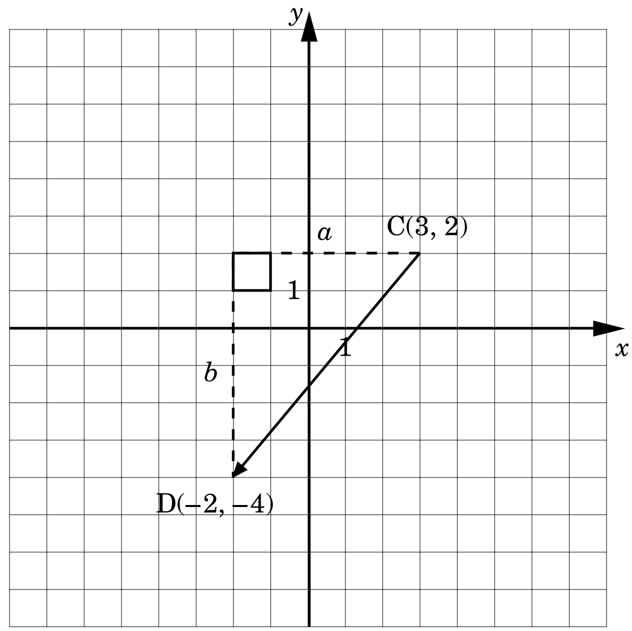


Fig. 1.17 Représentation dans le plan cartésien de $\overrightarrow{CD}$ ainsi que ses composantes *a* et *b*

Comme les composantes *a* et *b* sont négatives, nous constatons qu'un vecteur équipollent à $\overrightarrow{CD}$, partant de l'origine, se situerait dans le troisième quadrant.

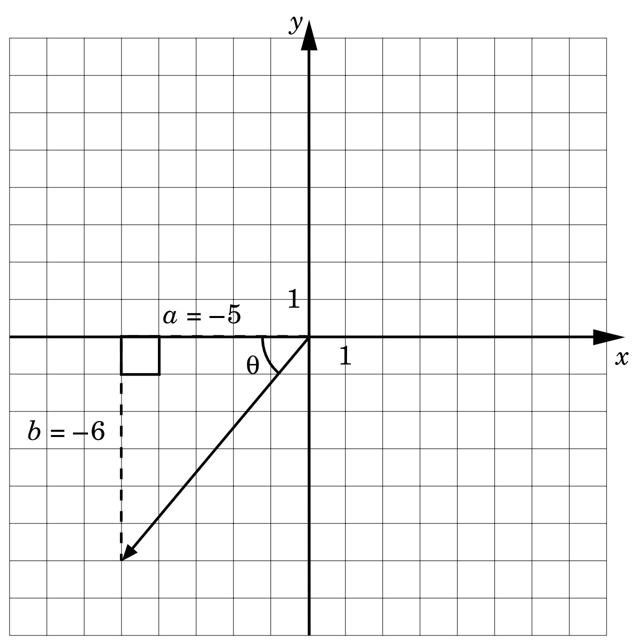


Fig. 1.18 Représentation dans le plan cartésien du vecteur équipollent à $\overrightarrow{CD}$, partant de l'origine, ainsi que ses composantes *a* et *b*

Nous utilisons la tangente afin de calculer la mesure de l'angle θ (θ : thêta), en tenant compte de la **valeur absolue** des composantes.

rappel

La valeur absolue d'un nombre est la valeur positive ou nulle de ce nombre. Nous notons la valeur absolue de a par $|a|$.

Par exemple, $|2| = 2$, $|-2| = 2$ *et* $|0| = 0$.

$$\tan \theta = \frac{\text{mesure du côté opposé à } \angle\, \theta}{\text{mesure du côté adjacent à } \angle\, \theta} = \frac{|-6|}{|-5|} = 1{,}2$$

$m\angle\theta = 50{,}2°$

Finalement, pour obtenir la mesure de l'angle d'orientation, nous devons additionner 180° à la mesure de l'angle θ. Finalement, l'angle d'orientation de $\overrightarrow{CD}$ mesure 180° + 50° = 230°, à l'unité près.

À partir de l'angle θ, il est possible de déterminer l'orientation de tout vecteur, peu importe dans quel quadrant se situe son vecteur équipollent partant de l'origine. Pour ce faire, il faudra apporter une petite correction à l'angle θ, selon le quadrant du plan cartésien dans lequel nous obtenons le vecteur équipollent, partant de l'origine. En effet, tout vecteur qui possède un vecteur équipollent, partant de l'origine et en fonction du signe de ses composantes, peut former quatre triangles différents.

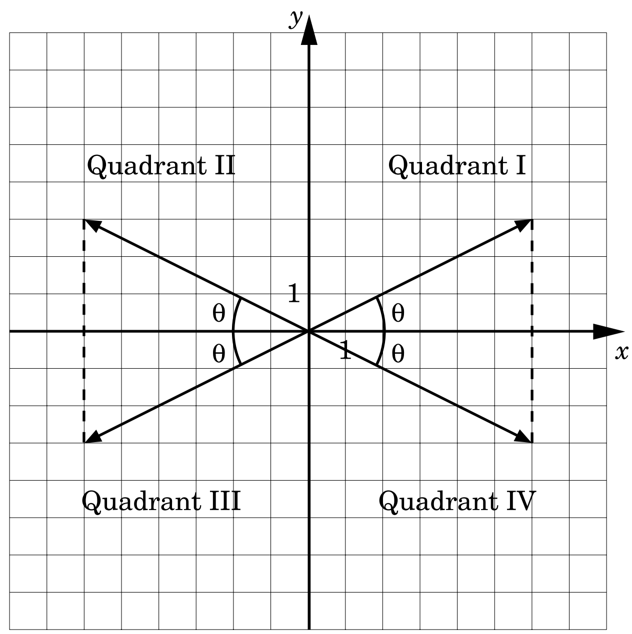
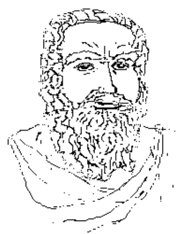


Fig. 1.19 Un vecteur et ses composantes pouvant former 4 triangles différents

Une fois le quadrant identifié, à l'aide d'un vecteur équipollent partant de l'origine, il est possible d'obtenir la mesure de l'angle d'orientation en utilisant le tableau suivant.

Tableau 1.1 Angle d'orientation en fonction du quadrant

Quadrant	Signe de la composante en a	Signe de la composante en b	Mesure de l'angle d'orientation du vecteur à partir de la mesure de l'angle θ
I	+	+	$m\angle\theta$
II	–	+	$180° - m\angle\theta$
III	–	–	$m\angle\theta + 180°$
IV	+	–	$360° - m\angle\theta$



Saviez-vous que...

... nous pouvons également tenir compte du signe des composantes a et b pour le calcul de la mesure de l'angle θ? Cela a pour effet d'obtenir une valeur négative de la mesure de l'angle θ lorsque nous sommes en présence d'un vecteur situé dans le deuxième quadrant et le quatrième quadrant. En tenant compte du signe de la mesure de l'angle θ obtenu, nous pouvons alors déterminer la mesure de l'angle d'orientation en appliquant le tableau qui suit.

Tableau 1.2 Mesure de l'angle d'orientation en fonction du quadrant, en tenant compte du signe obtenu de la mesure de l'angle θ

Quadrant	Signe de la composante en a	Signe de la composante en b	Mesure de l'angle d'orientation du vecteur à partir de la mesure de l'angle θ
I	+	+	m∠θ
II	–	+	m∠θ + 180°
III	–	–	m∠θ + 180°
IV	+	–	m∠θ + 360°

Mettez vos nouvelles connaissances à l'épreuve en effectuant les exercices qui suivent.

Exercice 1.2

1. Calculez la norme (au dixième près) et la mesure de l'angle d'orientation (à l'unité près) de chacun des vecteurs donnés.

   a) $\vec{v} = (-3, 4)$

   ....

   ....

   ....

   ....

   b) $\vec{t} = (-2, -4)$

   ....

   ....

   ....

   ....

   c) $\overrightarrow{AB}$, étant donné A(2,1) et B(−3,1).

   ....

   ....

   ....

   ....

d) $\vec{s} = (0, -5)$

....

....

....

....

e) $\overrightarrow{CD}$, étant donné C(−2, −2) et D(3,6).

....

....

....

....

f) $\vec{u} = (-4, -3)$

....

....

....

....

g) $\overrightarrow{EF}$, étant donné E(5,5) et F(−5,0).

....

....

....

....

h) $\overrightarrow{GH}$, étant donné G(−4,2) et H(0,0).

....

....

....

....

2. Indiquez si les vecteurs suivants sont nuls, unitaires ou ni nuls ni unitaires. Justifiez votre réponse.

a) $\overrightarrow{AB}$, étant donné A(−1, −1) et B(1, 1).

....

....

....

b) $\overrightarrow{CC}$, étant donné C(0, 1).

....

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

....

....

d) $\vec{v} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

....

....

e) $\overrightarrow{CD}$, étant donné C(0, 0) et D(0, –1).

....

....

....

f) $\vec{w} = \left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

....

....

g) $\vec{t} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

....

....

h) $\overrightarrow{EF}$, étant donné E(1, 1) et F(–1, –1).

....

....

Si vous avez éprouvé des difficultés à compléter les exercices précédents, révisez les explications fournies dans la deuxième partie de ce sous-module ou consultez une personne-ressource avant de poursuivre votre lecture.

Jusqu'à présent, nous avons vu que deux vecteurs ayant la même direction, le même sens et la même norme sont des vecteurs équipollents.

> Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de même direction, de même sens et de même norme sont des vecteurs équipollents.

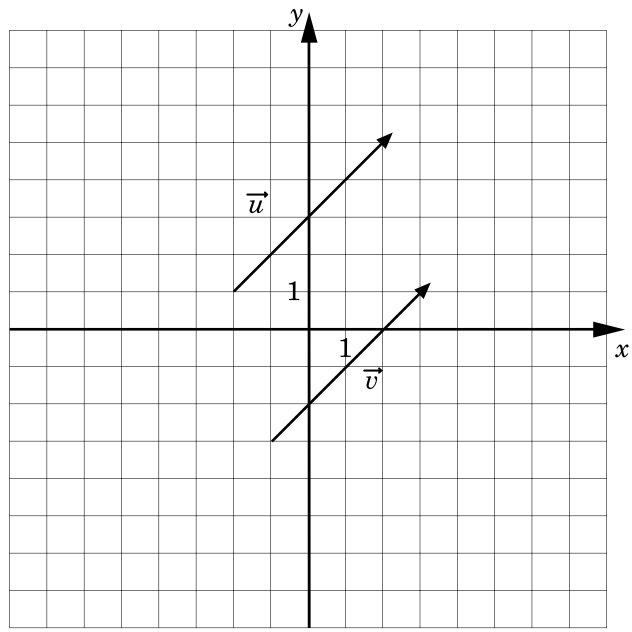


Fig. 1.20 Représentation dans le plan cartésien de deux vecteurs équipollents

Maintenant, nous allons voir d'autres relations qui existent entre deux vecteurs en fonction de leur angle d'orientation et de leur norme.

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, de même direction, représentés par des flèches parallèles, peu importe leur sens et leur norme, sont des **vecteurs colinéaires**.

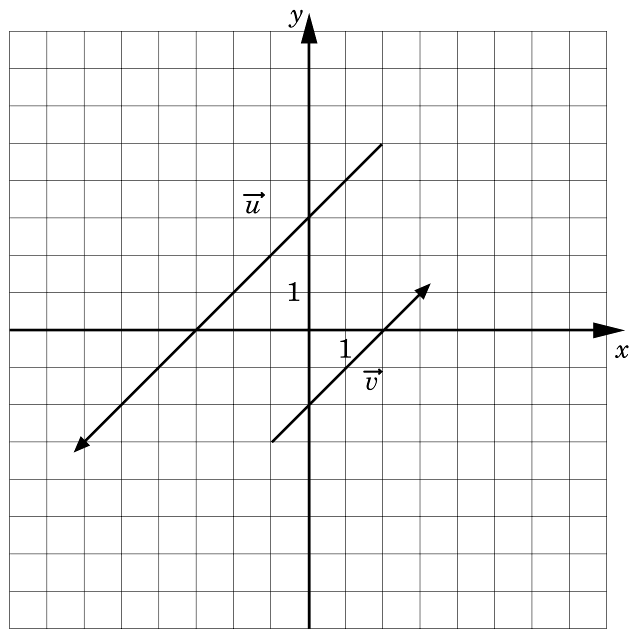


Fig. 1.21 Représentation dans le plan cartésien de deux vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, de même direction et de même norme, mais de sens opposés, sont des **vecteurs opposés**.

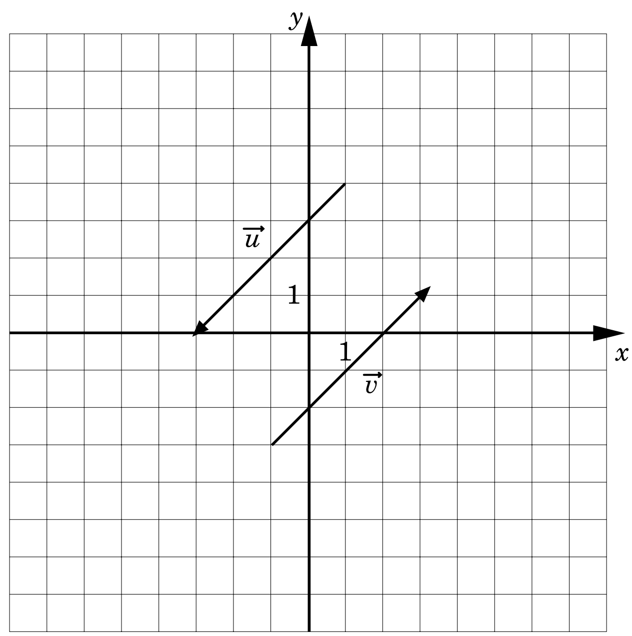


Fig. 1.22 Représentation dans le plan cartésien de deux vecteurs opposés

N.B. – Si deux vecteurs non nuls ne sont pas colinéaires, il est certain qu'ils ne peuvent être équipollents ou opposés.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant des directions perpendiculaires sont des **vecteurs orthogonaux**.

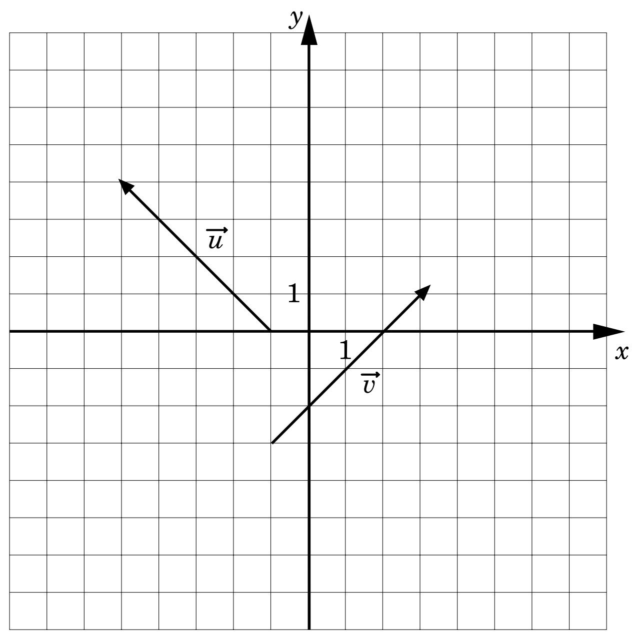
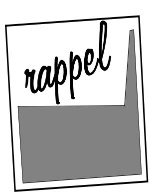


Fig. 1.23 Représentation dans le plan cartésien de deux vecteurs orthogonaux



Deux droites sont dites perpendiculaires si elles se croisent à angle droit (90°).

N.B. – Deux vecteurs non nuls qui sont orthogonaux, ne peuvent être colinéaires et réciproquement, deux vecteurs colinéaires ne peuvent être orthogonaux.

Nous allons maintenant voir comment il est possible de déterminer si deux vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux (perpendiculaires), équipollents (égaux) ou opposés.

Exemple 4

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (4,3)$ et $\overrightarrow{v} = (-4, -3)$, déterminons si ces vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux ou opposés.

Dans un premier temps, nous allons calculer la mesure de l'angle d'orientation de chacun des vecteurs afin de les comparer.

- $\overrightarrow{u}$

  Comme les composantes de ce vecteur sont positives, nous savons que la mesure de l'angle d'orientation est obtenue directement en calculant la tangente.

  $\tan \theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$, alors $m\angle\theta = 37°$.

- $\overrightarrow{v}$

  Comme les composantes de ce vecteur sont négatives, nous savons que la mesure de l'angle d'orientation est obtenue en ajoutant 180° à la mesure de l'angle obtenue en calculant la tangente, car nous sommes dans le quadrant III.

  $\tan \theta = \left|\dfrac{-3}{-4}\right| = 0{,}75$, alors $m\angle\theta = 37°$.

  La mesure de l'angle d'orientation est donc $180° + 37° = 217°$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc colinéaires, car ils sont dans la même direction, mais de sens opposé, puisqu'il y a exactement 180° de différence entre la mesure de leur angle d'orientation.

Calculons maintenant la norme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ afin de vérifier si ce sont des vecteurs opposés.

- $\overrightarrow{u}$

  $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 19} = \sqrt{25} = 5$

- $\overrightarrow{v}$

  $\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 19} = \sqrt{25} = 5$

Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même norme, nous pouvons alors dire que ces vecteurs sont des vecteurs opposés.

Exemple 5

Soit $\overrightarrow{AB}$ dont l'origine est A(3, 2) et l'extrémité est B(8, 5) et $\overrightarrow{CD}$ dont l'origine est C(–2, –1) et l'extrémité est D(–5, 4). Déterminez si ces vecteurs sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents ou opposés.

? Calculez les composantes horizontales et verticales de ces vecteurs.

- $\overrightarrow{AB}$

  ....

  ....

- $\overrightarrow{CD}$

  ....

  ....

? Calculez la mesure de l'angle d'orientation de chacun de ces vecteurs.

- $\overrightarrow{AB}$

  ....

- $\overrightarrow{CD}$

 ....

 ....

? Comparez la mesure de l'angle d'orientation de $\overrightarrow{AB}$ à la mesure de l'angle d'orientation de $\overrightarrow{CD}$ et précisez la relation qui existe entre ces deux vecteurs.

....

....

? Déterminez si nous devons calculer la norme de ces vecteurs.

....

....

Solution

Calculons les composantes horizontales et verticales de ces vecteurs.

- $\overrightarrow{AB}$

$a = x_2 - x_1 = 8 - 3 = 5$
$b = y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$

- $\overrightarrow{CD}$

$a = x_2 - x_1 = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$
$b = y_2 - y_1 = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$

Calculons la mesure de l'angle d'orientation de chacun de ces vecteurs.

- $\overrightarrow{AB}$

$\tan \theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

$m\angle\theta = 31°$

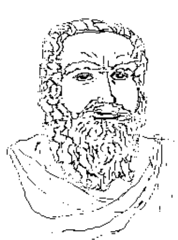
- $\overrightarrow{CD}$

$\tan \theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{|-3|} = 1{,}\bar{6}$

$m\angle\theta = 59°$

Comme la composante a est négative, nous sommes dans le quatrième quadrant. Nous devons donc calculer $360° - m\angle\theta$ pour trouver la mesure de l'angle d'orientation. La mesure de l'angle d'orientation de $\overrightarrow{CD}$ est donc $360° - 59° = 301°$.

En comparant la mesure de l'angle d'orientation de $\overrightarrow{AB}$ à celle de $\overrightarrow{CD}$, nous constatons qu'il y a $301° - 31° = 270°$ de différence. Nous pouvons donc conclure que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Comme les vecteurs orthogonaux ne peuvent être colinéaires et par le fait même ne peuvent également être opposés ou équipollents, nous n'avons pas besoin de calculer la norme de ces vecteurs.



Saviez-vous que...

... dans certains ouvrages, pour désigner deux vecteurs colinéaires, nous utilisons le terme **linéairement dépendants**?

Mettez vos nouvelles connaissances à l'épreuve en effectuant les exercices qui suivent.

Exercice 1.3

Déterminez si les deux vecteurs qui suivent sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents ou opposés.

1. $\vec{u} = (2, 5)$ et $\vec{v} = (-10, 4)$.

2. $\vec{u} = (3, 6)$ et $\vec{v} = (6, 12)$.

....

....

....

....

3. $\vec{u} = (3, 5)$ et $\vec{v} = (5, 3)$.

....

....

....

....

....

4. $\vec{u} = (5, 5)$ et $\vec{v} = (-5, 5)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

5. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, étant donné A(1,1), B(6,3), C(–5, 1) et D(0, 3).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, étant donné E(–3, –5), F(2, –5), G(–4, 3) et H(–4, 9).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, étant donné A(−3, −2), B(4, −5), C(6, 2) et D(−1, 5).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, étant donné E(3, −3), F(4, 2), G(7, 1) et H(2, −2).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

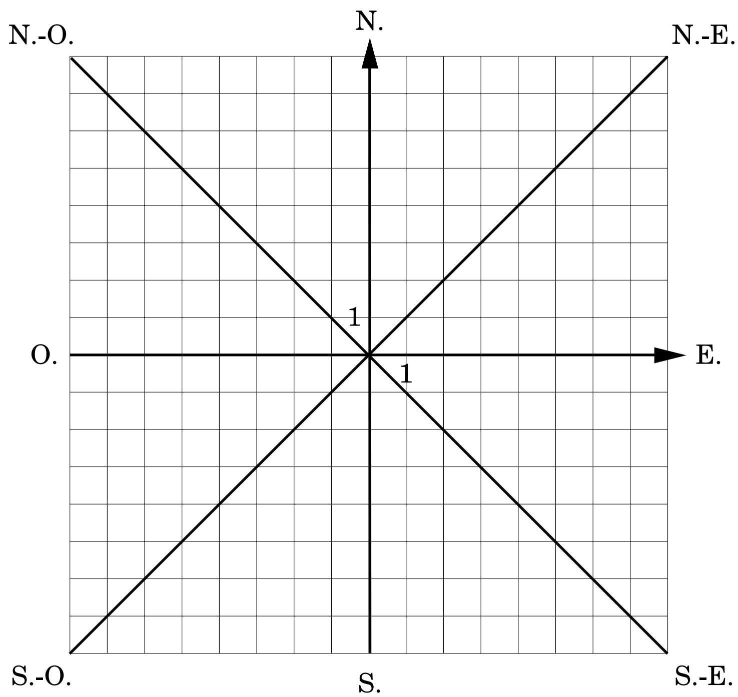
....

Les exercices de consolidation qui suivent vous permettront de mettre en pratique l'ensemble des connaissances que vous avez acquises dans ce sous-module.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

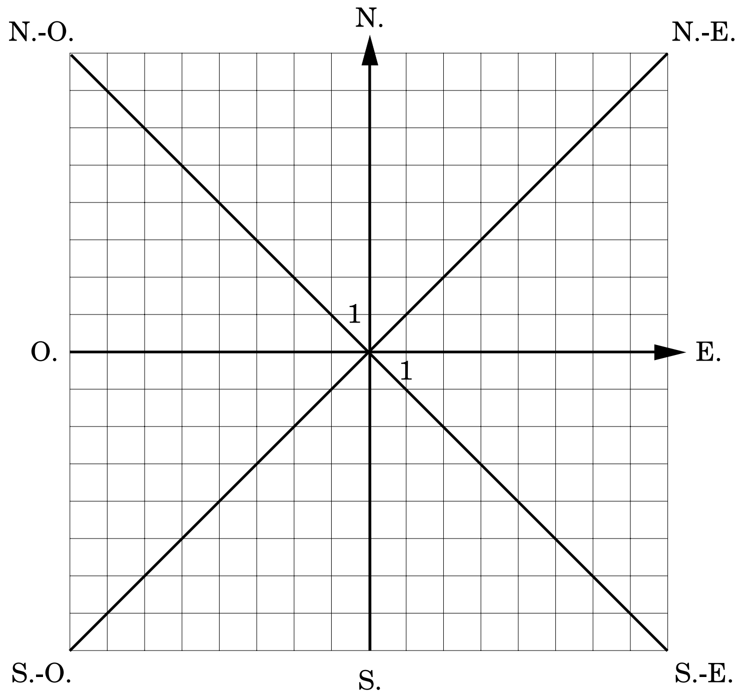
1. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit, puis donnez la mesure de son angle d'orientation.

   a) $\vec{v}$ de 4,5 cm, direction N. 40° E.



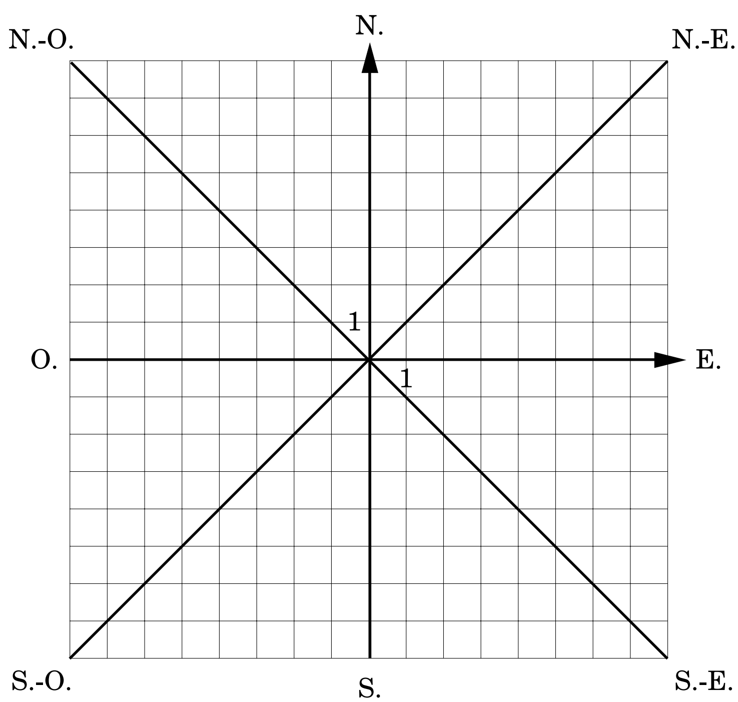
....

b) $\vec{v}$ de 4 cm, direction S. 35° O.



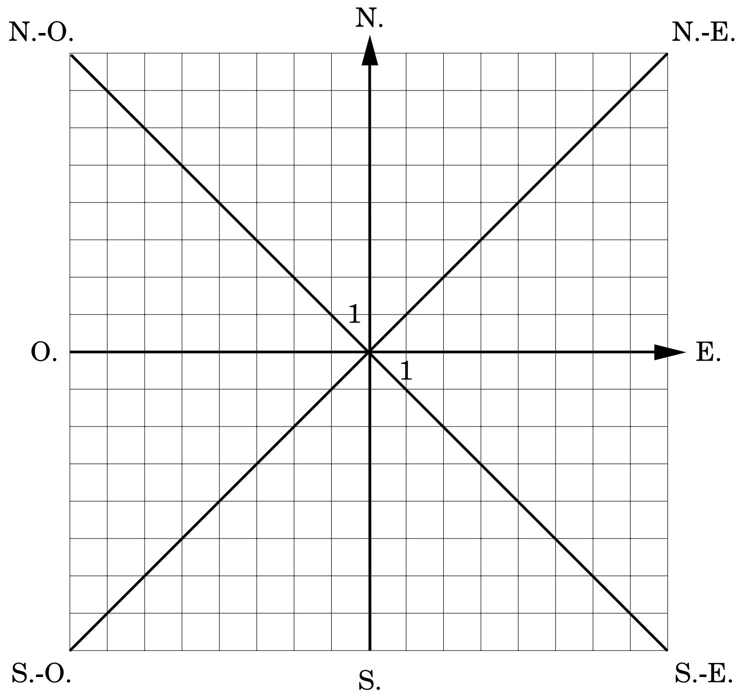
....

c) $\vec{w}$ de 4 cm, direction O. 20° S.



....

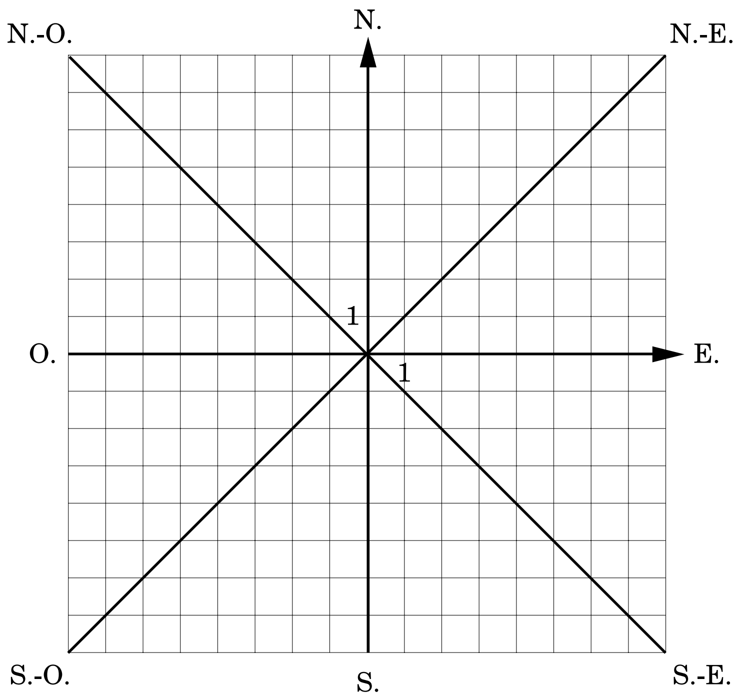
d) $\overrightarrow{u}$ de 4 cm, direction E. 30° S.



....

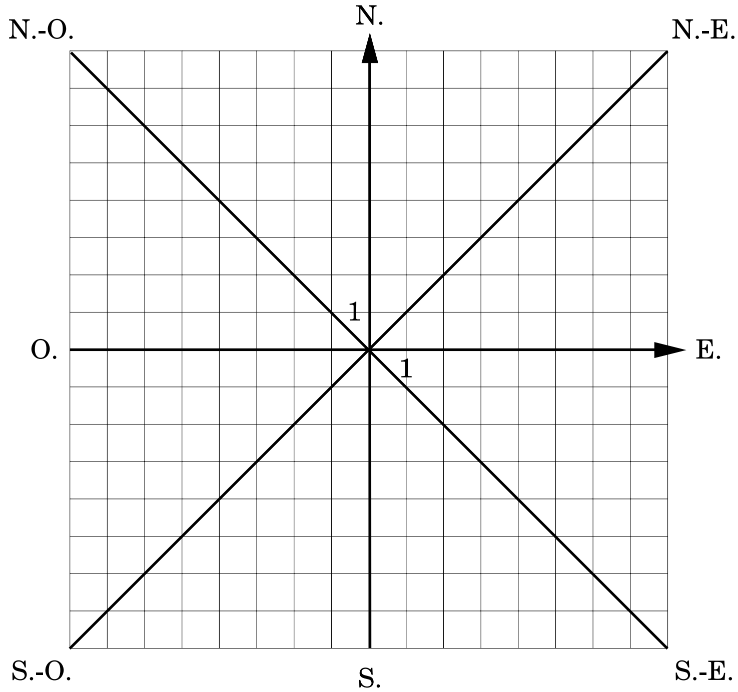
2. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit, puis donnez la mesure de son angle d'orientation par rapport aux points cardinaux.

   a) $\overrightarrow{u}$ de 3,5 cm selon un angle d'orientation de 200°.



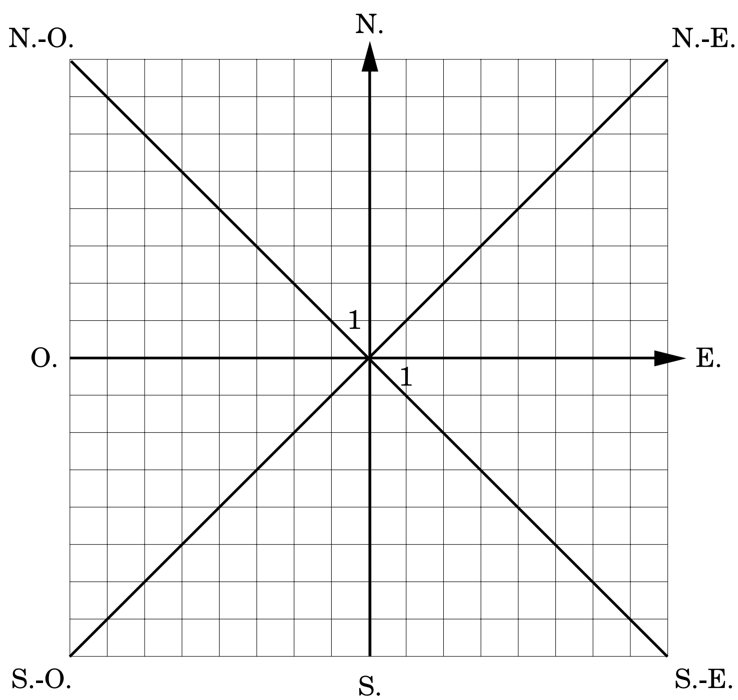
....

b) $\overrightarrow{v}$ de 4 cm selon un angle d'orientation de 315°.



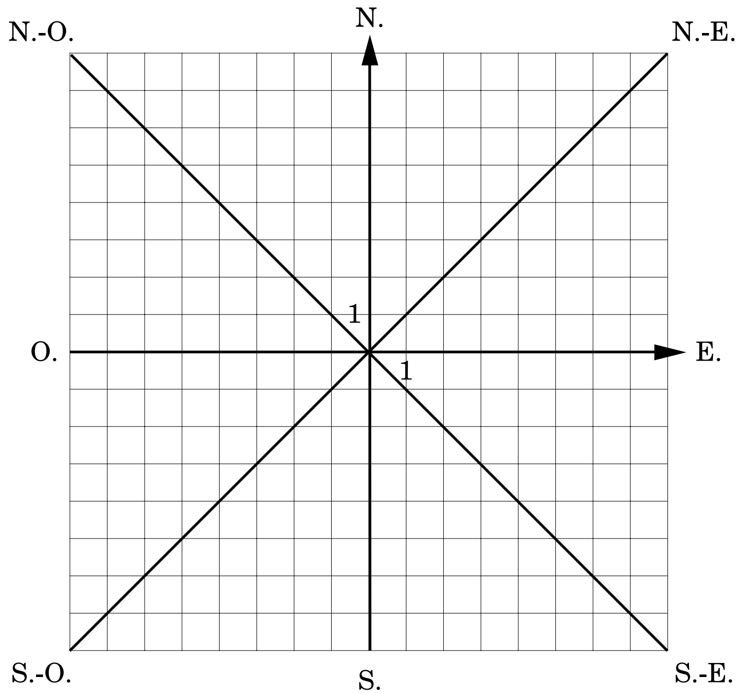
....

c) $\overrightarrow{w}$ de 4,5 cm selon un angle d'orientation de 55°.



....

d) $\overrightarrow{u}$ de 3,5 cm selon un angle d'orientation de 135°.



....

3. Indiquez si les vecteurs suivants sont nuls, unitaires ou ni nuls ni unitaires. Justifiez votre réponse.

a) $\overrightarrow{u} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

....

....

b) $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

....

....

c) $\overrightarrow{AA}$, étant donné A(1, 0).

....

....

d) $\overrightarrow{w} = (1, 1)$

....

....

4. Calculez la norme (au dixième près) et la mesure de l'angle d'orientation (à l'unité près) de chacun des vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{u} = (-5, -7)$

....

....

....

....

b) $\overrightarrow{v} = (12, 1)$

....

....

c) $\overrightarrow{w} = (-4, 0)$

....

....

....

....

d) $\overrightarrow{AB}$, étant donné A(2, 4) et B(5, 7).

....

....

....

....

5. Déterminez si les deux vecteurs qui suivent sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents ou opposés.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, étant donné A(–2, 6), B(–7, 2), C(–7, –4) et D(–2, 0).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, étant donné E(4, 1), F(4, 8), G(2, −3) et H(−4, −3).

c) $\vec{u} = (5, 2)$ et $\vec{v} = (5, -2)$.

d) $\vec{s} = (-5, 4)$ et $\vec{t} = (-4, -5)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

e) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, étant donné A(1, −2), B(−5, −5), C(6, 6) et D(0, 3).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

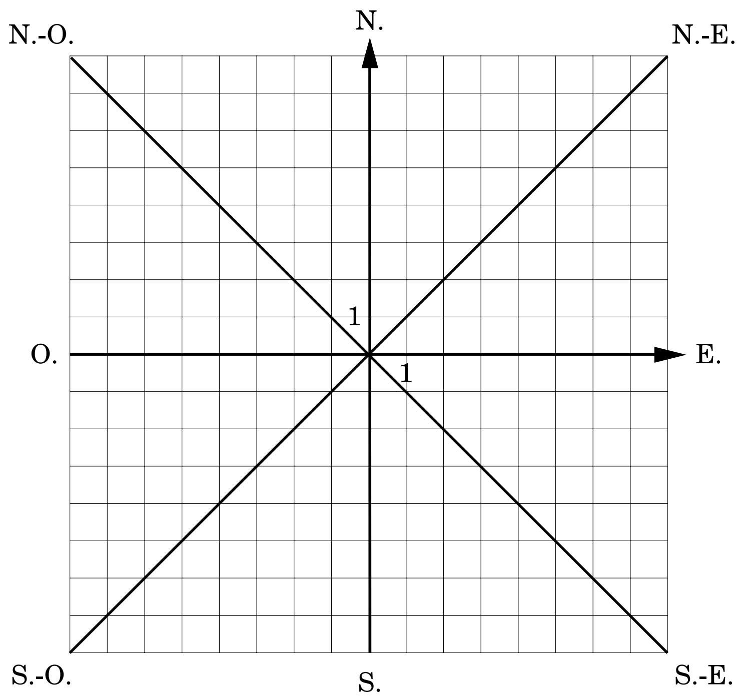
....

f) $\vec{u} = (4, 0)$ et $\vec{v} = (6, 0)$.

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

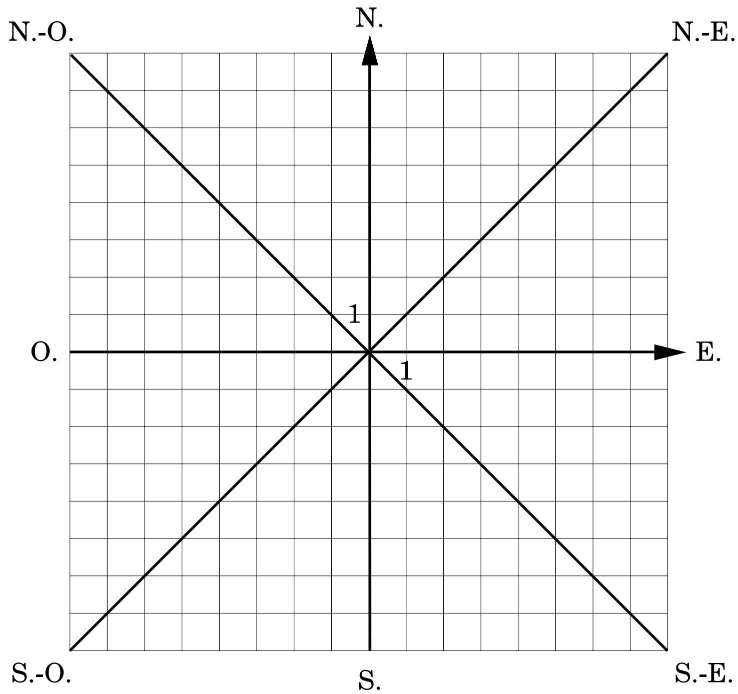
1. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit, puis donnez la mesure de son angle d'orientation.

   a) $\overrightarrow{u}$ de 3 cm, direction ouest.



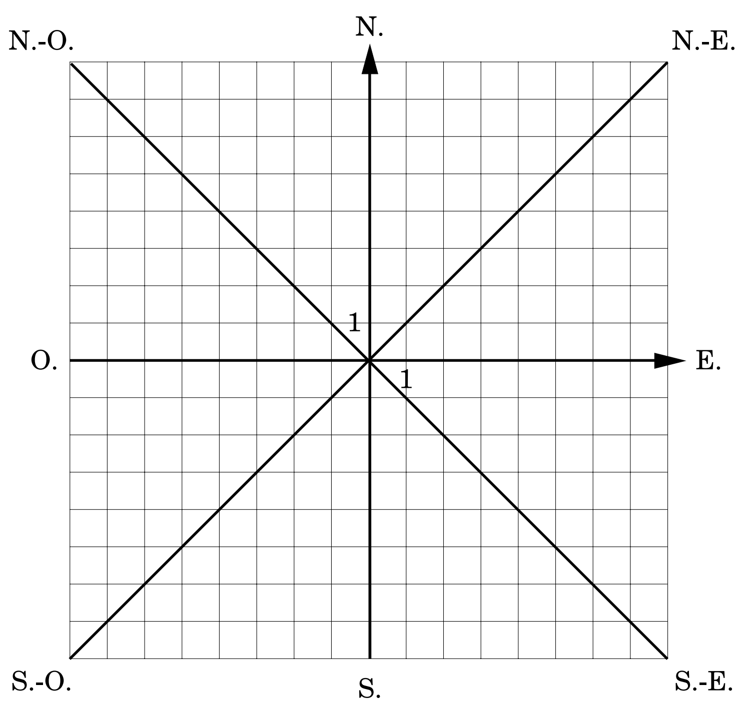
....

b) $\vec{v}$ de 3,5 cm, direction sud.



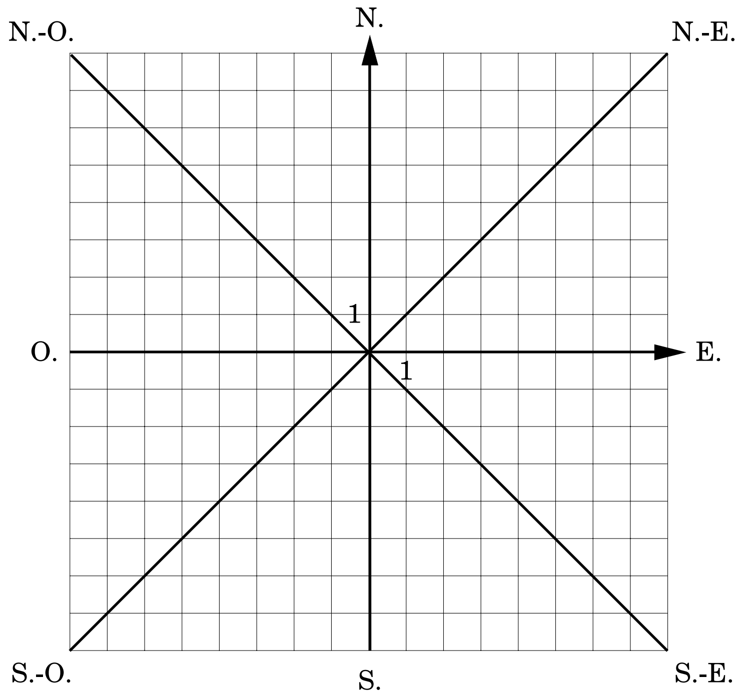
....

c) $\vec{w}$ de 4 cm, direction sud-ouest.



....

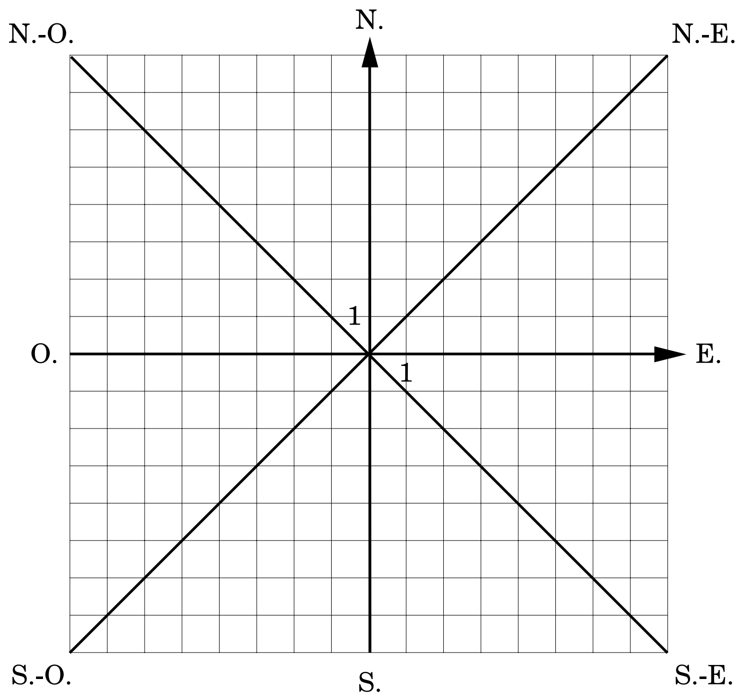
d) $\overrightarrow{u}$ de 3,5 cm, direction S. 25° O.



....

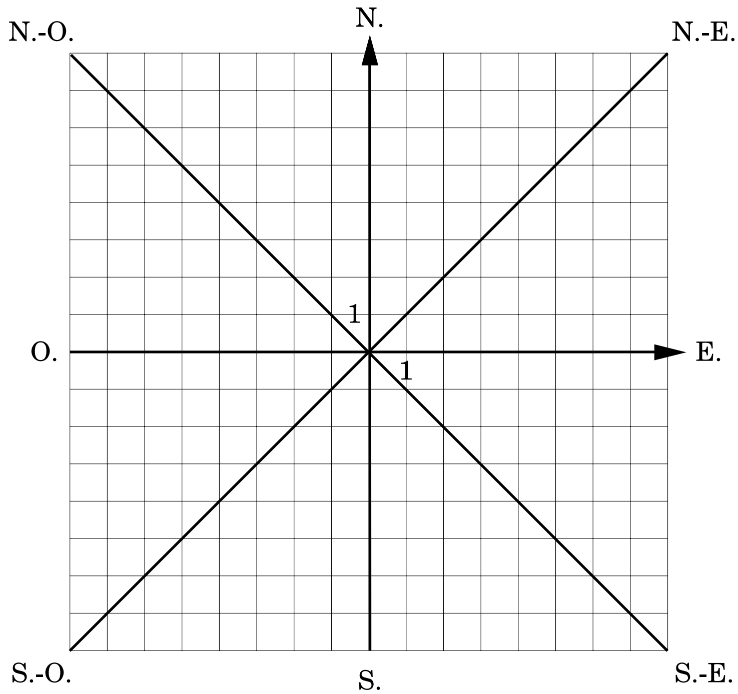
2. À l'aide d'une règle et d'un rapporteur, tracez le vecteur décrit et donnez la mesure de son angle d'orientation par rapport aux points cardinaux.

a) $\overrightarrow{u}$ de 4 cm selon un angle d'orientation de 225°.



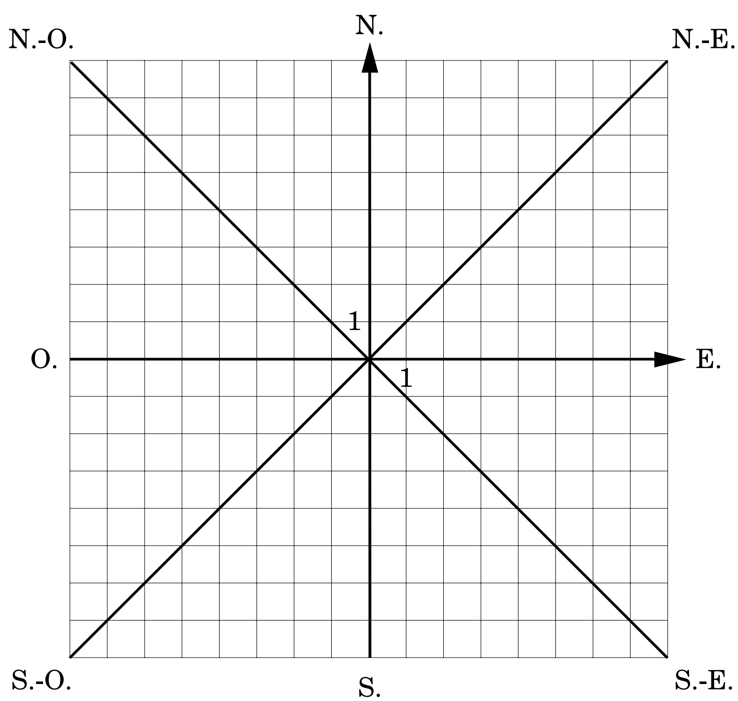
....

b) $\vec{v}$ de 2 cm selon un angle d'orientation de 90°.



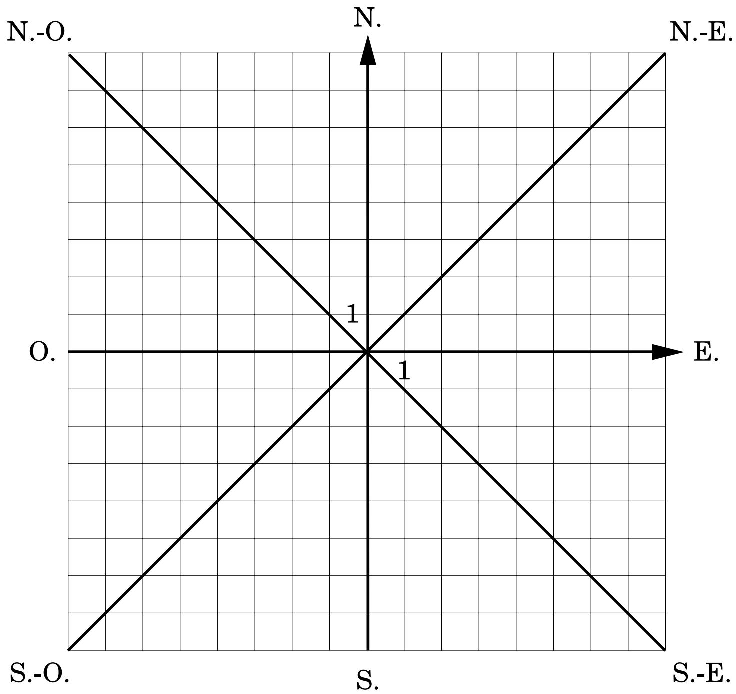
....

c) $\vec{w}$ de 3 cm selon un angle d'orientation de 285°.



....

d) $\overrightarrow{u}$ de 3,5 cm selon un angle d'orientation de 0°.



....

3. Calculez la norme (au dixième près) et la mesure de l'angle d'orientation (à l'unité près) de chacun des vecteurs donnés.

a) $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$

....

....

....

....

b) $\overrightarrow{v} = (-6{,}45;\ 4{,}5)$

....

....

c) $\overrightarrow{w} = \left(5, 3\sqrt{5}\right)$

d) $\overrightarrow{AB}$, étant donné A(1, –3) et B(2, 6).

4. Indiquez si les vecteurs suivants sont nuls, unitaires ou ni nuls ni unitaires. Justifiez votre réponse.

   a) $\overrightarrow{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

   b) $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

   c) $\overrightarrow{AB}$, étant donné A(0,5; 0) et B(0,5; 0).

d) $\overrightarrow{CD}$, étant donné C(–3, 4) et D(–3, 3).

....

....

....

5. Déterminez si les deux vecteurs qui suivent sont colinéaires, non colinéaires, orthogonaux, équipollents ou opposés.

a) $\vec{u} = (4, 4)$ et $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

....

....

....

....

....

....

b) $\vec{u} = \left(5\sqrt{3}, 5\right)$ et $\vec{v} = \left(-\frac{15\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

c) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, étant donné A(0, 0), $B\left(10\sqrt{3}, -10\right)$, C(−3, 0) et $D\left(-6, -3\sqrt{3}\right)$.

d) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$, étant donné E(2, 3), F(4, −2), G(−3, −4) et H(−1, −9).

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Une nouvelle norme

Nous avons vu que pour calculer la norme d'un vecteur représenté dans le plan cartésien, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore. Maintenant, nous allons voir comment Pythagore peut nous aider à calculer la norme d'un vecteur situé dans l'espace, tel que représenté ci-dessous.

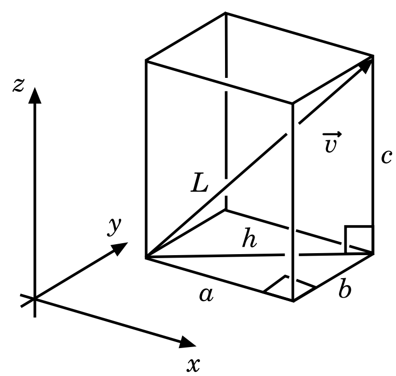


Fig.1.24 Norme d'un vecteur dans l'espace

Pour trouver la norme de $\vec{v}$, représentée par L dans la figure précédente, nous allons commencer par appliquer une première fois le théorème de Pythagore pour trouver la longueur h.

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$h^2 = a^2 + b^2$$

Par la suite, comme L représente l'hypothénuse du triangle formé par h et le côté c, nous appliquons une deuxième fois le théorème de Pythagore.

$$L = \sqrt{h^2 + c^2}$$

En remplaçant la valeur de h trouvée dans la première équation, nous obtenons ce qui suit.

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\| \vec{v} \| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$