MAT-5109-1

GÉOMÉTRIE IV

sofad

MAT-5109-1

GÉOMÉTRIE IV

sofad

Coordonnateur des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteur : Serge Dugas

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseure linguistique : Francine Cardinal

Édition électronique : L'atelier du Mac inc.

Impression : 2005

Dépôt légal — 2005
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada
ISBN 2-89493-308-8

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

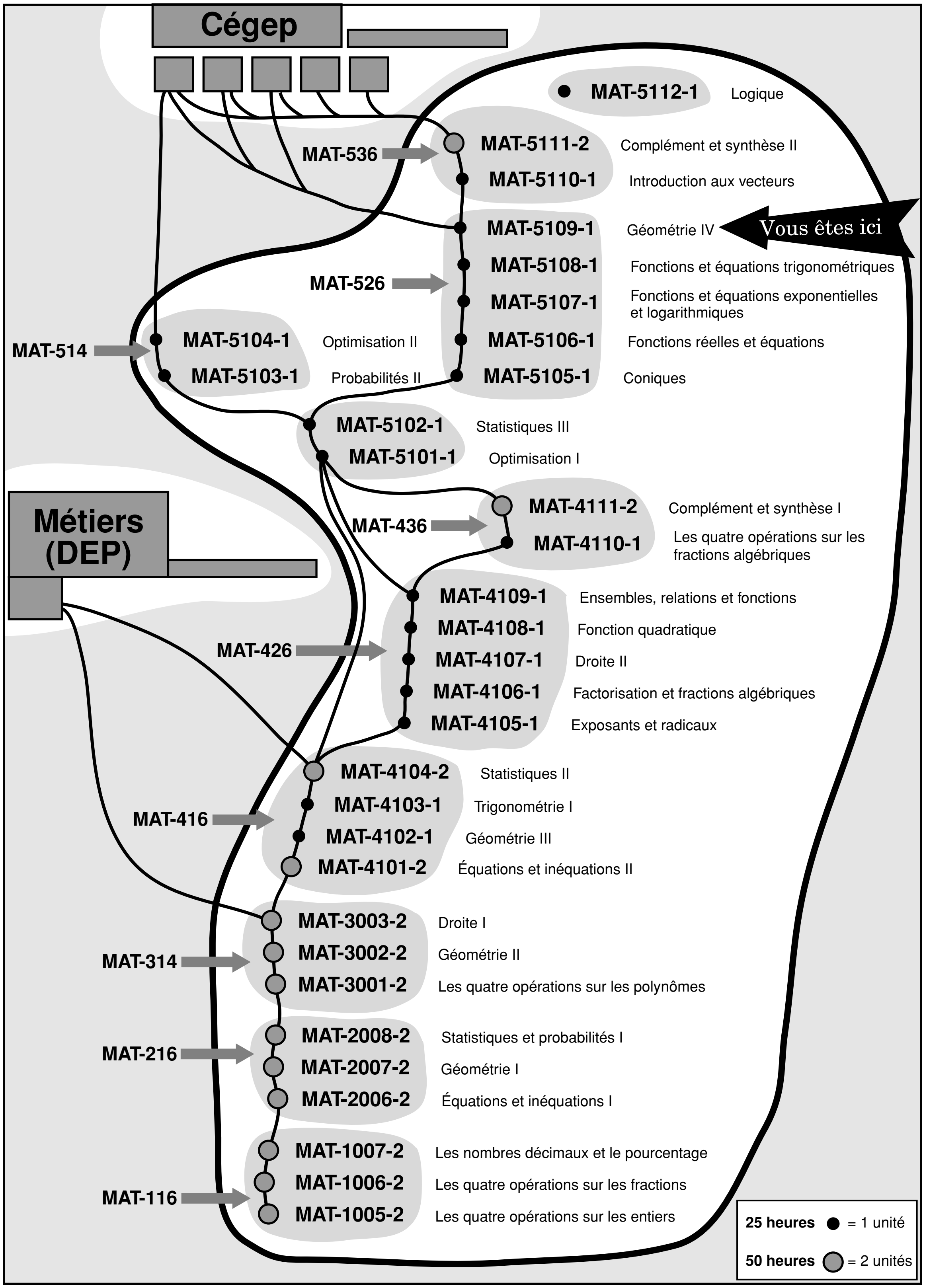
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

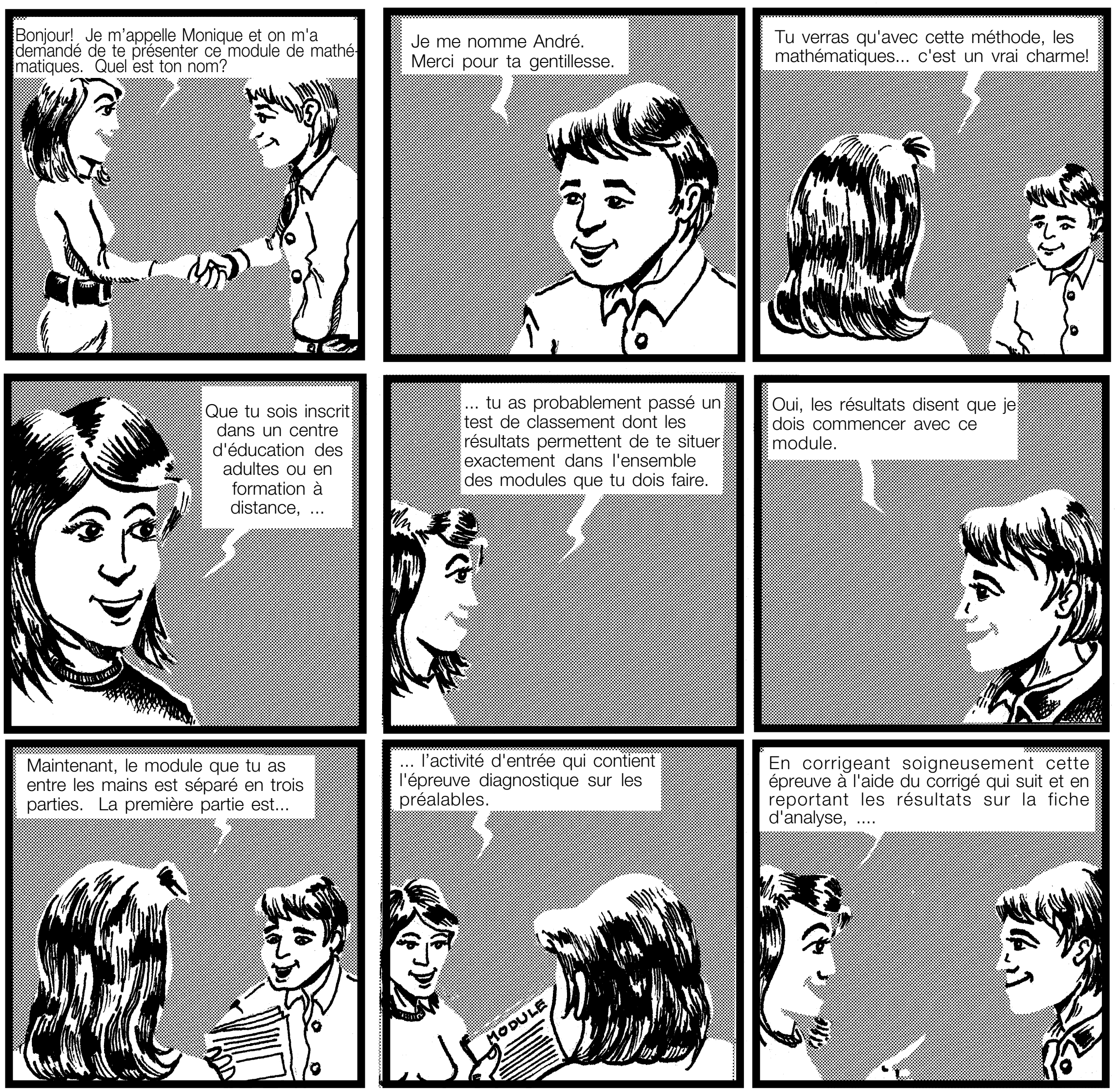
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

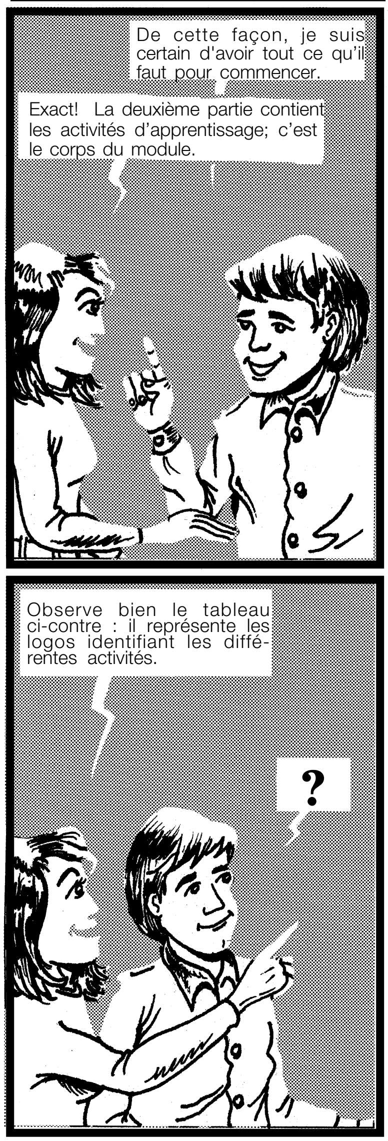
S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?





DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

?

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE ET LE TRIANGLE RECTANGLE

Cercle, rayon, arc, aire, circonférence, triangle rectangle, hauteur, hypoténuse : voilà des mots qui ne vous sont certes pas inconnus. Vous avez sans doute, lors de vos cours précédents, abordé ces notions sans toutefois avoir l'occasion de pousser plus loin votre étude. Ce cours vous permettra de compléter vos connaissances sur ces différents sujets tout en vous faisant découvrir la géométrie déductive et l'application de théorèmes et de corollaires dans la justification des étapes des problèmes à solutionner.

Dans un premier temps, nous étudierons les diverses relations existant dans le cercle. Après une brève révision des divers éléments composant le cercle, nous nous attaquerons aux diverses relations métriques concernant les mesures des longueurs du cercle et les mesures d'angles et d'arcs dans le cercle.

Nous poursuivrons notre étude en abordant d'autres relations métriques mais cette fois-ci dans le triangle rectangle. Vous connaissez déjà l'une de ces relations soit celle de Pythagore. Nous en découvrirons bien d'autres et nous verrons des applications pratiques de ces relations.

Il va sans dire que l'accent, lors des activités proposées, sera mis sur la résolution de problèmes basés sur des situations concrètes à partir desquelles nous pourrons appliquer les notions acquises.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5109-1 comporte 6 objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures réparties tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombres d'heures***	**% (évaluation)**
1 à **4**	12	50 %
5 et **6**	12	50 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Identification de divers éléments dans des cercles

   Sur des illustrations de cercles où plusieurs éléments sont représentés et désignés par des lettres majuscules, indiquer les éléments suivants : un rayon, un diamètre, une corde, un arc, une sécante, une tangente, un point de tangence, un angle au centre, un angle inscrit, un angle intérieur et un angle extérieur.

2. Relations métriques dans le cercle : mesures de longueurs
   Étant donné une liste de théorèmes et de corollaires ainsi que l'illustration de un ou deux cercles sur lesquels sont inscrites les mesures nécessaires à la résolution du problème posé, trouver la mesure d'un rayon, d'un diamètre, d'une circonférence, d'une aire, d'une corde, d'un arc ou d'un segment tangent en ayant soin de préciser le ou les théorèmes ou corollaires appliqués à chacune des étapes de la solution.

La liste de théorèmes et de corollaires présentés est la suivante.

Relations dans un même cercle

- Toute médiatrice à une corde d'un cercle détermine un diamètre.
- La plus grande corde d'un cercle est un diamètre.
- Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage cette corde en deux segments congrus.
- Dans un cercle, tout rayon perpendiculaire à une corde partage l'arc qu'elle sous-tend en deux arcs congrus.
- Dans un cercle, des arcs compris entre deux cordes parallèles sont congrus.
- Deux cordes situées à une même distance du centre d'un cercle sont congrues.
- Dans un cercle, deux cordes congrues sous-tendent des arcs congrus et, inversement, des arcs congrus sont sous-tendus par des cordes congrues.
- Toute tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de tangence.
- Deux tangentes à un cercle issues d'un même point extérieur au cercle déterminent des segments congrus. (Les segments sont mesurés entre le point duquel les tangentes sont issues et chacun des points de tangence.)
- Deux droites parallèles, sécantes ou tangentes à un cercle, interceptent sur le cercle, entre les deux droites parallèles, des arcs congrus.

Relations entre deux cercles

- Le rapport des circonférences de deux cercles et celui des mesures de leur rayon respectif forment une proportion.
- Le rapport des aires de deux cercles et celui du carré des mesures de leur rayon respectif forment une proportion.
- Le rapport des mesures des arcs semblables de deux cercles et celui des mesures de leur rayon respectif forment une proportion.

La résolution du problème exige l'application d'au plus trois théorèmes ou corollaires.

3. Relations métriques dans le cercle : mesures d'angles

Étant donné une liste de théorèmes et de corollaires ainsi que l'illustration d'un cercle sur lequel sont inscrites les mesures nécessaires à la résolution du problème posé, trouver la mesure d'un angle au centre, d'un angle inscrit, d'un angle intérieur, d'un angle extérieur ou la mesure en degrés d'un arc en ayant soin de préciser le ou les théorèmes ou corollaires appliqués à chacune des étapes de la solution.

La liste de théorèmes et de corollaires présentés est la suivante.

- Dans un cercle, la mesure d'un angle au centre est égale à la mesure de l'arc intercepté par ses côtés.
- Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté par ses côtés.
- Dans un cercle, la mesure d'un angle intérieur est égale à la demi-somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et par leurs prolongements.
- Dans un cercle, la mesure d'un angle extérieur est égale à la demi-différence entre les mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle.

La résolution du problème exige l'application d'au plus trois théorèmes ou corollaires.

4. **Résolution de problèmes liés à divers domaines de l'activité humaine et basés sur les relations métriques dans le cercle**

   Étant donné la liste de théorèmes et de corollaires portant sur les relations métriques dans le cercle ainsi que l'illustration de un ou deux cercles sur lesquels sont inscrites les mesures d'angles et de longueurs qui permettent de tirer les déductions pertinentes, résoudre des problèmes issus de la menuiserie, de l'arpentage, de l'architecture, du dessin technique, etc. La mesure de l'angle, du rayon, du diamètre, du segment, du périmètre ou de l'aire cherchée doit être accompagnée de l'unité de mesure appropriée. Les étapes de résolution du problème doivent être décrites et les théorèmes ou corollaires appliqués doivent être indiqués.

5. Relations métriques dans le triangle rectangle

   Étant donné une liste de théorèmes et de corollaires ainsi que l'illustration d'un triangle rectangle sur lequel sont inscrites les mesures nécessaires à la résolution du problème posé, trouver la mesure d'un angle, d'un côté, d'une médiane, d'une hauteur, de l'hypoténuse, du périmètre ou de l'aire d'un triangle rectangle en ayant soin de préciser le ou les théorèmes ou corollaires appliqués à chacune des étapes de la solution.

   La liste de théorèmes et de corollaires présentés est la suivante.

   - Lorsqu'un triangle rectangle est inscrit dans un cercle, son hypoténuse est toujours un diamètre.
   - Dans un triangle rectangle, la mesure de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la demi-mesure de l'hypoténuse.
   - Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la demi-mesure de l'hypoténuse.
   - Dans un triangle rectangle, les deux triangles obtenus en traçant la hauteur relative à l'hypoténuse sont semblables entre eux et chacun d'eux est semblable au triangle initial.

- Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre la mesure des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, la mesure d'un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et la mesure de l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le produit des mesures des deux côtés de l'angle droit est égal au produit de la mesure de l'hypoténuse par celle de la hauteur relative à l'hypoténuse.

La résolution du problème exige l'application d'au plus trois théorèmes ou corollaires.

6. Résolution de problèmes liés à divers domaines de l'activité humaine et basés sur les relations métriques dans le triangle rectangle

Étant donné la liste de théorèmes et de corollaires portant sur les relations métriques dans le triangle rectangle ainsi que l'illustration d'un triangle rectangle sur lequel sont inscrites les mesures d'angles et de longueurs qui permettent de tirer les déductions pertinentes, résoudre des problèmes issus de la menuiserie, de l'arpentage, de l'architecture, du dessin technique, etc. La mesure de l'angle, de la longueur, du périmètre ou de l'aire cherchée doit être accompagnée de l'unité de mesure appropriée. Les étapes de résolution du problème doivent être décrites et les théorèmes ou corollaires appliqués doivent être indiqués.

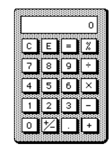
ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° Pour répondre à ces questions, vous devez avoir les instruments suivants :

- une règle graduée en centimètres et en millimètres,
- un rapporteur,
- un compas,
- une calculatrice.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez les réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. a) Construisez un cercle dont le rayon mesure 2 cm.

   b) À l'aide d'un rapporteur et d'un compas, tracez un arc de 60° à partir du point A illustré ci-dessous.

   N.B. – La construction doit être précise à ± 2°.

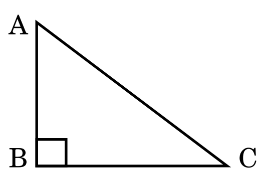
•

A

2. Arturo veut imperméabiliser la toile de sa piscine circulaire avec un enduit vendu en aérosol. Une bouteille d'aérosol peut couvrir une surface de 20 m^2. Si la piscine d'Arturo a un rayon de 3 m, aura-t-il assez d'une seule bouteille pour effectuer son travail?

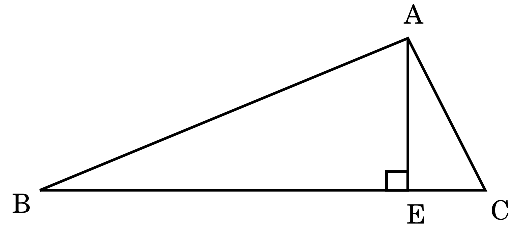
3. Adrienne veut entourer son jardin circulaire d'une clôture. Si ce dernier a un diamètre de 15 m, quelle sera la longueur de la clôture?
N.B. – Donnez la réponse au centième près.

4. Mélissa prend toujours un raccourci à travers le champ quand elle revient de l'école. Calculez la distance AC qu'elle parcourt si vous savez que m$\overline{AB}$ = 360 m et m$\overline{BC}$ = 480 m.

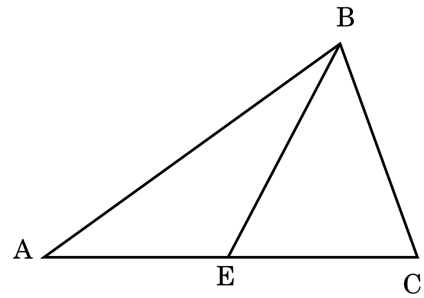


5. Complétez les phrases suivantes en utilisant l'un de ces mots : hauteur, médiatrice, médiane.

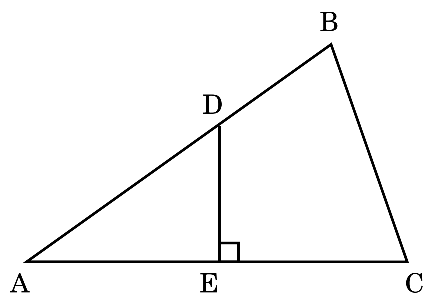
a) Sur la figure ci-dessous, le segment de droite AE est une ....



b) Ci-dessous, nous savons que m$\overline{AE}$ = m$\overline{EC}$. Le segment de droite BE est donc une............................... .



c) Sur la figure ci-dessous, le segment de droite DE est perpendiculaire au milieu du côté AC. Le segment de droite DE est donc une.................... .



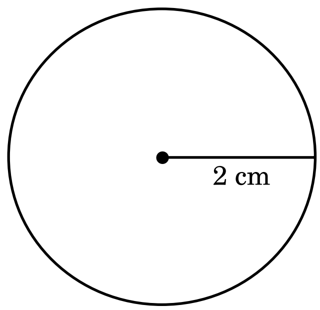
6. Trouvez la valeur de x dans les proportions suivantes. La solution détaillée est exigée.

a) $\frac{3}{13} = \frac{x}{78}$

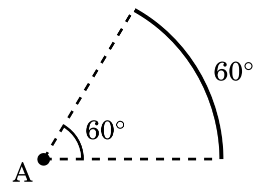
b) $\frac{0,2}{6} = \frac{1,4}{x}$

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a)



b)



2. Nous cherchons l'aire de la toile de la piscine à imperméabiliser.

$A = \pi r^2$

$A = \pi \times (3 \text{ m})^2 = \pi \times 9 \text{ m}^2 = 28{,}27 \text{ m}^2$ (au centième près)

Il faudra donc plus que une bouteille pour effectuer le travail.

3. Nous cherchons la circonférence du jardin à clôturer.

$C = \pi d$

$C = \pi \times 15 \text{ m} = 47{,}12 \text{ m}$ (au centième près)

La longueur de la clôture sera donc de 47,12 m.

4. Nous devons utiliser le théorème de Pythagore.

$m\overline{AC}^2 = m\overline{AB}^2 + m\overline{BC}^2$

$m\overline{AC}^2 = (360 \text{ m})^2 + (480 \text{ m})^2$

$m\overline{AC}^2 = 129\,600 \text{ m}^2 + 230\,400 \text{ m}^2$

$m\overline{AC}^2 = 360\,000 \text{ m}^2$

$m\overline{AC} = 600 \text{ m}$

Mélissa marche donc 600 m.

5. a) Hauteur. b) Médiane. c) Médiatrice.

6. a)

$$\frac{3}{13} = \frac{x}{78}$$
$$13 \times x = 3 \times 78$$
$$13x = 234$$
$$x = \frac{234}{13}$$
$$x = 18$$

b)

$$\frac{0{,}2}{6} = \frac{1{,}4}{x}$$
$$0{,}2 \times x = 6 \times 1{,}4$$
$$0{,}2x = 8{,}4$$
$$x = \frac{8{,}4}{0{,}2}$$
$$x = 42$$

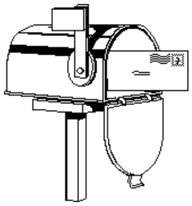
ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			8.1	8.4	Sous-module 1
b)			8.2	8.7	Sous-module 1
2.			8.3	8.12	Sous-module 2
3.			8.4	8.15	Sous-module 2
4.			8.5	8.18	Sous-module 3
5. a)			8.6.1	8.24	Sous-module 5
b)			8.6.2	8.28	Sous-module 5
c)			8.6.3	8.30	Sous-module 2
6. a)			8.7	8.33	Sous-modules 2 et 5
b)			8.7	8.33	Sous-modules 2 et 5

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».

Corrigé



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5109-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5109-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

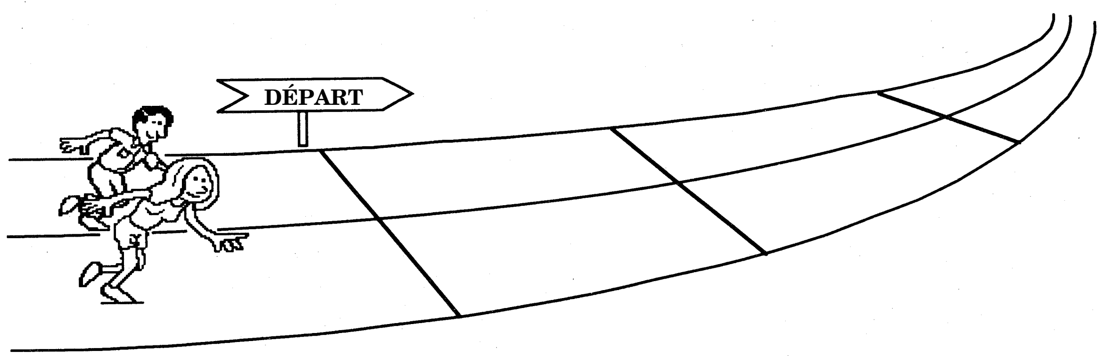
Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 4.

Le devoir 2 porte sur les sous-modules 5 et 6.

Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 6.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

IDENTIFICATION DE DIVERS ÉLÉMENTS DANS DES CERCLES

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Le jeu de fléchettes

Bruno, un grand bricoleur, veut construire pour ses enfants, Karine et Frédéric, un jeu de fléchettes avec un morceau de contreplaqué qu'il a récupéré dans le fond de son garage. Il esquisse donc un plan de son jeu et le montre à ses enfants tout en leur expliquant les points accordés selon la section qu'ils toucheront avec leurs fléchettes.

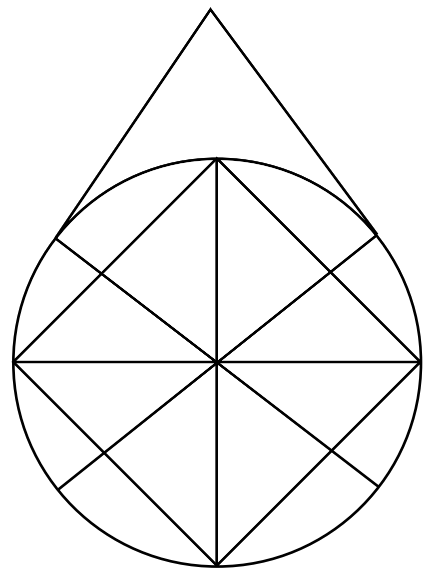
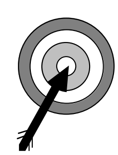


Fig. 1.1 Plan du jeu de fléchettes de Bruno

« Le jeu est très simple, leur dit-il. Si vous lancez votre fléchette entre deux ***rayons***, vous obtenez 10 points; mais si c'est entre une ***corde*** et un ***arc***, vous comptez seulement 5 points. Par contre... . » Karine l'interrompt : « Qu'est-ce que c'est un rayon, papa? » « Et un arc? », de renchérir Frédéric.

Bruno a vite compris que son vocabulaire trop technique risque de causer des interprétations erronées et des disputes inutiles.

« J'ai une idée, leur soumet-il. Vous allez m'aider à construire le jeu de fléchettes et, en même temps, je vous explique le vocabulaire des divers éléments d'un ***cercle***. »



Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable d'identifier sur un cercle les éléments suivants : un rayon, un *diamètre*, une corde, un arc, une *sécante*, une *tangente*, un *point de tangence*, un *angle au centre*, un *angle inscrit*, un *angle intérieur* et un *angle extérieur*.

rappel

Le cercle est l'ensemble de tous les points situés à une même distance d'un autre appelé « centre ».

Soit le cercle de centre O de la figure 1.2. Remarquons que le point O ne fait pas partie du cercle : c'est un point situé à l'**intérieur du cercle**. Par contre, les points A, B et C sont des points du cercle, tandis que les points D et E sont situés à l'**extérieur du cercle**.

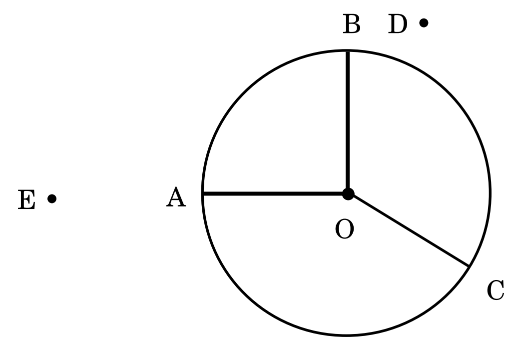


Fig. 1.2 Cercle de centre O

? Où sont situés les points du segment de droite OA par rapport au cercle?

....

Tous les points de $\overline{OA}$ sont situés à l'intérieur du cercle, sauf le point A qui est sur le cercle.

Sur le cercle de la figure 1.2, le point O est le centre du cercle, tandis que $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ sont des **rayons** du cercle.

Le **rayon** d'un cercle est un segment de droite reliant le centre du cercle à un point situé sur le cercle. Il est noté *r*.

Comme il y a une infinité de points sur le cercle, nous pouvons en conclure qu'il y a une infinité de rayons et que, de plus, ces rayons ont la même mesure.

Sur la figure 1.3, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ et $\overline{EF}$ sont appelés des **cordes**.

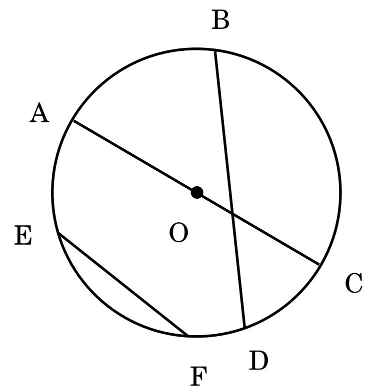


Fig. 1.3 Cordes d'un cercle

> Une **corde** est un segment de droite qui joint deux points quelconques du cercle.

La corde AC, qui passe par le centre du cercle, porte le nom de **diamètre**.

> Un **diamètre** est une corde qui passe par le centre du cercle. Il est noté d.

? Est-ce que le rayon d'un cercle est une corde? Justifiez votre réponse.

....

....

Le rayon d'un cercle n'est évidemment pas une corde puisqu'une seule de ses extrémités se trouve sur le cercle!

Soit les points A et B situés sur le cercle de centre O de la figure 1.4 ci-dessous. Si nous réunissons tous les points compris entre A et B, nous obtenons **l'arc de cercle** AB. Par contre, si nous voulons identifier le grand arc de cercle AB, il est nécessaire de se servir d'une troisième lettre, soit C, sinon nous risquons de confondre les deux arcs. Symboliquement, nous écrivons $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BCA}$ qui se lit arc AB et arc BCA.

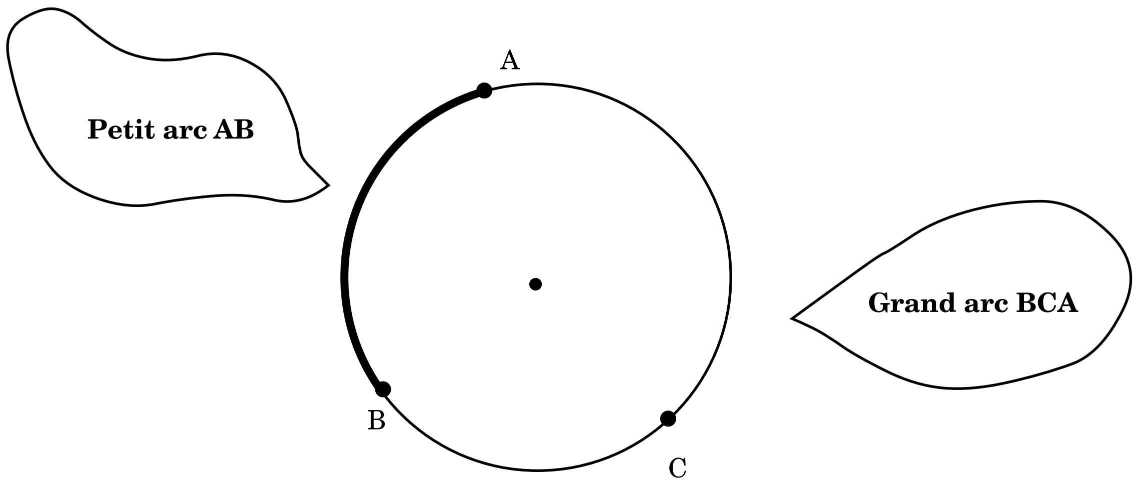


Fig. 1.4 Arcs de cercle

Un **arc de cercle** est une partie d'un cercle comprise entre deux points quelconques de ce cercle.

Une corde sous-tend un arc de cercle et un arc de cercle est sous-tendu par une corde.

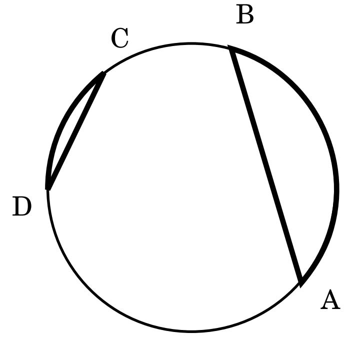


Fig. 1.5 Arcs sous-tendus par des cordes

Sur la figure 1.5, la corde AB sous-tend $\widehat{AB}$ et la corde CD sous-tend $\widehat{CD}$. Nous pouvons aussi dire que les arcs AB et CD sont sous-tendus respectivement par les cordes AB et CD.

Il existe aussi des droites qui ne sont ni des rayons, ni des diamètres, ni des cordes. Certaines de ces droites s'appellent **sécantes**. Les autres s'appellent **tangentes**.

? Sur la figure1.6 ci-dessous, quelle différence notez-vous entre les droites AB, BC et QP et les droites XY, YZ et QR?

....

....

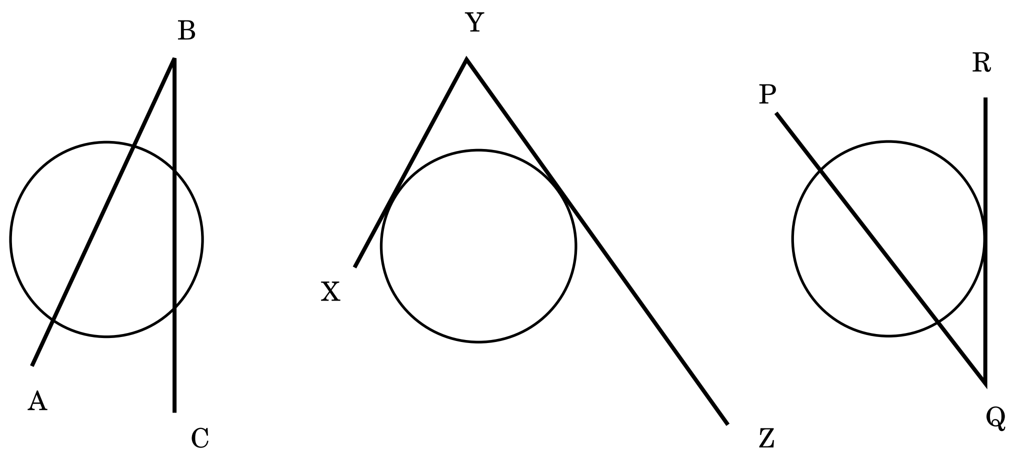


Fig. 1.6 Cercles et droites

En effet, les droites AB, BC et QP coupent les cercles en deux points, tandis que les droites XY, YZ et QR ne touchent les cercles qu'en un seul point. Les trois premières droites s'appellent des **sécantes**. Pensons au mot « sécateur », un outil utilisé pour couper les haies qui est de la même provenance que le mot sécante.

Quant aux droites XY, YZ et QR, ce sont des **tangentes** puisqu'elles ne touchent le cercle qu'en un seul point. Ce dernier point est appelé **point de tangence**.

Une **sécante** est une droite qui coupe le cercle en deux points.

Une **tangente** est une droite qui touche le cercle en un seul point. Ce point est appelé **point de tangence**.

? Dans la figure ci-contre, nommez deux sécantes, deux tangentes et deux points de tangence.

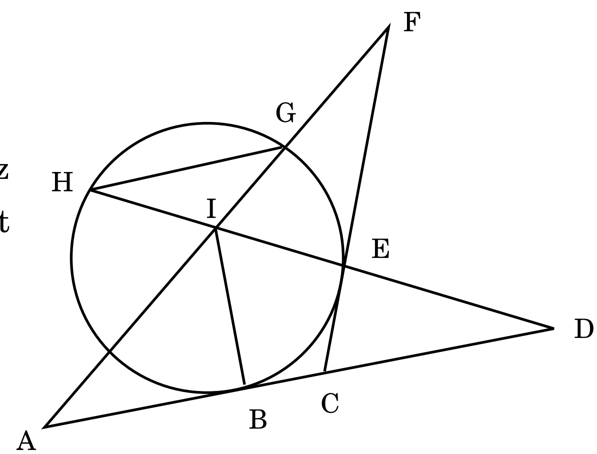


Fig. 1.7 Sécantes et tangentes

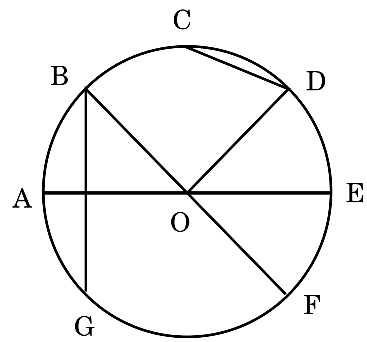
Sécantes : .... Tangentes : .... Points de tangence : ....

Les droites AF et DH sont les deux sécantes, alors que les droites AD et CF sont les deux tangentes. Les points B et E sont les points de tangence.

Maintenant, mettons en pratique les quelques notions de géométrie apprises.

Exercice 1.1

1. Examinez la figure ci-dessous et répondez aux questions qui suivent.



a) Nommez cinq rayons. ....

b) Nommez deux diamètres. ....

c) Nommez quatre cordes. ....

d) Nommez les deux plus grandes cordes sur cette figure. ....

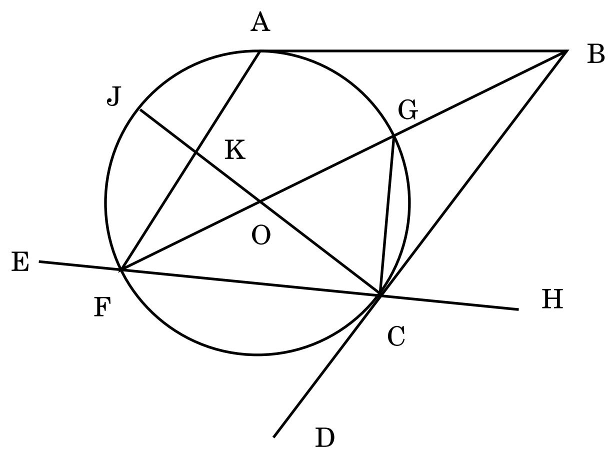
e) Par quel point commun ces deux grandes cordes passent-elles? ....

f) Quel nom donne-t-on à ces deux grandes cordes? ....

g) Nommez, par trois lettres, cinq arcs différents qui commencent par la lettre A. ....

h) Nommez la corde qui sous-tend $\overset{\frown}{BAG}$. ....

2. En vous référant à la figure ci-dessous, répondez aux questions qui suivent.



Nommez :

a) tous les points situés sur le cercle. ....

b) tous les points situés à l'intérieur du cercle. ....

c) tous les points situés à l'extérieur du cercle. ....

d) toutes les sécantes. ....

e) toutes les tangentes. ....

f) tous les rayons. ....

g) tous les diamètres. ....

h) toutes les cordes. ....

i) tous les points de tangence. ....

Déjà, Karine et Frédéric ont pu repérer, sur le jeu, des rayons, des diamètres, des sécantes et des tangentes. Ils ont maintenant plus de cordes à leur arc! Pour faciliter leur compréhension, Bruno a ajouté quelques lettres.

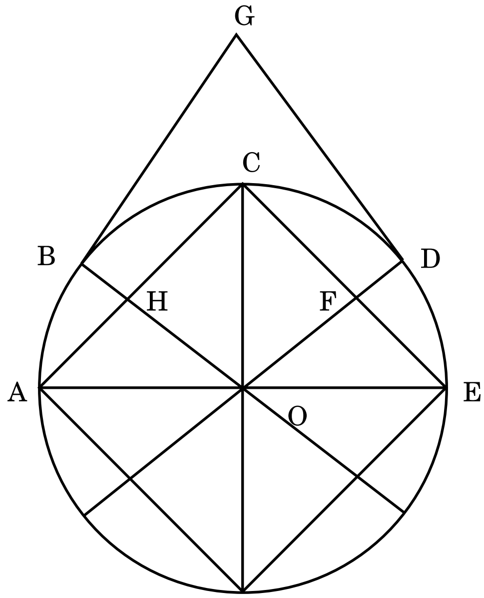
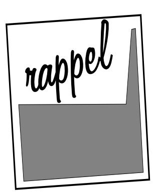


Fig. 1.8 Identification de certains points sur le jeu de Bruno

« Maintenant, regardez bien les angles de la figure, leur dit Bruno. Vous remarquez sans doute que plusieurs de ces angles ont leur sommet à l'intérieur du cercle et même au centre du cercle, d'autres sur le cercle et un autre en dehors du cercle. »



Un angle est une figure formée par deux demi-droites issues d'un même point appelé « sommet ».

L'angle AOB (noté ∠AOB) est formé des deux demi-droites OA et OB. Le sommet de cet angle est le point O.

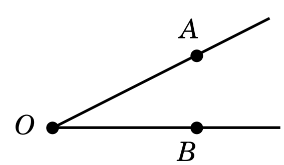


Fig. 1.9 Angle AOB

Voyons un peu quels noms particuliers nous pouvons donner à ces angles.

Un angle dont le sommet est situé à l'intérieur du cercle est appelé **angle intérieur**.

Un angle dont le sommet est situé au centre du cercle est appelé **angle au centre**.

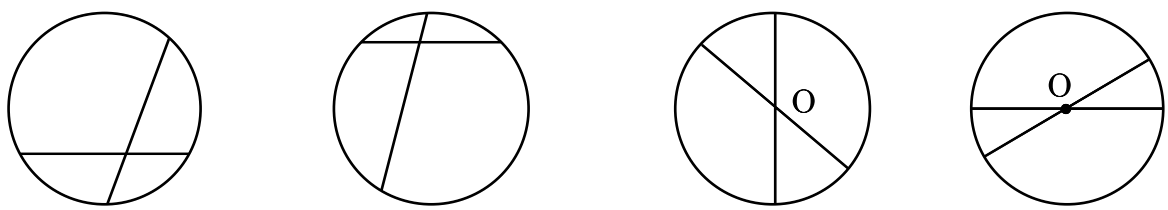


Fig. 1.10 Angles intérieurs et angles au centre

Sur la figure 1.10, les deux figures de gauche représentent des angles intérieurs. Celles de droite représentent aussi des angles intérieurs mais qui portent le nom particulier « d'angles au centre » puisque le sommet de ces angles est au centre O du cercle.

? Nommez trois angles au centre et trois angles intérieurs sur la figure 1.8.

Angles au centre : ....

Angles intérieurs : ....

Les angles au centre ont tous le point O comme sommet : par exemple, les angles COA, DOE, BOD, etc.

Les angles intérieurs ont pour leur part les points H, F ou O comme sommet : par exemple, les angles BHA, CHO, DFE, EFO, AOB, etc.

Un angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle et qui touche le cercle en au moins deux points est appelé **angle extérieur**.

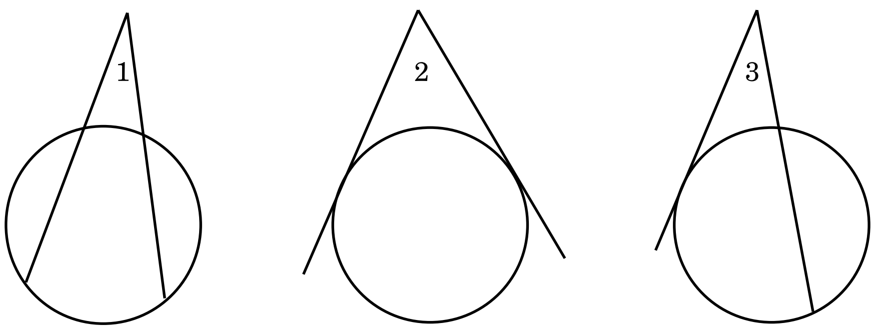


Fig. 1.11 Angles extérieurs

Il est à noter que les angles extérieurs sont toujours formés par des sécantes ou des tangentes.

? Soit la figure 1.11, quels(s) types de droites forment :

- l'angle 1? ....
- l'angle 2? ....
- l'angle 3? ....

L'angle 1 est formé par deux sécantes, l'angle 2 par deux tangentes et l'angle 3 par une sécante et une tangente.

? Nommez le seul angle extérieur sur le jeu de Bruno de la figure 1.8. Il s'agit de $\angle$BGD.

Le dernier type d'angle a son sommet sur le cercle; cet angle est appelé un **angle inscrit**.

Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet est situé sur le cercle. Il est formé de deux cordes ou d'une corde et d'une tangente au cercle.

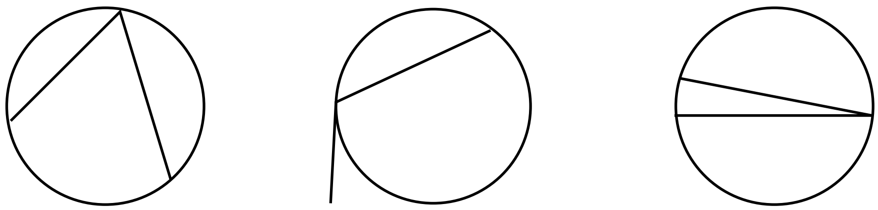


Fig. 1.12 Angles inscrits

Sur la figure 1.8, nous retrouvons plusieurs angles inscrits, entre autres, tous les angles qui ont pour sommet A, B, C, D et E.

? Dans la figure suivante, dites si les angles sont intérieurs, au centre, extérieurs ou inscrits.

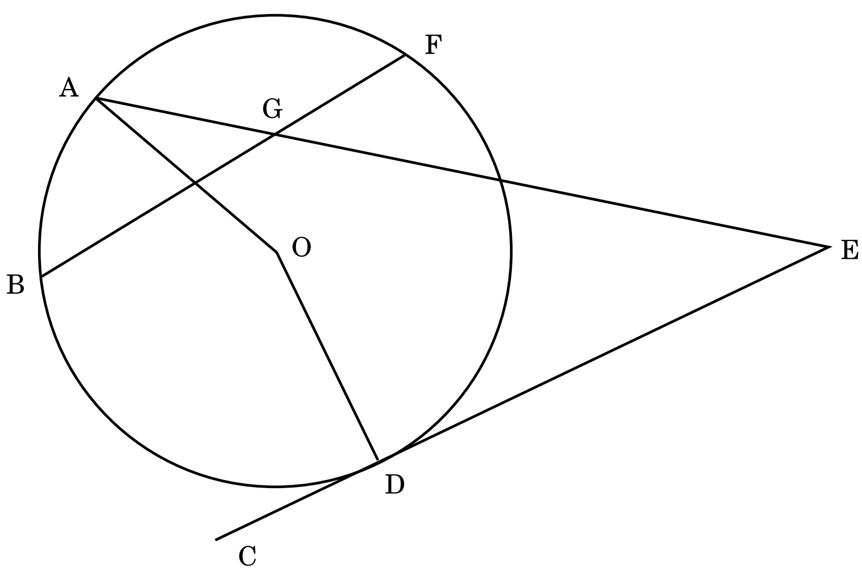


Fig. 1.13 Différents angles par rapport au cercle

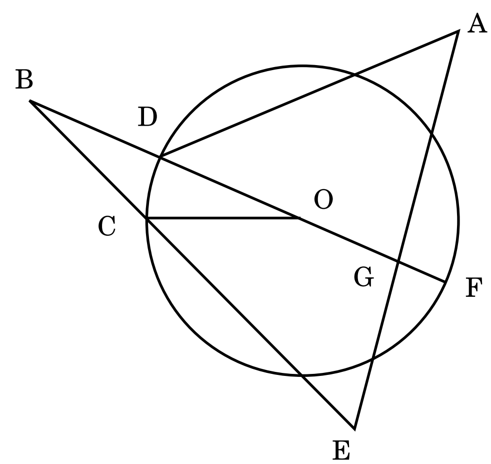
1. ∠AOD .... 2. ∠AED ....
3. ∠CDO .... 4. ∠OAE ....
5. ∠AGF ....

Vérifiez vos réponses et votre compréhension!

1. ∠AOD est un angle intérieur et, de plus, un angle au centre, car son sommet est au centre du cercle.
2. ∠AED est un angle extérieur : son sommet est à l'extérieur du cercle et il est formé d'une sécante et d'une tangente.
3. ∠CDO est un angle inscrit, car son sommet est sur le cercle.
4. ∠OAE est un angle inscrit : son sommet est sur le cercle.
5. ∠AGF est un angle intérieur : son sommet est à l'intérieur du cercle.

Exercice 1.2

Sur la figure ci-dessous, nommez :



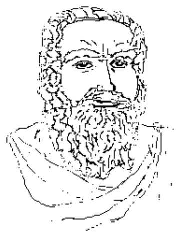
a) tous les angles au centre. ....

b) tous les angles intérieurs. ....

c) tous les angles inscrits. ....

d) tous les angles extérieurs. ....

Après toutes ces définitions, nous avons bien droit à un petit moment de répit, n'est-ce pas?



Saviez-vous que…

…, si étrange que cela puisse paraître, il existe un moyen de calculer la valeur de π en laissant tomber une épingle sur le sol? Il faut que celui-ci soit recouvert d'un plancher dont les lames aient toutes la même largeur.

Prenez un objet mince, un cure-dents ou, encore mieux, une aiguille dont la longueur soit égale à la largeur des lames du parquet et laissez-la tomber de nombreuses fois. Notez le nombre de fois où vous la jetez et le nombre de fois où elle tombe sur une rainure.

Doublez le chiffre des lancements, puis divisez-le par le nombre de chutes sur une rainure. Le résultat sera égal à la valeur de π. Par exemple, si vous laissez tomber l'aiguille 100 fois et qu'elle tombe sur une rainure 62 fois, divisez 200 par 62. Le résultat est environ 3,2, ce qui ne nous donne pas une valeur bien exacte de π. Mais plus vous laisserez tomber l'aiguille souvent, plus vous vous rapprocherez de la valeur exacte!

Comment expliquer un tel phénomème? Lorsque vous lâchez la petite tige de métal, ce qui fait qu'elle se place ou non en travers d'une rainure, c'est l'endroit où tombe son centre et la manière dont la droite (que figure l'aiguille) a tourné autour de celui-ci. Or, quand l'aiguille tourne autour de son centre, elle décrit un cercle et c'est pourquoi π, qui a un rapport direct avec la mesure de la circonférence, en a un aussi avec les chances qu'a l'épingle de rencontrer une rainure.

Le mathématicien Buffon avait étudié ce problème au XVIII^{e} siècle et fait faire de nombreuses expériences à ce sujet.

Sceptiques? À vos aiguilles!

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Qui suis-je?

   a) Je suis la plus grande corde du cercle. ....

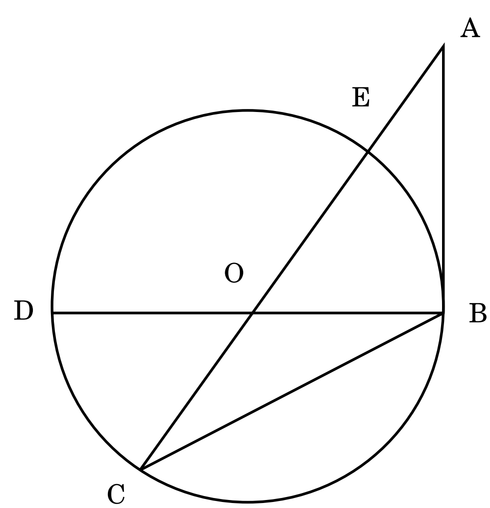
   b) Je suis la droite qui touche le cercle en un seul point. ....

   c) Je suis un angle formé par deux tangentes. ....

   d) Je suis un segment de droite dont les deux extrémités sont sur le cercle. ....

   e) Je ne suis pas un segment, mais mes deux extrémités sont sur le cercle. ....

2. Examinez la figure suivante et répondez aux questions.



a) Le segment OE s'appelle ....

b) La droite AB s'appelle..

c) La droite AC s'appelle..

d) Le point B s'appelle..

e) L'angle DBC est un angle ....

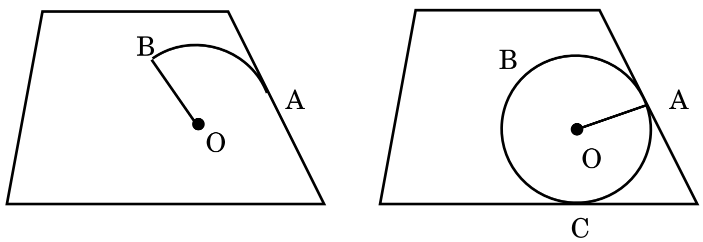
f) L'angle BAC est un angle ....

g) L'angle DOA est un angle..

h) Le segment BC est ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Pour construire le jeu de fléchettes, nos amis se sont installés dans l'atelier. Bruno a pris un bout de ficelle pour dessiner le cercle. À une extrémité, il a attaché un clou et, à l'autre, un crayon qui servira à tracer le cercle. «Laisse, papa, je vais le faire!», s'exclame Karine.



À quel élément du cercle associez-vous :

a) le clou? ....

b) le trait laissé par le crayon? ....

c) la ficelle? ....

d) les points A et C?..

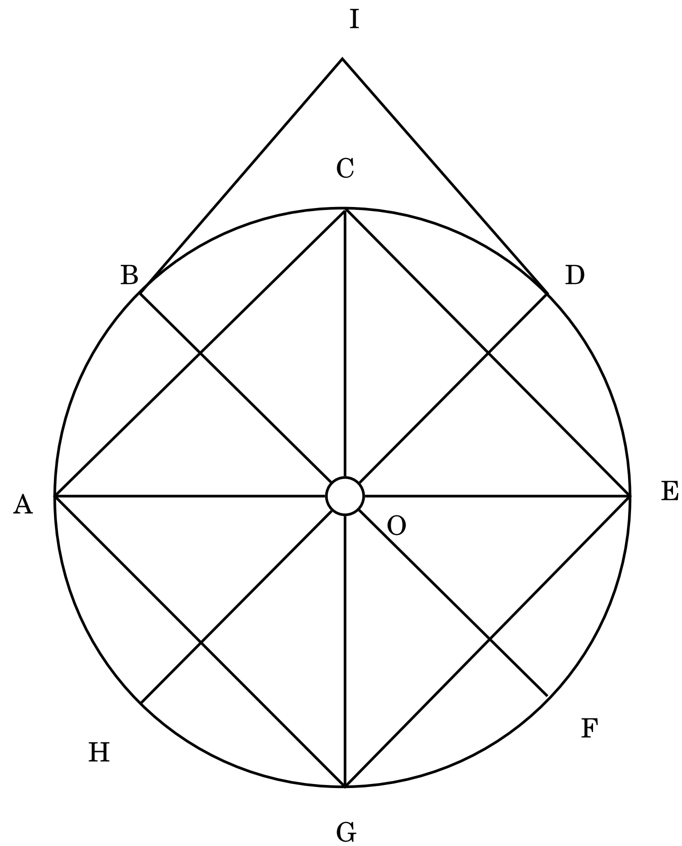
e) les points sur le cercle entre B et C? ....

2. Après que Karine eut tracé le cercle et que Bruno l'ait découpé, Frédéric trace les lignes qui délimiteront les différentes régions afin de compter les points. Bruno suspend ensuite le jeu sur la porte du garage. « Si vous êtes d'accord, explique-t-il, les points seront accordés de la façon suivante.

- Si la fléchette touche le centre : 25 points.
- Si la fléchette est dans un triangle formé par un angle inscrit, un angle au centre et un angle intérieur : 15 points.
- Si la fléchette est entre une corde autre que le diamètre et un arc : 10 points.
- Si la fléchette touche un point de tangence : 3 points.

- Si la fléchette est à l'extérieur du cercle mais entre deux tangentes : 2 points. »

Inscrivez, avec le plus de précision possible, les points accordés sur le croquis de Bruno.



1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

La multiplication des régions

En combien de régions pouvons-nous diviser un cercle si nous y traçons une corde, deux cordes, trois cordes, quatre cordes, etc.?

Le problème comprend deux solutions selon que toutes nos cordes sont des diamètres ou qu'aucune de nos cordes n'est un diamètre.

Dans le cas où toutes les cordes sont des diamètres, la solution est simple et la figure ci-dessous nous permet de la visualiser partiellement.

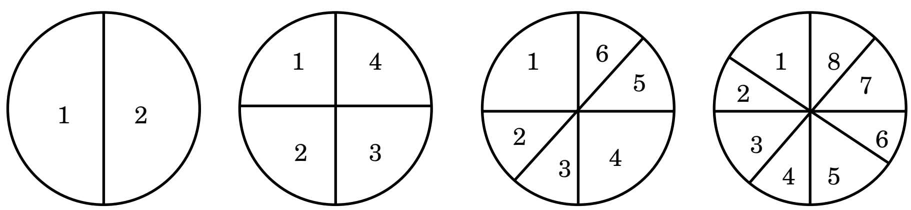


Fig. 1.14 Régions engendrées par des diamètres

Nous nous rendons compte qu'à toutes les fois que nous ajoutons un diamètre, le nombre de régions est additionné de deux.

? Si nous ajoutons un cinquième et un sixième cercle avec un diamètre de plus à chaque fois, combien de régions aurons-nous?

....

En effet, nous obtenons 10 régions pour 5 diamètres et 12 régions pour 6 diamètres.

? Et si maintenant nous traçons 12 diamètres, combien (sans les tracer!) de régions différentes aurons-nous?

....

Si vous avez trouvé 24 régions sans tracer les diamètres, c'est la bonne réponse! Si vous les avez tracés, il est évident que la difficulté consiste à compter les régions!

? Quelle formule mathématique nous permet de trouver une solution quel que soit le nombre de diamètres tracés?

....

La formule est tout simplement $x = 2n$ où x représente le nombre de régions et n, le nombre de diamètres. Si, par exemple, nous avons 15 diamètres (n), nous aurons 2(15) régions (x) ou 30 régions!

Nous verrons un peu plus loin la deuxième partie de la solution de ce problème!