MAT-5107-2

Fonctions et équations exponentielles et logarithmiques

sofad

MAT-5107-2

FONCTIONS ET ÉQUATIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

sofad

Coordonnateur des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteur : Serge Dugas

Mise à jour : Line Régis
Catherine Paris

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Alain Malouin

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseures linguistiques : Francine Cardinal
Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Première impression : 2007

Dépôt légal — 2007
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN 978-2-89493-306-0

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

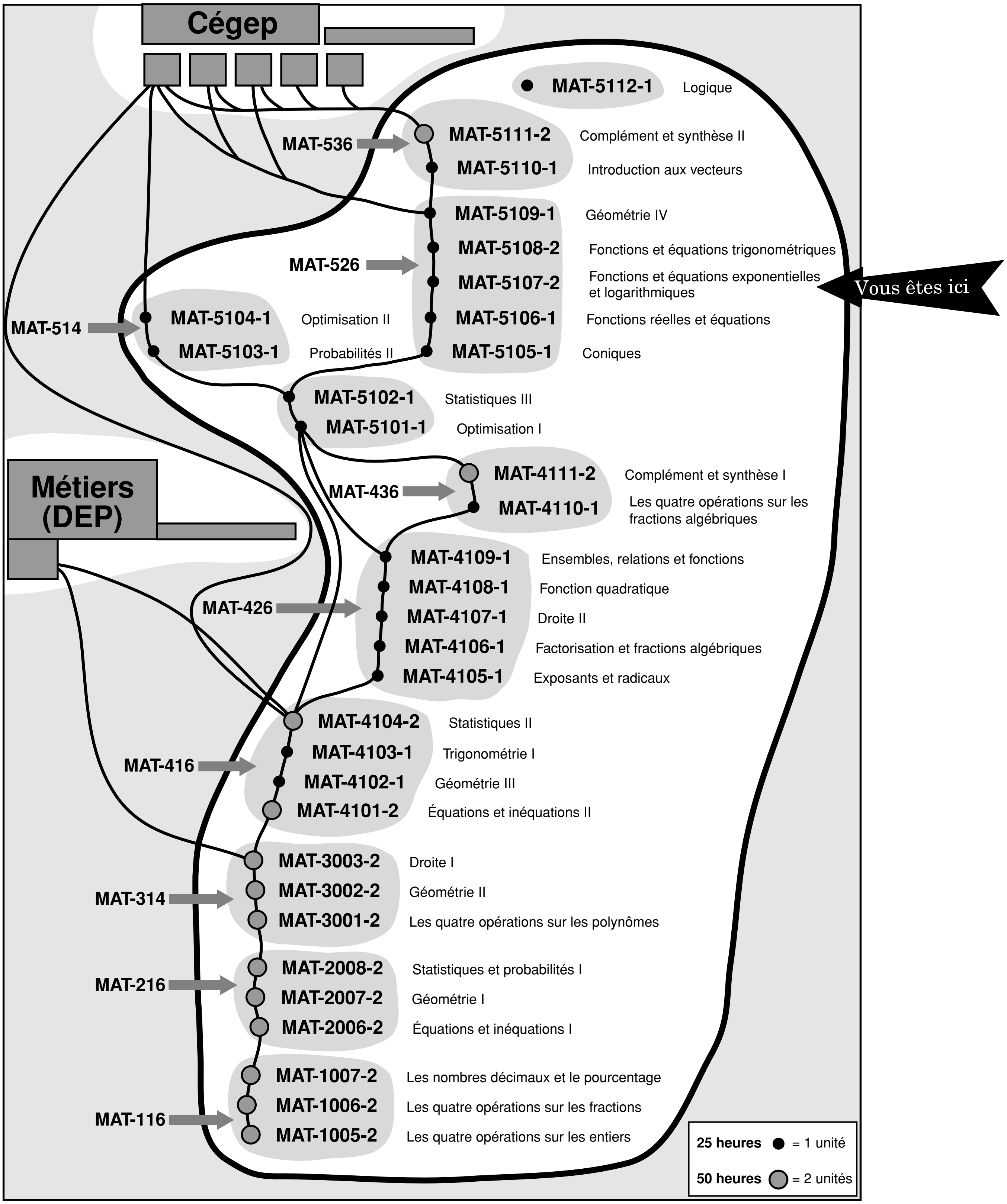
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

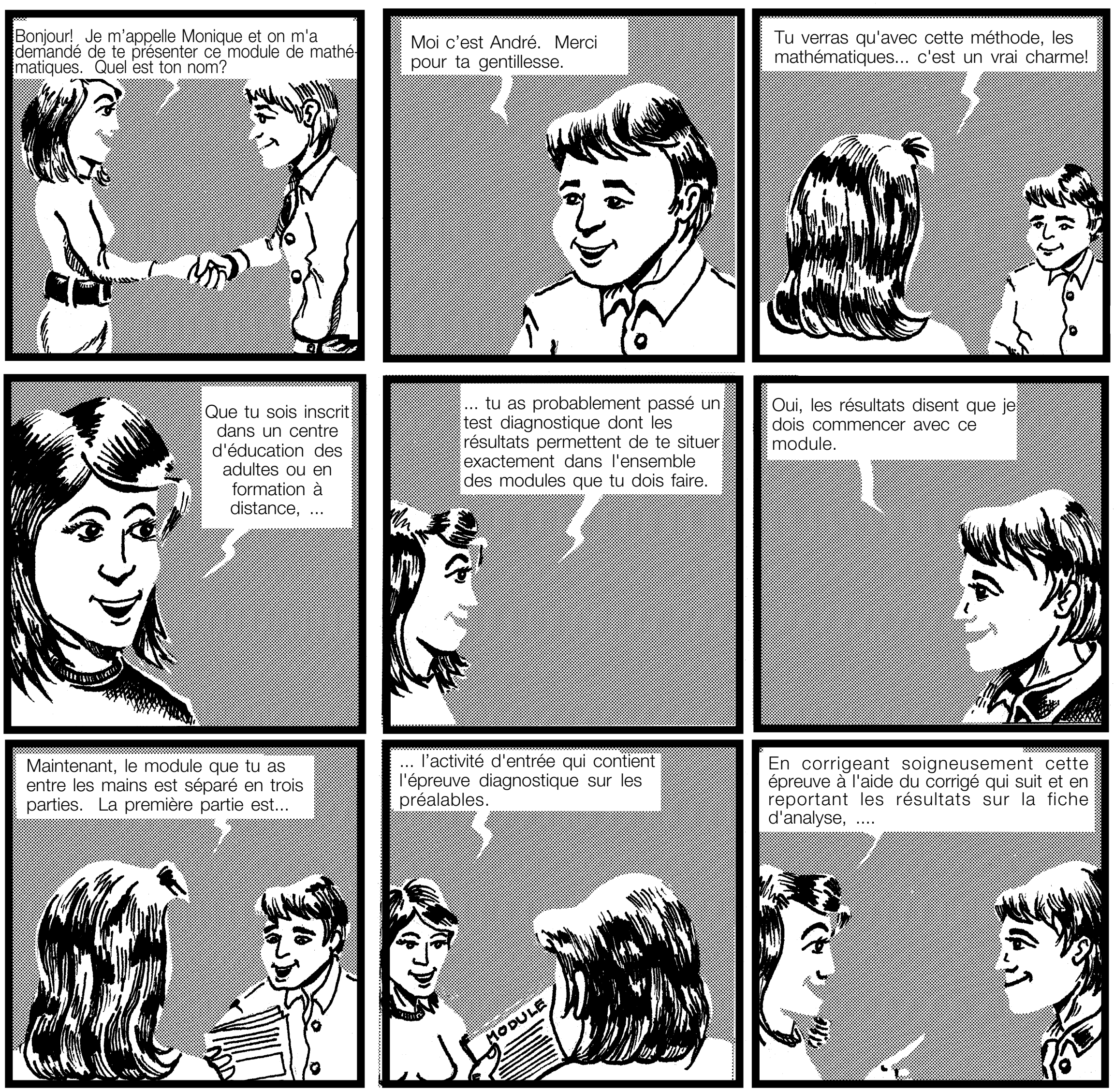
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE



DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Vous avez apprivoisé lors de vos cours précédents les notions de relations et de fonctions. Vous avez d'ailleurs appris à représenter graphiquement certaines de ces dernières : linéaire, quadratique, valeur absolue, partie entière, racine carrée, etc. et vous avez ainsi pu déterminer leurs différentes caractéristiques.

Le présent cours vous fera découvrir deux nouvelles fonctions liées intimement l'une à l'autre : la fonction exponentielle et la fonction logarithmique. Le mot « exponentiel » ne vous est probablement pas inconnu : il fait référence au mot « exposant ». Quant à la fonction logarithmique, vous apprendrez que c'est en fait la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

En plus de représenter graphiquement ces deux fonctions et de déterminer leurs caractéristiques propres, nous verrons les diverses lois qui régissent le calcul exponentiel et logarithmique et nous apprendrons à calculer le logarithme d'un nombre à l'aide de la calculatrice.

Enfin, nous apprendrons à résoudre des équations exponentielles et logarithmiques avant de nous attaquer à des problèmes relatifs à ces deux fonctions.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5107-2 comporte neuf sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractère gras.

Objectifs	Nombre d'heures*	% (évaluation)
1	3	10 %
2	2	10 %
3	2	10 %
4	3	10 %
5	2	10 %
6	3	20 %
7	4	10 %
8	2	10 %
9	3	20 %

* Une heure est réservée pour l'évaluation finale.

1. Représentation graphique d'une fonction exponentielle

Représenter graphiquement une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$. Déterminer les caractéristiques de la fonction et les liens qui existent entre la variation d'un paramètre de la règle et la transformation du graphique cartésien correspondant.

2. Règle d'une fonction exponentielle

Trouver la règle d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = \pm c^x + k$ à partir de données pertinentes ou à partir de son graphique. Les données pertinentes ou le graphique doivent comporter l'équation de l'asymptote ou les coordonnées d'un point dont l'abscisse est différente de 0.

3. Transformation d'une expression de la forme exponentielle à la forme logarithmique et vice versa

Transformer une expression donnée sous la forme exponentielle en une expression de la forme logarithmique et transformer une expression donnée sous la forme logarithmique en une expression de la forme exponentielle. Les expressions exponentielles sont de la forme $y = c^x$ et les expressions logarithmiques sont de la forme $y = \log_c x$.

4. Représentation graphique d'une fonction logarithmique

Représenter graphiquement une fonction logarithmique de la forme $f(x) = a\log_c b(x - h) + k$. Identifier l'asymptote sur le graphique et déterminer si la fonction est croissante ou décroissante. Trouver le domaine et l'image de cette fonction et les exprimer en compréhension ou sous forme d'intervalle. Déterminer les liens qui existent entre la variation d'un paramètre de la règle et la transformation du graphique cartésien correspondant.

5. Règle d'une fonction logarithmique

Trouver la règle d'une fonction logarithmique de la forme $f(x) = \log_c \pm(x - h)$ à partir de données pertinentes ou à partir de son graphique. Les données pertinentes ou le graphique doivent comporter l'équation de l'asymptote ou les coordonnées d'un point dont l'ordonnée est différente de 0.

6. Réciproque d'une fonction exponentielle et d'une fonction logarithmique

Trouver en compréhension la réciproque d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = \pm c^x + k$ ou d'une fonction logarithmique de la forme $f(x) = \log_c \pm(x - h)$.

7. Application des lois du calcul logarithmique

Réduire une expression logarithmique en appliquant les propriétés des logarithmes. Transformer une expression de la forme exponentielle en une expression de la forme logarithmique ou, à l'inverse, transformer une expression de la forme logarithmique en une expression de la forme exponentielle. Les expressions exponentielles sont présentées sous la forme $y = c^x$ et les expressions logarithmiques sont présentées sous la forme $y = \log_c x$. Calculer la valeur d'un logarithme en base 10, en base e et en tout autre base. Démontrer et appliquer les propriétés des logarithmes qui suivent :

- $\log_c 1 = 0$
- $\log_c c = 1$
- $\log_c c^n = n$
- $\log_c M^n = n \bullet \log_c M$
- $\log_{\frac{1}{c}} M = -\log_c M$
- $\log_c M = \dfrac{\log_a M}{\log_a c}$
- $\log_c (M \bullet N) = \log_c M + \log_c N$
- $\log_c \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_c M - \log_c N$

dans lesquelles $M, N, c \in R$ et c 1.

L’expression donnée ne doit pas comprendre plus de trois termes numériques ou algébriques : chacun des termes est un logarithme ou un nombre à exprimer sous forme de logarithme. La réduction peut exiger une factorisation simple de polynômes. Le résultat est une expression logarithmique réduite à sa plus simple expression ou une valeur numérique.

8. Résolution d’équations exponentielles ou logarithmiques

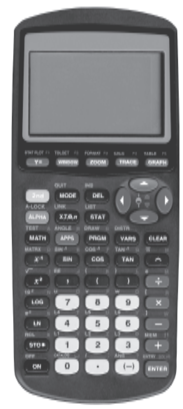
Résoudre une équation exponentielle dans laquelle les deux membres de l’équation peuvent s’exprimer dans la même base. Résoudre une équation exponentielle dans laquelle les deux membres de l’équation ne sont pas les puissances d’une même base. Les exposants des bases sont des nombres ou des expressions algébriques de degré 1. Résoudre une équation logarithmique dans laquelle chaque membre de l’équation peut être ramené à une expression qui contient un seul logarithme, et ce, en utilisant les propriétés des logarithmes. L’équation donnée ne doit pas comprendre plus de trois termes. Un des membres de l’équation peut contenir une expression algébrique de degré 2.

9. Résolution de problèmes relatifs aux fonctions exponentielles et logarithmiques

Résoudre des problèmes nécessitant l’application des notions liées aux fonctions exponentielles ou logarithmiques. La résolution peut exiger de trouver la règle, de tracer le graphique, de déterminer certaines caractéristiques de la fonction et de déduire certains renseignements selon le contexte. La règle est donnée s’il s’agit d’une fonction logarithmique.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes



1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.

3° Ayez en main une règle graduée en centimètres et en millimètres.

4° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

5° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

6° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

7° Vos réponses devront être exactes pour être acceptées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

8° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

9° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

10° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. La relation $\mathcal{R}$ est définie par la forme propositionnelle « ... *est plus petit ou égal à* ... » dans un produit cartésien A × B dans lequel A = {1, 2, 6} et B = {0, 2, 7}.

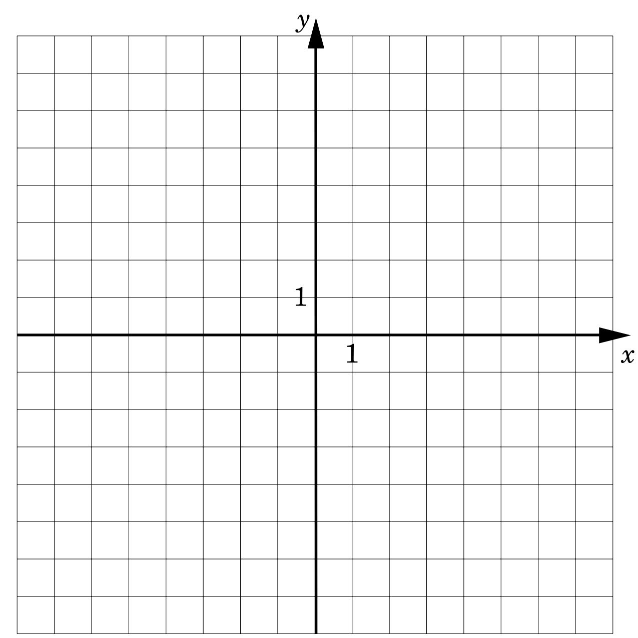
   a) Donnez les couples de A × B. ....

   b) Décrivez $\mathcal{R}$ en extension. ....

   c) Décrivez dom $\mathcal{R}$. ....

   d) Décrivez ima $\mathcal{R}$. ....

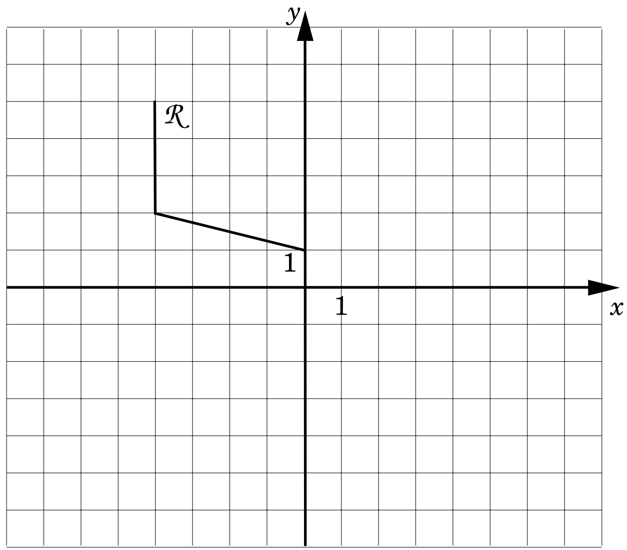
   e) Représentez cette relation sur un graphique cartésien.



2. Trouvez les relations réciproques des relations décrites ci-dessous.

   a) $\mathcal{R}$ = {(1, 4), (3, 7), (6, 9)} ....

b)



3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.

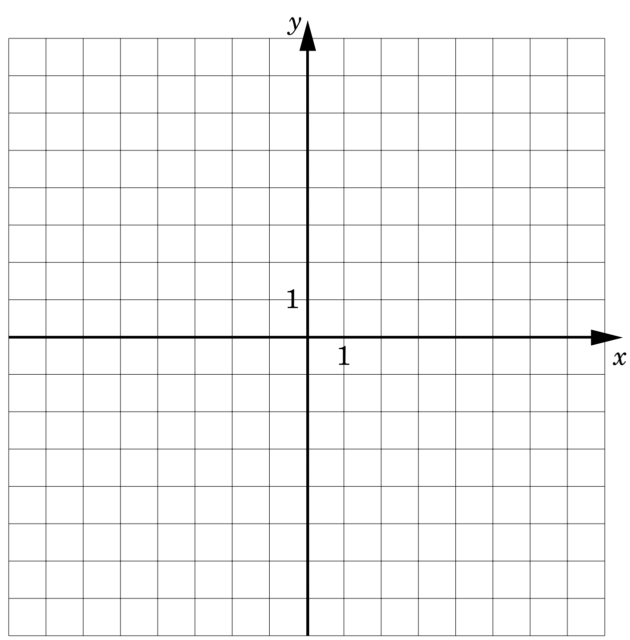
   a) Quel est le nom de cette fonction? ....

   b) Quel est son ensemble de départ? ....

   c) Quel est son ensemble d'arrivée? ....

   d) Calculez $f(4)$. ....

   e) Représentez la fonction f sur le graphique cartésien ci-contre.



4. Soit A = {1, 4, 9, 16}, B = {0, 1, 2, 3} et une fonction g : A → B définie par les couples {(1, 1), (4, 2), (9, 3)}.

 a) Quel est l'ensemble de départ de g? ....

 b) Quel est son ensemble d'arrivée? ....

 c) Trouvez dom g. ....

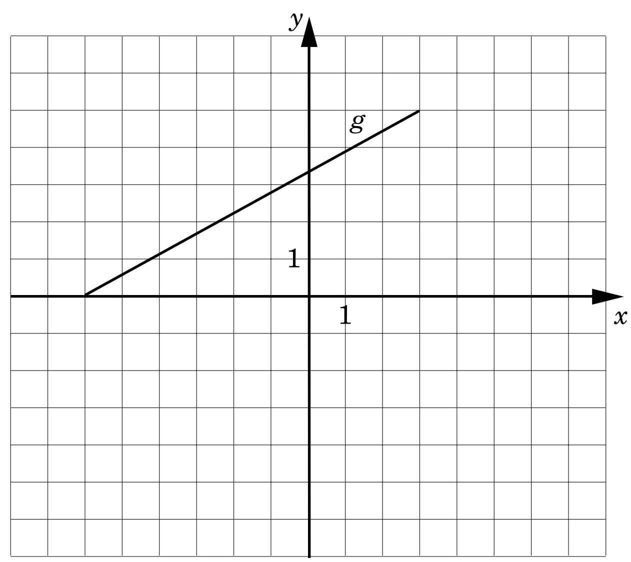
 d) Trouvez ima g. ....

5. Trouvez les réciproques des fonctions suivantes.

 a) f : A → B, f = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)}

 ....

 b)



 c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 5x - 4$

 ....

 ....

 ....

6. Appliquez les lois des exposants adéquates afin de simplifier les expressions exponentielles suivantes. Exprimez-les avec des exposants positifs.

   a) $9^3 \times 3^2$

   b) $(4^5 \times 32^{-2} \times 3)^2$

   c) $\dfrac{8^2}{4^5 \times 2^{-2}}$

   d) $\left(\dfrac{2^4 \times 27^2}{8^{-2}x^2}\right)^{-3}$

e) $\left(\dfrac{3^2a^4b \times 5^{-2}ca^3}{9^2c^{-3}b^4 \times 25^3a^{-2}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

....

....

....

....

....

....

7. Transformez les expressions suivantes en une expression de forme exponentielle affectée d'un exposant de signe positif.

a) $\sqrt[3]{125^2}$ = ...

b) $36^{-3}\sqrt[3]{6^9}$ = ...

c) $9^3\sqrt{\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-4}}$ = ...

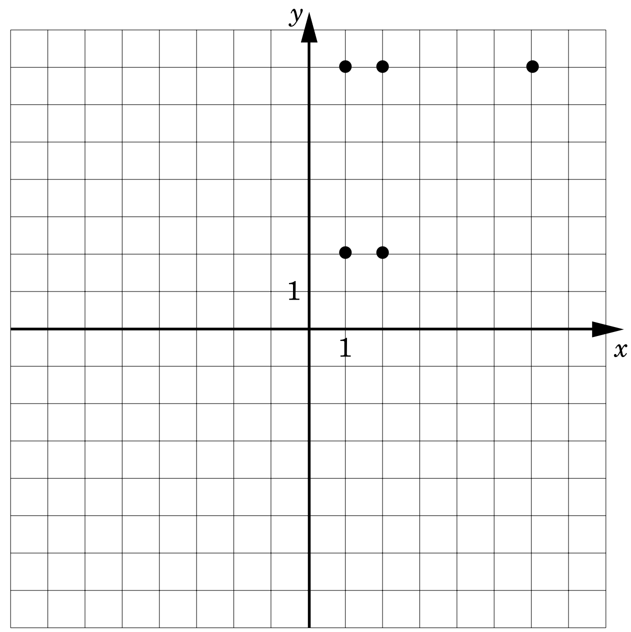
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 7), (2, 0), (2, 2), (2, 7), (6, 0), (6, 2), (6, 7)\}$

   b) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 7), (2, 2), (2, 7), (6, 7)\}$

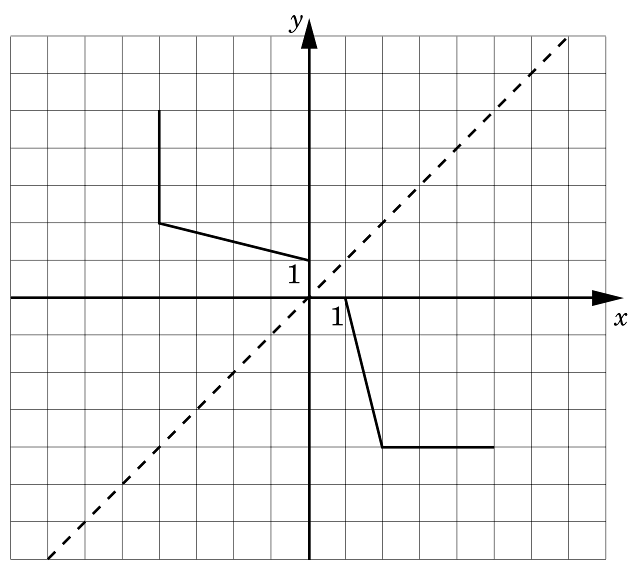
   c) Dom $\mathcal{R} = \{1, 2, 6\}$ d) Ima $\mathcal{R} = \{2, 7\}$

   e)



2. a) $\mathcal{R}^{-1} = \{(4, 1), (7, 3), (9, 6)\}$

   b)



3. a) Fonction f b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}$

d) $f(4) = -2(4) + 3 = -8 + 3 = -5$

e) $y = -2x + 3$

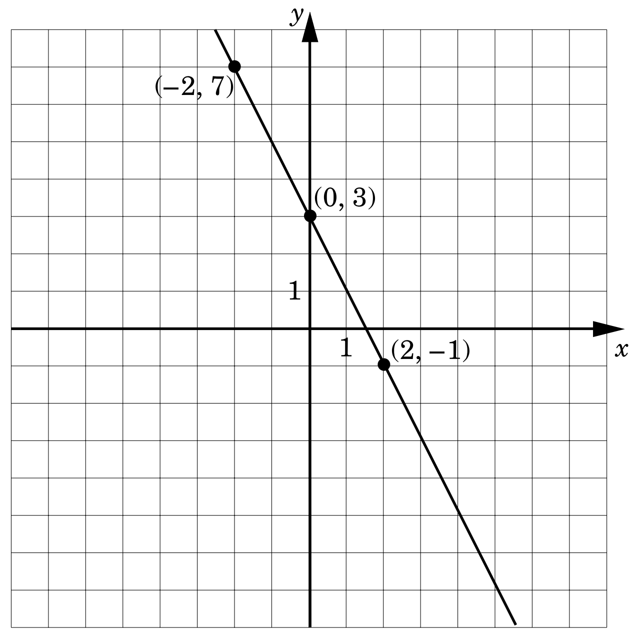
- $x = -2$

  $y = -2(-2) + 3 = 4 + 3 = 7$
- $x = 0$

  $y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
- $x = 2$

  $y = -2(2) + 3 = -4 + 3 = -1$

x	-2	0	2
y	7	3	-1

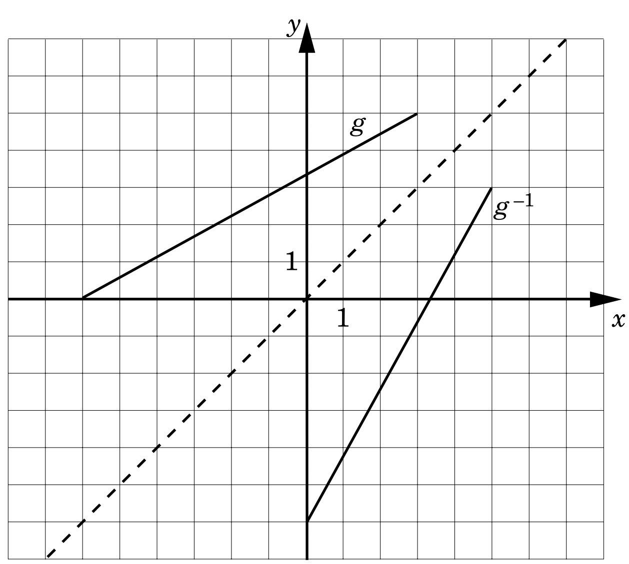


4. a) A = {1, 4, 9, 16} b) B = {0, 1, 2, 3}

c) Dom g = {1, 4, 9} d) Ima g = {1, 2, 3}

5. a) $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

b)



c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=5x-4$

$$\begin{aligned} h(x) &= 5x-4 \\ y &= 5x-4 \\ x &= 5y-4 \\ -5y &= -x-4 \\ 5y &= x+4 \\ y &= \frac{x+4}{5} \\ h^{-1}(x) &= \frac{x+4}{5} \end{aligned}$$

6. a) $9^3\times 3^2=(3^2)^3\times 3^2=3^6\times 3^2=3^8$

b) $(4^5\times 32^{-2}\times 3)^2=((2^2)^5\times(2^5)^{-2}\times 3)^2=(2^{10}\times 2^{-10}\times 3)^2=$
$(2^{10-10}\times 3)^2=(2^0\times 3)^2=(1\times 3)^2=3^2$

c) $\dfrac{8^2}{4^5\times 2^{-2}}=\dfrac{(2^3)^2}{(2^2)^5\times 2^{-2}}=\dfrac{2^6}{2^{10}\times 2^{-2}}=\dfrac{2^6}{2^8}=2^{6-8}=2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}$

d) $\left(\dfrac{2^4\times 27^2}{8^{-2}x^2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{2^4\times(3^3)^2}{(2^3)^{-2}x^2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{2^4\times 3^6}{2^{-6}x^2}\right)^{-3}=\left(\dfrac{2^{10}\times 3^6}{x^2}\right)^{-3}=$

$\left(\dfrac{x^2}{2^{10}\times 3^6}\right)^3=\dfrac{x^6}{2^{30}\times 3^{18}}$

e) $\left(\dfrac{3^2a^4b\times 5^{-2}ca^3}{9^2c^{-3}b^4\times 25^3a^{-2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{3^2\times 5^{-2}\times a^9c^4}{(3^2)^2\times(5^2)^3\times b^3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{3^2\times 5^{-2}\times a^9c^4}{3^4\times 5^6\times b^3}\right)^{-\frac{2}{3}}=$

$\left(\dfrac{a^9c^4}{3^2\times 5^8\times b^3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{3^2\times 5^8\times b^3}{a^9c^4}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{3^{\frac{4}{3}}\times 5^{\frac{16}{3}}\times b^2}{a^6c^{\frac{8}{3}}}$

7. a) $\sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2$

b) $36^{-3}\sqrt[3]{6^9} = (6^2)^{-3} \times 6^{\frac{9}{3}} = 6^{-6} \times 6^3 = 6^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$ ou $\dfrac{1}{2^3 \times 3^3}$

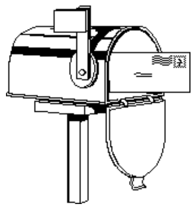
c) $9^3\sqrt{\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-4}} = (3^2)^3\sqrt{(3^3)^4} = 3^6\sqrt{3^{12}} = 3^6 \times 3^6 = 3^{12}$

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
b)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
c)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
d)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
e)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
2. a)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
b)			10.1	10.4	Sous-modules 1 à 9
3. a)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
b)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
c)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
d)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
e)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
4. a)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
b)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
c)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
d)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
5. a)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
b)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
c)			10.2	10.17	Sous-modules 1 à 9
6. a)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
b)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
c)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
d)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
e)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
7. a)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
b)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9
c)			10.3	10.34	Sous-modules 1 à 9

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5107-2 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à votre tutrice ou à votre tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5107-2 comprend **trois** devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à la mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

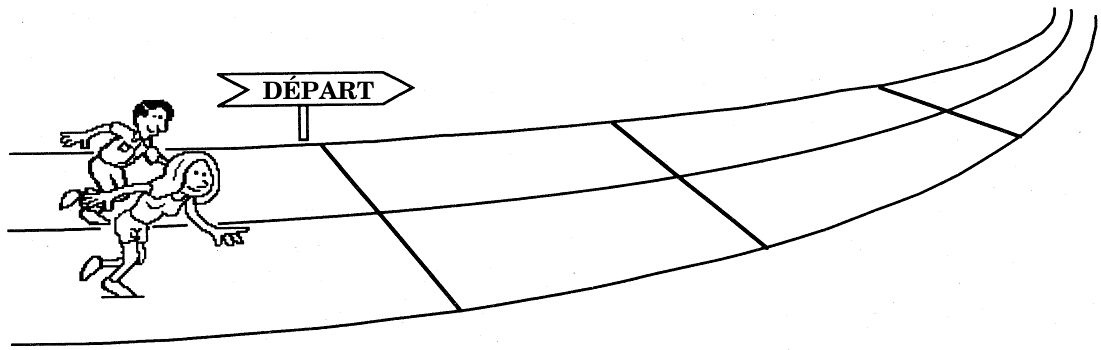
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, s'il y a lieu.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 5.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 6 à 9.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 9.

ATTESTATION D'ÉTUDES

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

La puissance des obligations

Lors d'une récente émission d'obligations d'épargne du Québec, le gouvernement offrait un rendement de 7 % composé annuellement. Maïka, qui a travaillé tout l'été dernier, a 2 000,00 $ à placer et elle se demande combien son placement lui rapportera si elle revend ses obligations dans 3, 10, 15 ou même 20 ans. Munie de sa calculatrice et d'un bout de papier, elle commence alors à effectuer les calculs suivants.

- Capital initial 2 000,00 \$
- Après 1 an :
  2 000 \$ + 2 000 \$ $\times$ 0,07 = 2 000 \$ + 140 \$ = 2 140,00 \$
- Après 2 ans :
  2 140 \$ + 2 140 \$ $\times$ 0,07 = 2 140 \$ + 149,80 \$ = 2 289,80 \$
- Après 3 ans :
  2 289,80 \$ + 2 289,80 \$ $\times$ 0,07 = 2 289,80 \$ + 160,29 \$ = 2 450,09 \$

Maïka se rend bien vite à l'évidence : ses calculs seront longs et, à la moindre erreur, elle sera obligée de les vérifier de nouveau! Elle se demande s'il n'existe pas une formule qui lui permette d'obtenir rapidement la réponse à sa question.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de représenter graphiquement une *fonction exponentielle*, de déterminer les caractéristiques de la fonction et les liens qui existent entre la variation d'un paramètre de la règle et la transformation du graphique cartésien correspondant.

Vous vous doutez bien qu'il existe une telle formule. Les gens d'affaires, les comptables et les banquiers, entre autres, n'ont sûrement pas à manipuler quotidiennement des montagnes de chiffres pour déterminer le rendement des placements de leurs clients.

Maïka a rencontré le gérant de sa Caisse populaire, M. Jasmin, qui s'est fait un plaisir de lui donner la formule convoitée!

$$f(x) = 2\,000 \times 1{,}07^{x}$$

« Mais c'est une ***fonction***! » de s'exclamer, surprise, Maïka! Elle se rappelle alors des cours qu'elle a suivis sur les fonctions.

rappel

*Une fonction est une **relation** qui fait correspondre des éléments de l'ensemble de départ à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.*

« La fonction que je viens de te donner, Maïka, est une fonction appelée **fonction exponentielle** puisque la variable x, qui représente ici le nombre d'années, est un exposant. Le montant d'argent que tu accumuleras, $f(x)$, est fonction du nombre d'années x pendant lesquelles tu garderas tes obligations. Reprends ta feuille de calculs et applique ma formule, tu verras! »

Pour calculer l'exactitude de la formule de M. Jasmin, Maïka reprend les calculs faits pour les trois premières années en remplaçant successivement x par 1, 2 et 3.

$$f(x) = 2\,000\ \$ \times 1{,}07^x$$
$$f(1) = 2\,000\ \$ \times 1{,}07^1 = 2\,140{,}00\ \$$$
$$f(2) = 2\,000\ \$ \times 1{,}07^2 = 2\,289{,}80\ \$$$
$$f(3) = 2\,000\ \$ \times 1{,}07^3 = 2\,450{,}09\ \$$$

« Fantastique! de s'exclamer Maïka. Je peux alors, sans faire de calculs fastidieux, calculer directement combien j'aurai d'argent dans 20 ans en remplaçant x par 20! »

$$f(20) = 2\,000\ \$ \times 1{,}07^{20} = 7\,739{,}37\ \$$$

Nul doute que notre amie Maïka a envie d'en savoir plus sur les fonctions exponentielles!

Soit f, une fonction de la forme suivante.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto c^x$$

Alors, $f(x) = c^x$ est appelée **fonction exponentielle de *base*** c et d'exposant x dans laquelle c est une fraction positive ou un entier positif et $c \neq 1$. La fonction exponentielle peut aussi être notée $f(x) = \exp_c x$.

Nous pouvons également noter la fonction en ***compréhension***, soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = c^x\}$ qui se lit : A est l'ensemble des couples (x, y) appartenant au produit cartésien de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}$ tel que $y = c^x$.

Exemple 1

$f(x) = 2^x$ est une fonction exponentielle de base 2.
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est une fonction exponentielle de base $\frac{1}{2}$.
$f(x) = \exp_4 x$ est une fonction exponentielle de base 4.
$f(x) = 3^x$ est équivalent à $f(x) = \exp_3 x$.

Remarques

1. La fonction exponentielle est une fonction réelle, car les ensembles de départ et d'arrivée sont dans $\mathbb{R}$.

2. $c \neq 1$. En effet, si $c = 1$, alors $f(x) = 1^x = 1$, quelle que soit la valeur de x. Donc, $f(x) = 1^x$ est la fonction constante $f(x) = 1$.

3. $c > 0$. En effet, la fonction exponentielle n'est toujours définie que lorsque la base est positive. Par exemple, nous ne pouvons écrire $f(x) = (-2)^{\frac{1}{2}}$, car $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

Voyons maintenant comment représenter graphiquement une fonction exponentielle.

Exemple 2

Représentons graphiquement la fonction définie par $f(x) = 2^x$ ou encore $f(x) = \exp_2 x$. Pour ce faire, nous donnons différentes valeurs à x et nous trouvons les valeurs correspondantes pour $f(x)$ arrondies au millième près.

$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

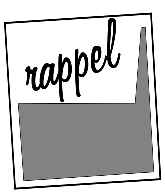
$f(0) = 2^0 = 1$

$f(1) = 2^1 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 2^3 = 8$

$f(4) = 2^4 = 16$

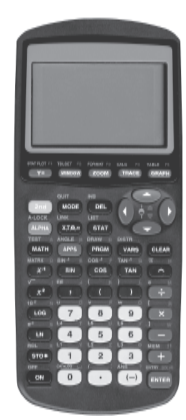


La calculatrice nous permet de trouver facilement la valeur d'un nombre affecté d'un ***exposant****. Par exemple, pour calculer 2^{-3}, nous entrons la séquence suivante.*

2 y^x 3 $^+/_-$ =

OU

À l'aide de la calculatrice graphique, il suffit de faire ce qui suit.



Y =

CLEAR autant de fois qu'il est nécessaire.

2 ∧ X, T, Ø, n

2nd TABLE (GRAPH) pour la table.

Nous obtenons ainsi la table de valeurs suivante.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Chacun de ces couples est ensuite représenté dans le graphique cartésien par un point. Nous pouvons remplacer x par chacun des éléments de l'ensemble des nombres réels et trouver ainsi une infinité de couples. En joignant ces points, nous obtenons une courbe ininterrompue. Notez que, plus nous choisissons de couples, plus la précision du graphique est grande.

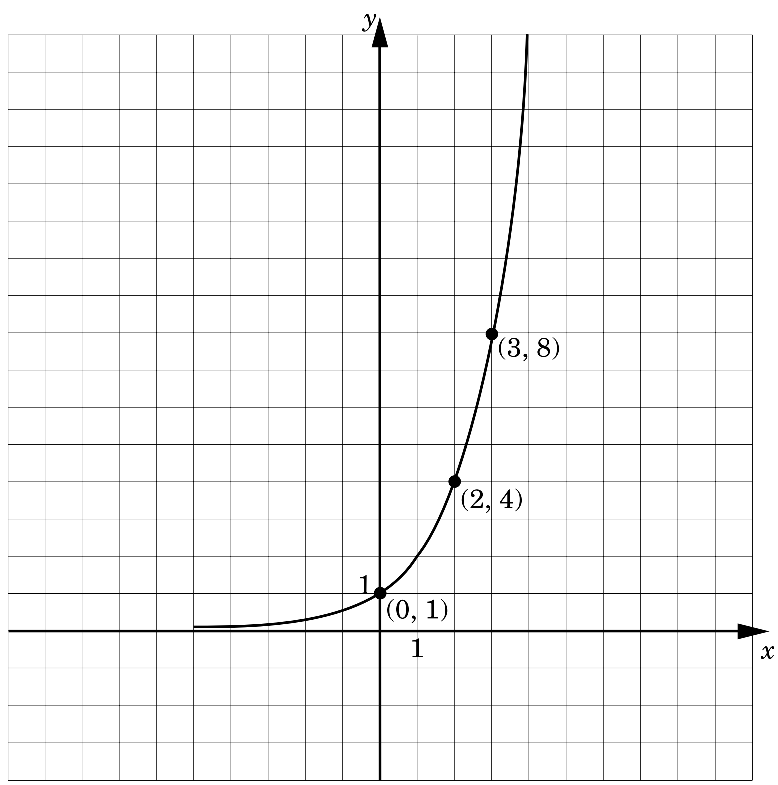


Fig. 1.1 Représentation graphique de $f(x) = 2^x$

Vérifiez avec votre calculatrice graphique à partir de la touche GRAPH.

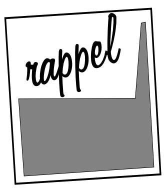
Qu'y a-t-il de remarquable dans ce graphique?

- Nous voyons d'abord que la courbe tend vers l'axe des x sans jamais y toucher. En effet, même si nous donnons des valeurs de plus en plus petites à x, jamais $f(x)$ ne prendra la valeur 0.

$$f(-6) = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0{,}016$$

$$f(-10) = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024} = 0{,}001$$

Nous disons alors que la droite d'équation $y = 0$, soit l'axe des x, est une ***asymptote*** à la courbe de la fonction.



Une droite est une asymptote à une courbe lorsque la distance entre la courbe et la droite diminue constamment et tend vers 0 sans jamais l'atteindre.

- La courbe de la fonction passe par le point (0, 1). Le nombre 1 est alors appelé ***ordonnée à l'origine***, c'est-à-dire la valeur de $f(x)$ lorsque $x = 0$. Nous pouvons même conclure immédiatement que toute fonction de forme $f(x) = c^x$ aura comme ordonnée à l'origine 1 puisque $c^0 = 1$.

- Les points de la fonction sont dans les quadrants I et II seulement puisque c^x est évidemment toujours un nombre positif.

- Le ***domaine*** de la fonction est $\mathbb{R}$.

- L'***image*** de la fonction est]0, ∞, car la courbe ne touche pas l'asymptote.

- La fonction est ***croissante***, car pour les couples (0, 1) et (2, 4) de la fonction, si $x_1 < x_2$ $(0 < 2)$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(1 \leq 4)$.

Vérifions ces caractéristiques avec un deuxième exemple.

Exemple 3

Traçons la courbe de la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

1° Trouvons quelques couples de la fonction.

$f(-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$

$f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3^1 = 3$

$f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$

$f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

$f(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9} = 0{,}111$

$f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1}{27} = 0{,}037$

2° Établissons une table de valeurs.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	9	3	1	0,333	0,111	0,037

3° Reportons ces points sur un graphique cartésien et joignons-les par une courbe.

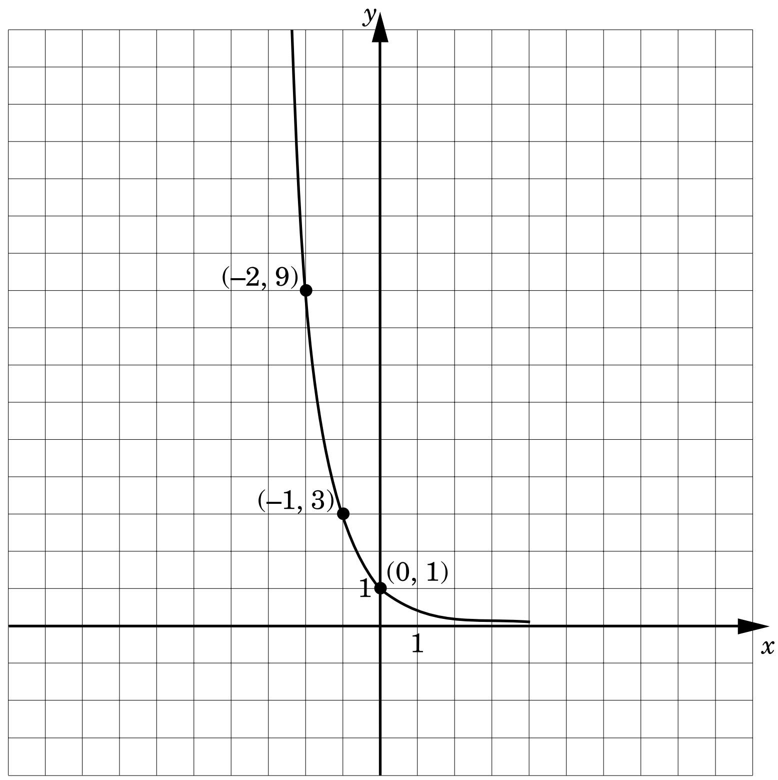


Fig. 1.2 Représentation graphique de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Les caractéristiques de la fonction précédente peuvent-elles s'appliquer à cette dernière fonction? Vérifions!

- L'asymptote est l'axe des x ou la droite d'équation $y = 0$.
- La courbe passe par le point (0, 1).
- Le graphique de la fonction est situé encore une fois dans les quadrants I et II.
- Le domaine de la fonction est $\mathbb{R}$.
- L'image de la fonction est]0, ∞, car la courbe ne touche pas l'asymptote.

- La fonction est ***décroissante***, car pour les couples (–2, 9) et (–1, 3) de la fonction, si $x_1 < x_2$ $(-2 < -1)$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(9 \geq 3)$.

Comme vous l'avez peut-être remarqué, le domaine d'une fonction exponentielle est $\mathbb{R}$ et son image est toujours définie en fonction de l'asymptote de son graphique.

Soit une fonction exponentielle définie par l'équation $f(x) = c^x$.

Dom $f = \mathbb{R}$ ou $-\infty, \infty$.

Ima $f = \{y \in \mathbb{R}\ y > 0\}$ ou $]0, \infty$.

Regardons de plus près ce qui détermine la croissance et la décroissance d'une fonction exponentielle.

De façon générale, nous pouvons déterminer la croissance ou la décroissance d'une fonction en se basant sur deux de ses couples.

Soit les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

- Une fonction est croissante si $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 \leq y_2$.
- Une fonction est décroissante si $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2$.

À l'aide des graphiques des quelques fonctions déjà tracées et des quelques autres ci-après, nous pouvons déterminer les conditions de croissance ou de décroissance des fonctions exponentielles.

Examinez attentivement les graphiques ci-dessous.

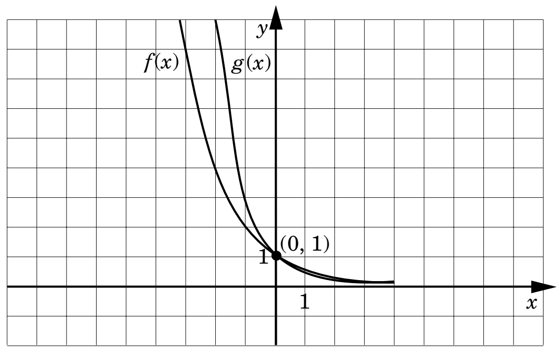


Fig. 1.3 Représentation graphique des fonctions $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

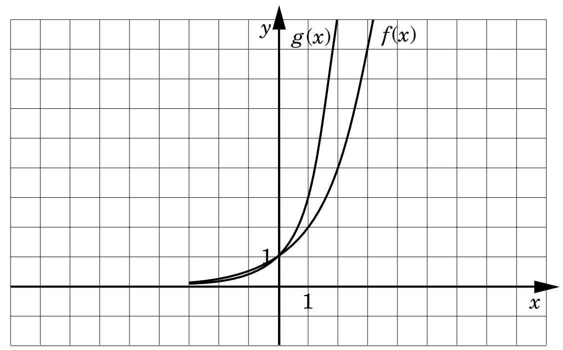


Fig. 1.4 Représentation graphique des fonctions $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3^x$

? Les fonctions de la figure 1.3 sont-elles croissantes ou décroissantes?

....

? Que pouvez-vous dire de la base de ces fonctions? ....

....

Réponses

Ces fonctions sont décroissantes et leur base est comprise entre 0 et 1.

? Les fonctions de la figure 1.4 sont-elles croissantes ou décroissantes?

....

? Que pouvez-vous dire de la base de ces fonctions? ....

....

Réponses

Ces fonctions sont croissantes et leur base est supérieure à 1.

Soit une fonction exponentielle définie par l'équation $f(x) = c^x$.

- La fonction est décroissante si $0 < c < 1$.
- La fonction est croissante si $c > 1$.

Exemple 4

Soit une fonction exponentielle f passant par les points (0, 1) et (2, 36). Déterminons si elle est croissante ou décroissante.

Soit $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = 36$. Puisque $x_1 < x_2$ $(0 < 2)$ et que $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(1 \leq 36)$, alors la fonction est croissante.

? Déterminez si la fonction passant par (0, 1) et $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ est croissante ou décroissante.

....

....

....

Réponse

Soit $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = \frac{1}{4}$. Puisque $x_1 < x_2$ $(0 < 1)$ et que $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\left(1 \geq \frac{1}{4}\right)$, alors la fonction est décroissante.

Soit une fonction exponentielle de base définie par l'équation $f(x) = c^x$. Alors :

- l'asymptote de la courbe est l'axe des x ou la droite d'équation $y = 0$;
- la courbe passe par le point $(0, 1)$;
- le graphique est situé dans les quadrants I et II;
- dom $f = \mathbb{R}$;
- ima $f =]0, \infty$.

Vous n'avez pas nécessairement à mémoriser ces quelques caractéristiques pour tracer la courbe d'une fonction exponentielle, mais leur connaissance sera un atout dans votre compréhension de fonctions exponentielles un peu plus élaborées.

Pour tracer le graphique d'une fonction exponentielle définie par l'équation $f(x) = c^x$, nous devons :

1° trouver quelques couples de la fonction en donnant à x des valeurs et en calculant $f(x)$;

2° établir une table de valeurs des couples $(x, f(x))$;

3° reporter ces points sur un graphique cartésien et les joindre par une courbe.

Voilà! À vous de jouer maintenant!

Exercice 1.1

1. Soit une fonction exponentielle définie par $f(x) = 4^x$. Calculez la valeur des expressions suivantes. Arrondissez vos résultats au millième près, s'il y a lieu.

   a) $f(-2) =$ .... b) $f(0) =$ ....

   c) $f(1) =$ .... d) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ....

2. Dites si les couples suivants font partie de la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = \exp_5 x$.

   a) (1, 5) ....

   b) (−2; −0,25) ....

   c) (0,5; 0,04) ....

   d) (0, 1) ....

   e) (−1; 0,2)...

3. Dites si les équations suivantes sont des fonctions exponentielles. Sinon, dites pourquoi.

   a) $f(x) = 10^x$ ....

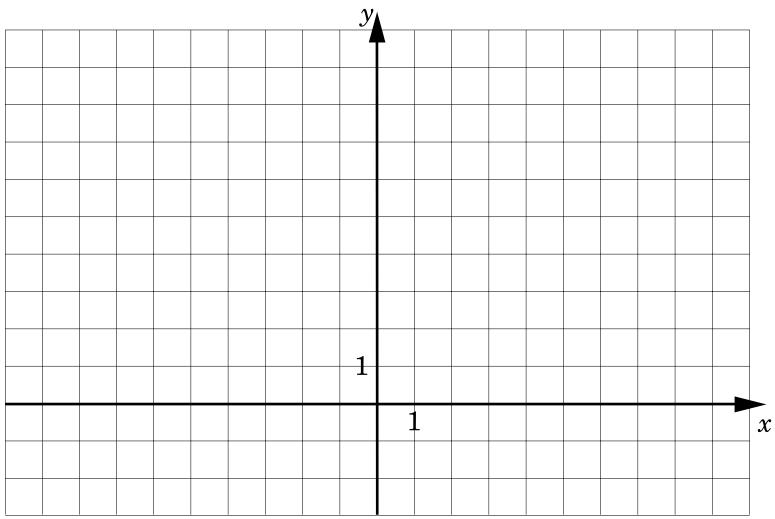
   b) $f(x) = (-10)^x$ ....

   c) $f(x) = \exp_{10} x$...

4. En complétant les tables de valeurs, représentez graphiquement les fonctions exponentielles suivantes. De plus, identifiez trois points de chaque courbe sur le graphique dont l'ordonnée à l'origine.

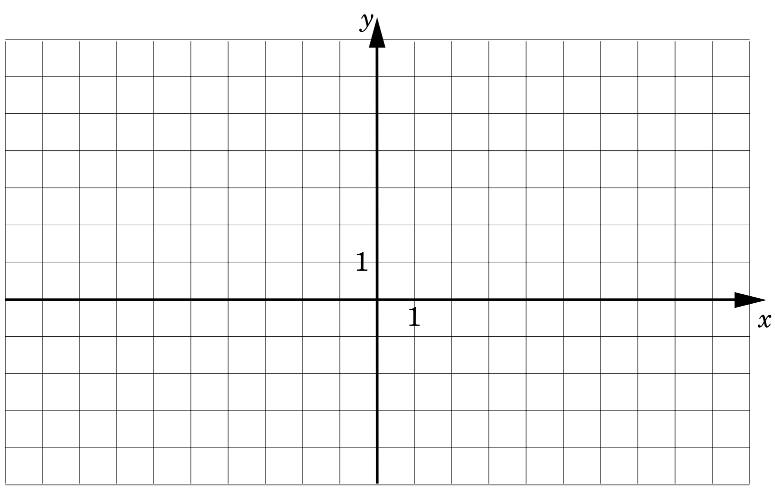
a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



b) $f(x) = \exp_3 x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



5. Quel est le domaine et l'image des fonctions exponentielles ci-dessous? De plus, dites si elles sont croissantes ou décroissantes.

a) $f(x) = 9^x$

- Dom f = ...
- Ima f = ...
- ....

b) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

- Dom g = ...
- Ima g = ...
- ....

c) $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

- Dom h = ...
- Ima h = ...
- ....

d) $k(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

- Dom k = ...
- Ima k = ...
- ....

6. Soit deux fonctions définies par $h(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ et par $g(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^x$.

a) Quel est le domaine de ces fonctions? ....

b) Quelle est leur image? ....

c) Quelle est l'équation de leur asymptote? ....

d) Laquelle de ces fonctions est décroissante? ....

e) Laquelle de ces fonctions est croissante? ....

7. Déterminez si les fonctions exponentielles passant par les points ci-dessous sont croissantes ou décroissantes. Justifiez votre réponse.

a) (0, 1) et $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ ....

....

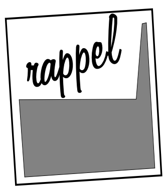
....

b) $(0, 1)$ et $\left(1, \dfrac{6}{5}\right)$ ....

....

....

Maintenant que le tracé des fonctions exponentielles et leurs caractéristiques vous sont un peu plus familiers, nous allons poursuivre notre étude de ces fonctions en y ajoutant quelques ***paramètres***.



Un paramètre est un élément autre que la variable x qui varie dans une équation. Par exemple, dans la fonction linéaire $f(x) = mx + b$, m et b sont des paramètres.

Les fonctions exponentielles que nous verrons auront la forme $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$.

Les fonctions suivantes sont des fonctions exponentielles.

- $g(x) = 3^{x+2}$, où la base est 3, $h = -2$ et $k = 0$.
- $h(x) = 5^{x-1} + 2$, où la base est 5, $h = 1$ et $k = 2$.
- $k(x) = -2 \bullet 3^x - 5$ où la base est 3, $a = -2$, $h = 0$ et $k = -5$.
- $f(x) = 4^{3(x-2)} - 1$, où la base est 4, $b = 3$, $h = 2$ et $k = -1$.

Nous étudierons ces fonctions en les comparant avec la forme exponentielle que nous connaissons déjà, soit $f(x) = c^x$.

Comme dans toutes les autres fonctions, la forme de base peut être modifiée. Nous pouvons lui faire subir une ***translation*** ou un changement d'échelle. La forme canonique d'une fonction exponentielle représente bien la forme de base transformée.

La forme canonique d'une fonction exponentielle $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$ garde la même base c mais l'exposant devient $b(x - h)$.

Dans cette forme, nous avons ajouté les paramètres a, b, h et k qui ont tous une influence spécifique sur la courbe. Il importe que nous puissions reconnaître et comprendre l'influence de ces paramètres.

Commençons par voir ce que change à notre courbe l'ajout du paramètre a.

Rôle du paramètre a dans la fonction exponentielle

Exemple 5

Traçons la fonction définie par $g(x) = 2 \bullet 2^x$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $f(x) = 2^x$.

1° Trouvons quelques couples $(x, g(x))$.

- $g(-2) = 2 \times 2^{-2} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $g(-1) = 2 \times 2^{-1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$
- $g(0) = 2 \times 2^0 = 2 \times 1 = 2$

- $g(1) =$ ....
- $g(2) =$ ....
- $g(3) =$ ....

2° Établissons une table de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	0,5	1	2	4	8	16

3° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $f(x)$ et $g(x)$.

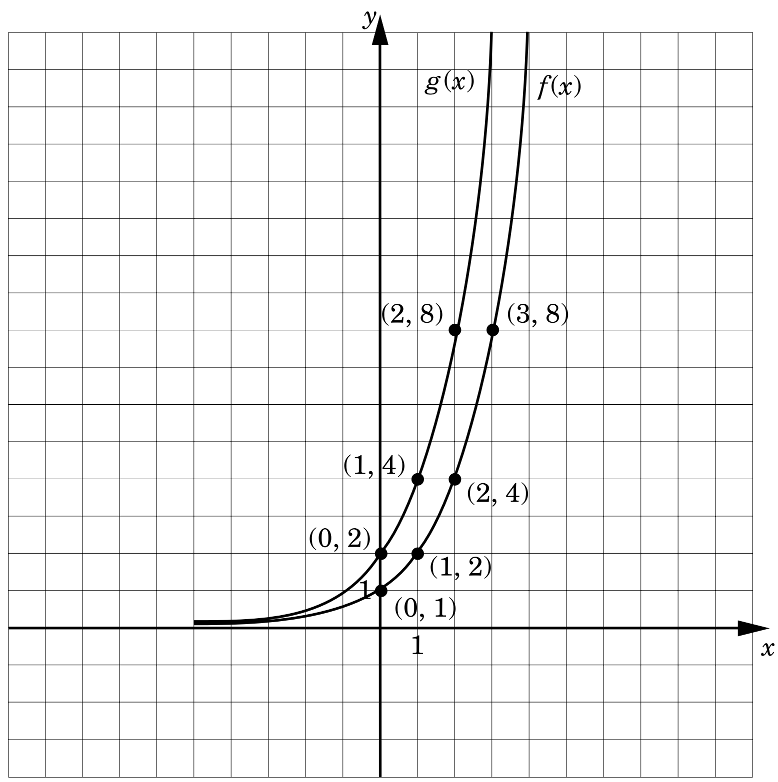


Fig. 1.5 Comparaison graphique de $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 2 \bullet 2^x$

Le seul changement notable est le suivant : la courbe de $g(x)$ est la même que celle de $f(x)$ déplacée vers le haut. Nous disons alors que la courbe a subi un changement d'échelle vertical.

? Que remarquez-vous en comparant les coordonnées des deux courbes?

....

....

....

....

....

(0, 1) est devenu $(0, 2 \times 1) = (0, 2)$.

(1, 2) est devenu $(1, 2 \times 2) = (1, 4)$.

(2, 4) est devenu $(2, 2 \times 4) = (2, 8)$.

L'ordonnée des couples de $f(x)$ est multipliée par 2, soit la valeur de a. Les couples (x, y) de $f(x)$ deviennent (x, ay) dans $g(x)$.

Voyons maintenant ce qui se passe si nous donnons à a une valeur négative.

Exemple 6

Traçons la fonction définie par $h(x) = -2 \bullet 2^x$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $g(x) = 2 \bullet 2^x$.

1° Trouvons quelques couples $(x, h(x))$.

- $h(-2) = -2 \times 2^{-2} = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$
- $h(-1) = -2 \times 2^{-1} = -2 \times \frac{1}{2} = -1$
- $h(0) = -2 \times 2^0 = -2 \times 1 = -2$

? • $h(1) =$ ....

? • $h(2) =$ ....

? • $h(3) =$ ....

2° Établissons une table de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	-8	-16

3° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $g(x)$ et $h(x)$.

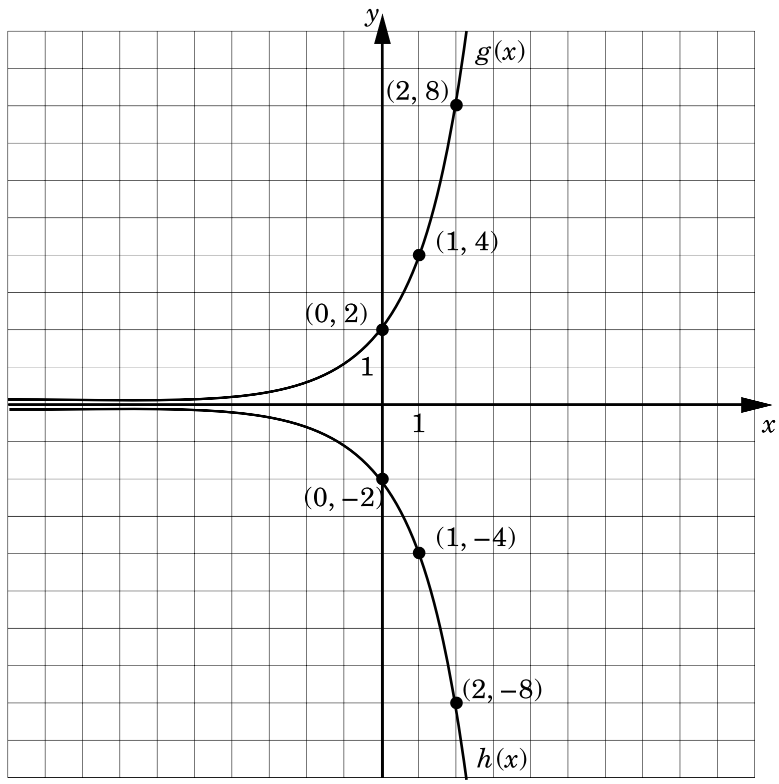


Fig. 1.6 Comparaison graphique de $g(x) = 2 \bullet 2^x$ et $h(x) = -2 \bullet 2^x$

Le seul changement notable est le suivant : la courbe de $h(x)$ est la même que celle de $g(x)$ mais située en dessous de l'axe des x. Nous disons alors que la courbe a subi une réflexion par rapport à l'asymptote et par le fait même, une inversion de la croissance de la fonction.

Rôle du paramètre b dans la fonction exponentielle

Exemple 7

Traçons la fonction définie par $i(x) = 2^{2x}$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $f(x) = 2^x$.

1° Établissons une table de valeurs à l'aide de la calculatrice graphique.

x	-2	-1	0	1	2	3
$i(x)$	0,063	0,25	1	4	16	64

2° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $f(x)$ et $h(x)$.

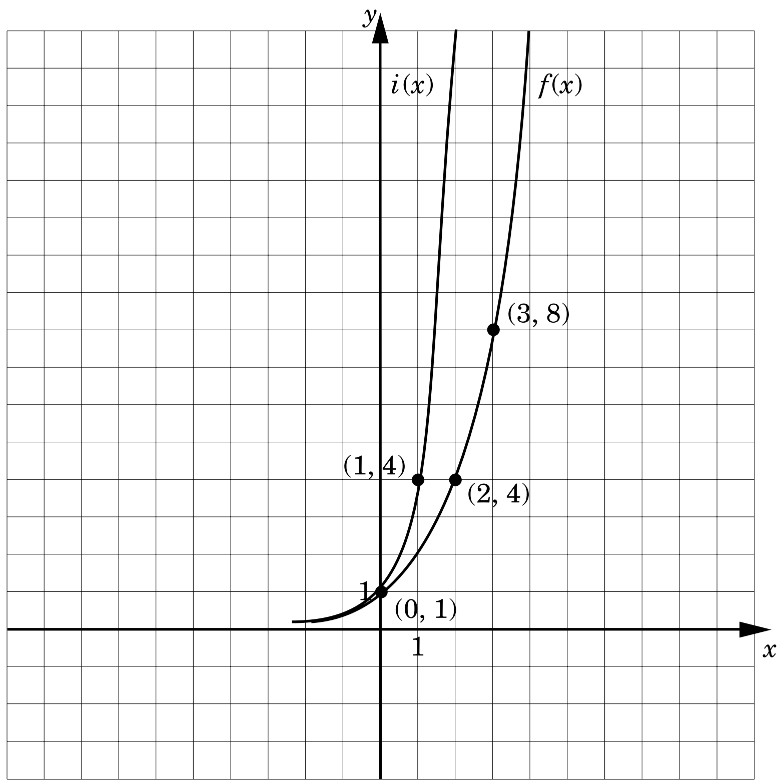


Fig. 1.7 Comparaison graphique de $f(x) = 2^x$ et $i(x) = 2^{2x}$

Nous constatons que la courbe a subi un changement d'échelle horizontal, c'est-à-dire que les abscisses sont divisées par 2. En effet,
(0, 1) devient (0 ÷ 2; 1) = (0, 1),
(2, 4) devient (2 ÷ 2; 4) = (1, 4),
(4, 16) devient (4 ÷ 2, 16) = (2, 16).

Les couples (x, y) de $f(x)$ deviennent $\left(\frac{x}{b}, y\right)$ dans $i(x)$.

Voyons maintenant ce qui se passe si nous donnons à b une valeur négative.

Exemple 8

Traçons la fonction définie par $j(x) = 2^{-2x}$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $i(x) = 2^{2x}$.

1° Établissons une table de valeurs à l'aide de la calculatrice graphique.

x	-2	-1	0	1	2	3
$j(x)$	16	4	1	0,25	0,063	0,016

2° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $i(x)$ et $j(x)$.

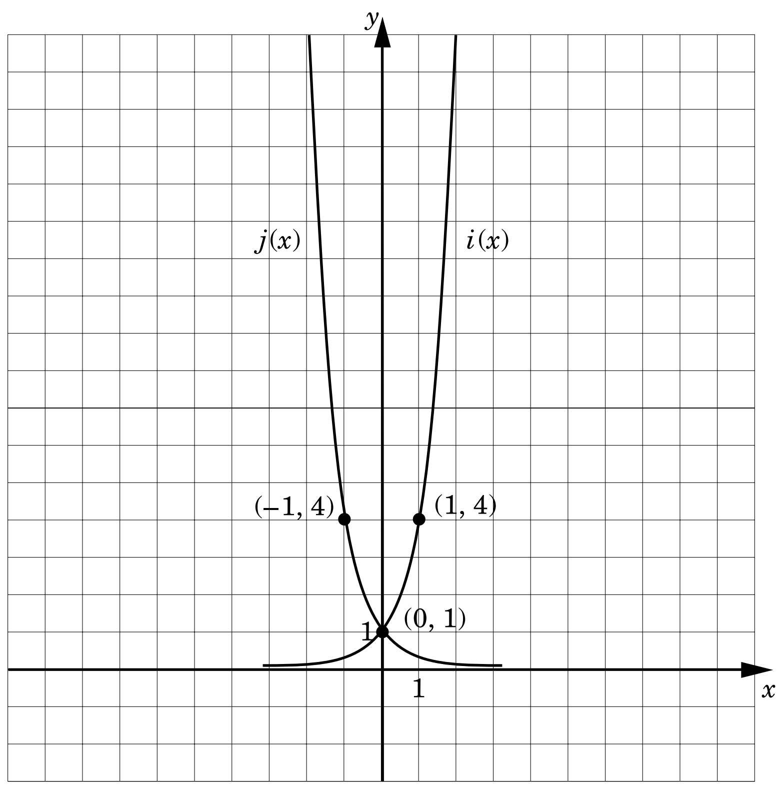


Fig. 1.8 Comparaison graphique de $i(x) = 2^{2x}$ et $j(x) = 2^{-2x}$

Le seul changement notable est le suivant : la courbe de $j(x)$ est la même que celle de $i(x)$, mais elle a subi une réflexion par rapport à l'axe vertical (axe des y) et par le fait même, une inversion de la croissance de la fonction.

Rôle du paramètre h dans la fonction exponentielle

Exemple 9

Traçons la fonction définie par $k(x) = 2^{x-3}$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $f(x) = 2^x$.

1° Établissons une table de valeurs à l'aide de la calculatrice graphique.

x	0	1	2	3	4	5	6
$k(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

2° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $f(x)$ et $i(x)$.

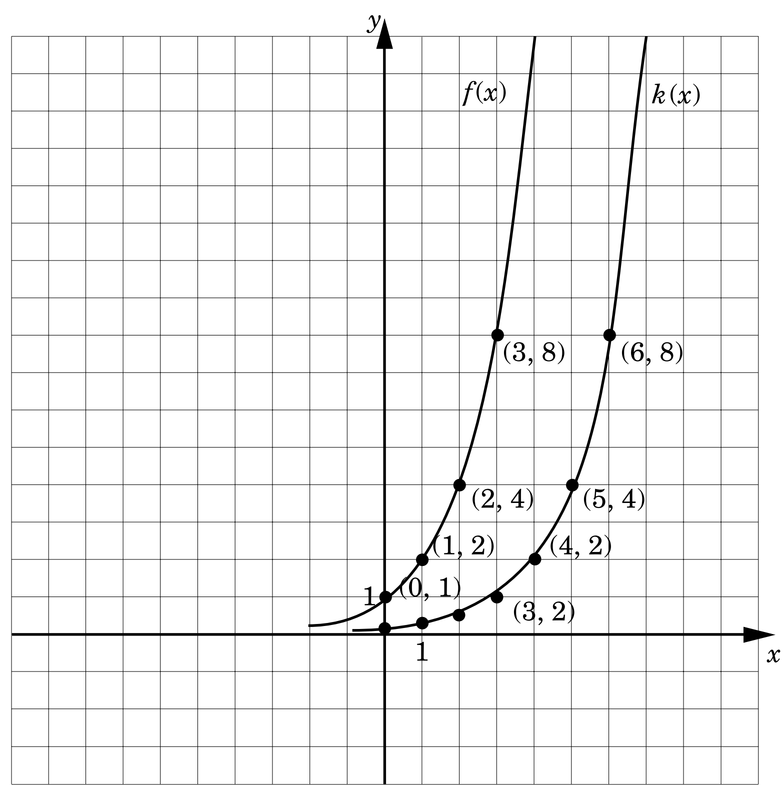


Fig. 1.9 Comparaison graphique de $f(x) = 2^x$ et $k(x) = 2^{x-3}$

Nous constatons que la courbe a subi une translation horizontale de 3 unités vers la droite. En effet,
(0, 1) devient (0 + 3, 1) = (3, 1),
(1, 2) devient (1 + 3, 2) = (4, 2),
(2, 4) devient (2 + 3, 4) = (5, 4).

Les couples (x, y) de $f(x)$ deviennent $(x + h, y)$ dans $k(x)$.

Rôle du paramètre *k* dans la fonction exponentielle

Exemple 10

Traçons la fonction définie par $l(x) = 2^x - 3$ et comparons sa représentation graphique avec celle de $f(x) = 2^x$.

1° Établissons une table de valeurs à l'aide de la calculatrice graphique.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$l(x)$	$-2{,}75$	$-2{,}5$	-2	-1	1	5	13

2° Reportons ces points sur un graphique cartésien, joignons-les par une courbe et comparons $f(x)$ et $l(x)$.

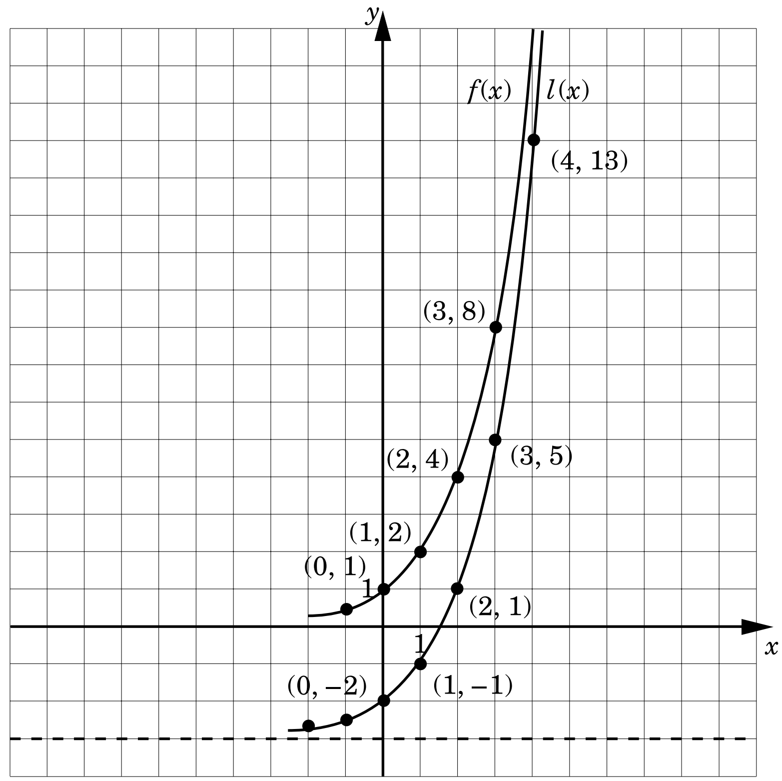


Fig. 1.10 Comparaison graphique de $f(x) = 2^x$ et $l(x) = 2^x - 3$

Nous constatons que la courbe a subi une translation verticale de 3 unités vers le bas. En effet,
(0, 1) devient (0, 1 – 3) = (0, –2),
(1, 2) devient (1, 2 – 3) = (1, –1),
(2, 4) devient (2, 4 – 3) = (2, 1).

Les couples (x, y) de $f(x)$ deviennent $(x, y + k)$ dans $l(x)$.

Résumons le rôle de chacun des paramètres.

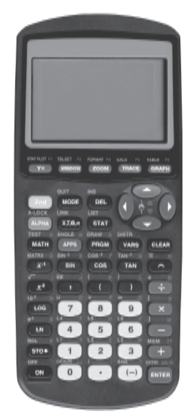
Soit $f(x) = c^x$ la fonction exponentielle de base et $g(x) = ac^{b(x-h)} + k$ sa forme canonique, alors les couples (x, y) de $f(x)$ deviennent $\left(\frac{x}{b} + h, ay + k\right)$ dans $g(x)$ où :

- a correspond à un changement d'échelle vertical, si a est négatif, réflexion par rapport à l'asymptote et inversion de la croissance;
- b correspond à un changement d'échelle horizontal, si b est négatif, réflexion par rapport à l'axe vertical et inversion de la croissance;
- h correspond à une translation horizontale;
- k correspond à une translation verticale.

Après avoir étudié de façon systématique le rôle des différents paramètres de la fonction exponentielle, attardons-nous maintenant sur ses différentes caractéristiques.

Exemple 11

Traçons le graphique de la fonction exponentielle $f(x) = 2 \bullet 2^{2(x-2)} - 5$ à l'aide de la calculatrice graphique.



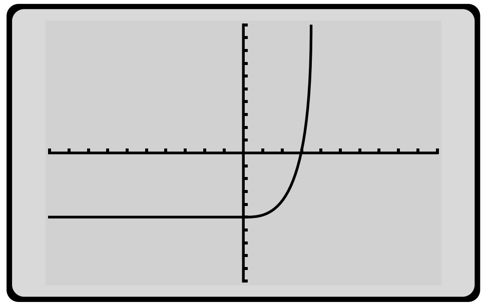
[Y=] [CLEAR] [2] [×] [2] [∧] [(] [2] [(] [X, T, Ø, *n*] [–] [2] [)] [)] [–] [5]

[2nd] [TABLE] (GRAPH)

X	Y1	
-2	-4.992	
-1	-4.969	
0	-4.875	
1	-4.5	
2	-3	
3	3	
4	27	

X=-2

GRAPH



Déterminez les caractéristiques suivantes.

- Équation de l'asymptote : ....
- Dom f = ...
- Ima f = ...
- Ordonnée à l'origine : ....
- Croissante ou décroissante avec justification : ....

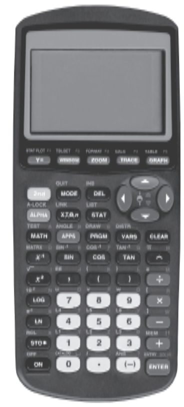
  ....

Solution

Cette fonction a une asymptote à $y = -5$ ($k = -5$), son domaine est $\mathbb{R}$, son image est $]-5, \infty$ et son ordonnée à l'origine est $-4{,}875$. De plus, elle est croissante. En effet, soit les points $(2, -3)$ et $(3, 3)$: $x_1 < x_2$ $(2 < 3) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(-3 \leq 3)$.

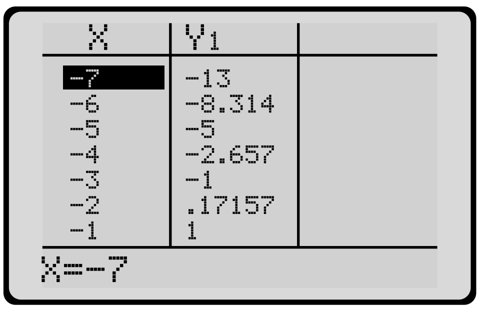
Exemple 12

Traçons le graphique de la fonction exponentielle $g(x) = -2 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(x+1)} + 3$ à l'aide de la calculatrice graphique.



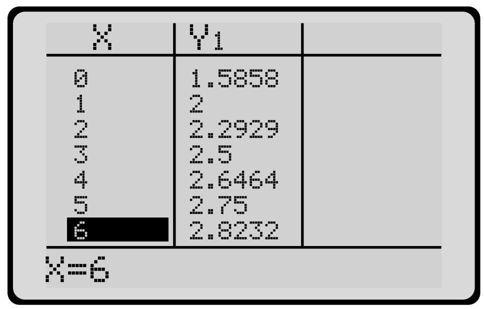
Y= CLEAR (–) 2 × 0.5 ∧ (0.5 (X, T, Ø, *n* + 1)) + 3

2nd TABLE (GRAPH)



X	Y1
-7	-13
-6	-8.314
-5	-5
-4	-2.657
-3	-1
-2	.17157
-1	1

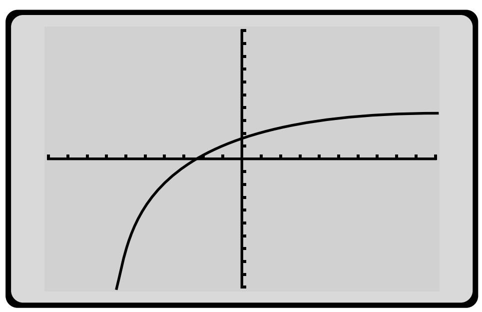
X=-7



X	Y1
0	1.5858
1	2
2	2.2929
3	2.5
4	2.6464
5	2.75
6	2.8232

X=6

GRAPH



Déterminez les caractéristiques suivantes.

- Équation de l'asymptote : ....
- Dom g = ...
- Ima g = ...
- Ordonnée à l'origine : ....

- Croissante ou décroissante avec justification : ....

....

Solution

Cette fonction a une asymptote à $y = 3$ ($k = 3$), son domaine est $\mathbb{R}$, son image est $-\infty, 3[$ et son ordonnée à l'origine est 1.5858. De plus, elle est croissante. En effet, soit les points $(-1, 1)$ et $(1, 2)$: $x_1 < x_2$ $(-1 < 1) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(1 \leq 2)$.

Comparons les différentes caractéristiques des courbes obtenues aux deux exemples. L'équation de chacune des asymptotes est déterminée par le paramètre k. Lorsque $a > 0$, la courbe est située au-dessus de l'asymptote et au-dessous si $a < 0$. L'image de f est $]k, \infty$ et celle de g est $-\infty, k[$. Les deux fonctions sont croissantes dans $\mathbb{R}$.

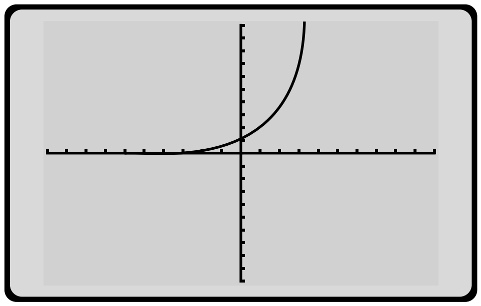
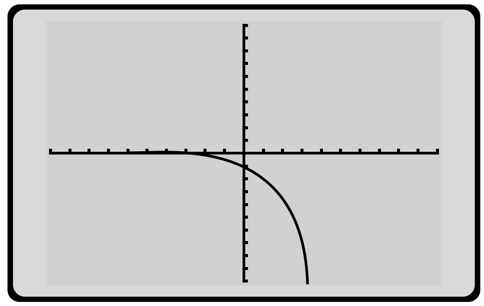
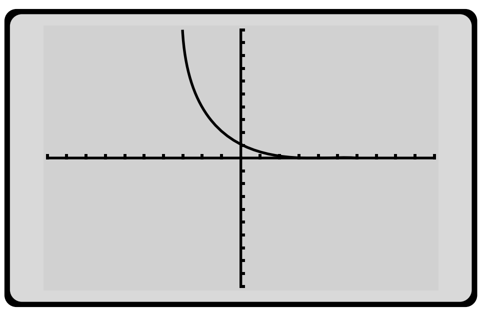
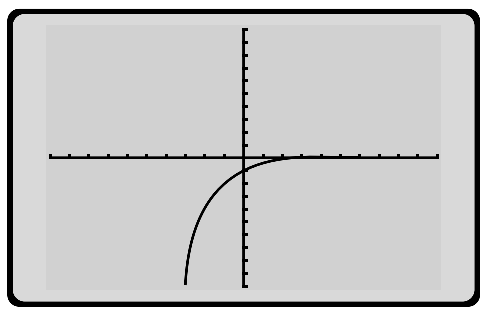
Remarque

Nous ne pouvons pas toujours déterminer exactement le signe de la fonction lorsque $k \neq 0$, car nous n'avons pas encore vu la notion de logarithme. Toutefois, lorsque $k = 0$, la fonction est positive si $a > 0$ et négative si $a < 0$.

Une fonction exponentielle positive ne veut pas nécessairement dire une fonction croissante et une fonction exponentielle négative ne veut pas non plus nécessairement dire une fonction décroissante. Trois paramètres influencent la croissance ou la décroissance d'une fonction exponentielle, ce sont a, b et c.

Pour savoir si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante, il importe de se poser les trois questions suivantes : est-ce que la fonction est positive ($a > 0$) ou négative ($a < 0$), est ce que b est positif ($b > 0$) ou négatif ($b < 0$) et est-ce que $c > 1$ ou $0 < c < 1$?

Pour mieux comprendre leur influence, observons les graphiques suivants.

	$a > 0, b > 0$	$a < 0, b > 0$
$c > 1$	$f(x) = 2^x$  Croissante et positive	$f(x) = -(2)^x$  Décroissante et négative
$0 < c < 1$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  Décroissante et positive	$f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$  Croissante et négative

Résumons la situation

	Positive $a > 0, b > 0$	**Négative** $a < 0, b > 0$
$c > 1$	• Équation de l'asymptote : $y = k$. • Domaine : $\mathbb{R}$. • Image : $]k, \infty$. • Signe : positive si $k \geq 0$. • Ordonnée à l'origine : $ac^{b(-h)} + k$. • Croissante, car pour les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.	• Équation de l'asymptote : $y = k$. • Domaine : $\mathbb{R}$. • Image : $-\infty, k[$. • Signe : négative si $k \leq 0$. • Ordonnée à l'origine : $ac^{b(-h)} + k$. • Décroissante, car pour les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2, y_2)$.
$0 < c < 1$	• Équation de l'asymptote : $y = k$. • Domaine : $\mathbb{R}$. • Image : $]k, \infty$. • Signe : positive si $k \geq 0$. • Ordonnée à l'origine : $ac^{b(-h)} + k$. • Décroissante, car pour les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.	• Équation de l'asymptote : $y = k$. • Domaine : $\mathbb{R}$. • Image : $-\infty, k[$. • Signe : négative si $k \leq 0$. • Ordonnée à l'origine : $ac^{b(-h)} + k$. • Croissante, car pour les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2), $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Remarque

Dans le tableau précédent, le paramètre b est positif.

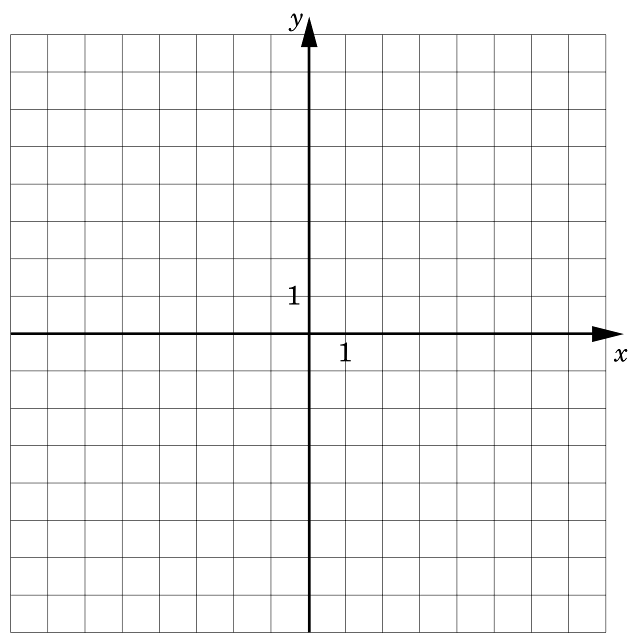
Si nous changeons le signe du paramètre b ($b < 0$), cela engendre une réflexion de la courbe par rapport à l'axe des y (lorsque $h = 0$) et une inversion de la croissance de la fonction.

Exercice 1.2

1. Tracez le graphique des fonctions exponentielles ci-dessous en n'oubliant pas de tracer l'asymptote en pointillés et d'identifier l'ordonnée à l'origine ainsi que deux autres points de la courbe.

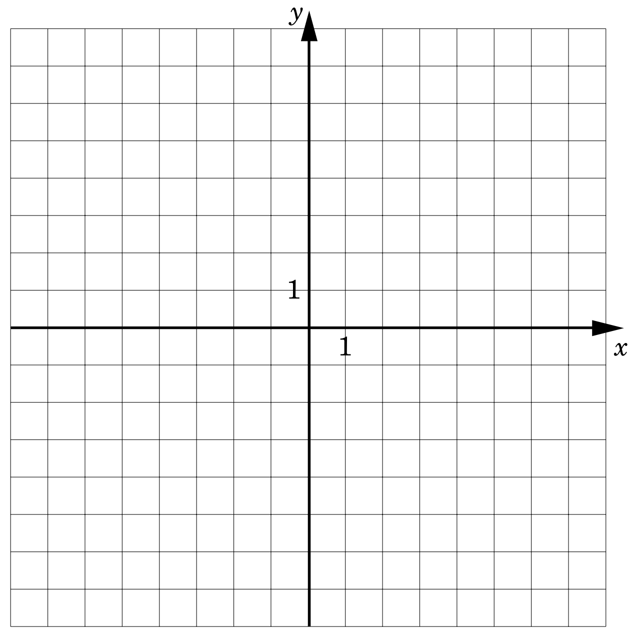
a) $g(x) = 3^{x-1}$

x							
$g(x)$							



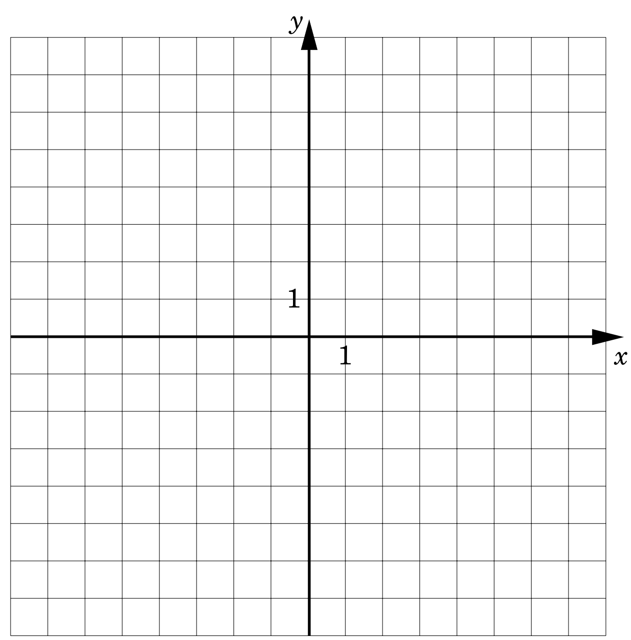
b) $h(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 2$

x							
$h(x)$							



c) $k(x) = 2^{x+1} + 4$

x							
$k(x)$							



2. Sans les tracer, donnez les caractéristiques suivantes des fonctions ci-dessous :
   1° sa croissance ou sa décroissance,
   2° son domaine,
   3° son image,
   4° l'équation de son asymptote.

a) $g(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x + \frac{1}{2}$

1° ....
2° ....
3° ....
4° ....

b) $h(x) = 7^{x-5} - 6$

1° ....
2° ....
3° ....
4° ....

c) $k(x) = 10^{x+4}$

1° ....
2° ....
3° ....
4° ....

d) $p(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$

1° ....
2° ....
3° ....
4° ....

3. Une fonction f est définie par l'équation $f(x) = 5^x$.

   a) Si g est une fonction obtenue en déplaçant la fonction f de 6 unités vers la droite, quelle est l'équation de g? ....

   b) Calculez $g(2)$. ....

   c) Si h est une fonction obtenue en déplaçant la fonction f de 8 unités vers le bas, quelle est l'équation de h? ....

   d) Quelle est l'équation de l'asymptote de la fonction h? ....

   e) Donnez dom h et ima h. ....

f) Si i est une fonction obtenue en effectuant un changement d'échelle vertical par 3 de la fonction f, quelle est l'équation de i?

....

g) Si j est une fonction obtenue en effectuant un changement d'échelle horizontal par 2 de la fonction h, quelle est l'équation de j?

....

4. Soit les coordonnées (0, 1) et (3, 27) d'une fonction exponentielle de base. Trouvez les nouvelles coordonnées obtenues suite à un changement de paramètre.

a) Si $a = 2$, (0, 1) devient .... et (3, 27) devient ....

b) Si $k = 3$, (0, 1) devient .... et (3, 27) devient ....

c) Si $b = 5$, (0, 1) devient .... et (3, 27) devient ....

d) Si $h = 6$, (0, 1) devient .... et (3, 27) devient ....

e) Si $a = -4$, (0, 1) devient .... et (3, 27) devient ....

Saviez-vous que...

... nous ne vous demanderons pas de compter jusqu'à 1 milliard? N'ayez crainte, cela prendrait, toujours au même rythme de 1 nombre aux 2 secondes, plus de 63 ans et vous avez sûrement autre chose à faire dans la vie! Pourtant, en comparaison de 1 million (moins de 2^{20}), 1 milliard est un peu moins que 2^{30}!

Afin de se faire une meilleure idée de ce nombre, supposons que nous empilons 1 milliard de dollars en billets de 10 $ et que nous comparons cette pile à la hauteur de la Place Ville-Marie, à Montréal.

? D'après vous, à quel étage de la Place Ville-Marie cette pile arrive-t-elle ou encore de combien dépasse-t-elle cet édifice?

Si votre première estimation est inférieure à la hauteur de la Place Ville-Marie, vous êtes loin du compte! Faites un calcul rapide maintenant en sachant que la hauteur de la Place Ville-Marie est de 188 m et que l'épaisseur d'un billet de 10 $ est de 0,14 mm.

Solution

1 000 000 000 $ ÷ 10 $ = 100 000 000 billets de 10 $

0,14 mm = 0,000 14 m

100 000 000 × 0,000 14 m = 14 000 m de hauteur

14 000 m ÷ 188 m ≈ 75 fois la hauteur de la Place Ville-Marie

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Soit les fonctions définies par les équations ci-dessous.
   - $f(x) = 4^x$
   - $g(x) = 4^{x+1}$
   - $h(x) = 4^x + 3$
   - $i(x) = 4^{2x}$
   - $j(x) = -2 \bullet 4^x + 2$
   - $k(x) = 4^{x+1} + 3$
   - $l(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

   a) Complétez les phrases suivantes.

   La fonction f passe par le point d'abscisse 0 et d'ordonnée .... Le graphique de cette fonction est situé dans les quadrants .... À partir de la fonction f, la fonction g est obtenue par une .... de .... unité(s) vers ...., tandis que la fonction h est obtenue par une .... de .... unité(s) vers .... Toujours à partir de la fonction f, la fonction k est donc obtenue par une .... de .... unité(s) vers -............................... et de .... unité(s) vers ....

   Le graphique de la fonction j est situé dans les quadrants .... Le signe des fonctions i et l est .... et celui de la fonction j dans l'intervalle $[0, \infty$ est .... La base de la fonction l est .... Soit (0, 1) et (2, 16) des couples appartenant à la fonction f, ces couples deviennent avec la fonction i, ... et .... et avec la fonction j, ... et ....

b) Quel est le domaine de toutes ces fonctions?

c) Quelle est l'image de chacune de ces fonctions?

Ima f = ...

Ima g = ...

Ima h = ...

Ima i = ...

Ima j = ...

Ima k = ...

Ima l = ...

d) Déterminez la croissance ou la décroissance de ces fonctions.

....

....

e) Donnez l'équation de l'asymptote des fonctions.

f : ....; g : ....; h : ....; i : ....;

j : ....; k : ....; l : ....

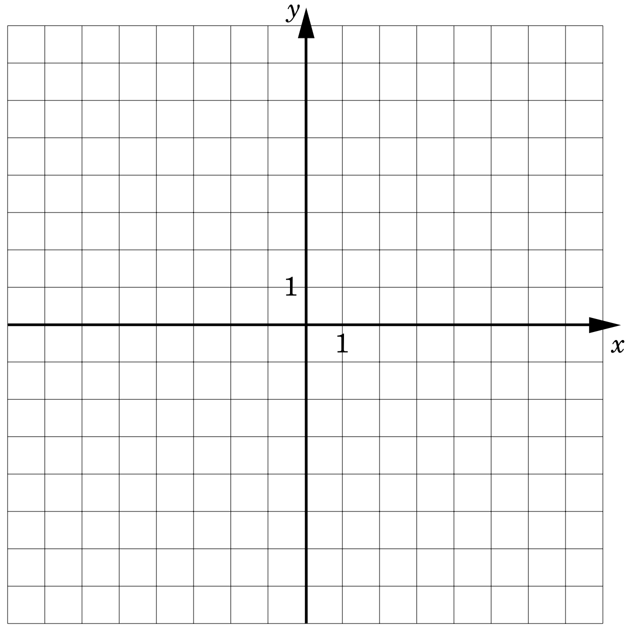
f) Trouvez l'image de 2 par g : ....

g) Complétez les tables ci-dessous pour les fonctions f et k.

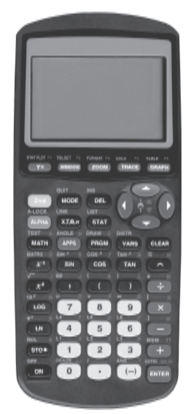
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$							

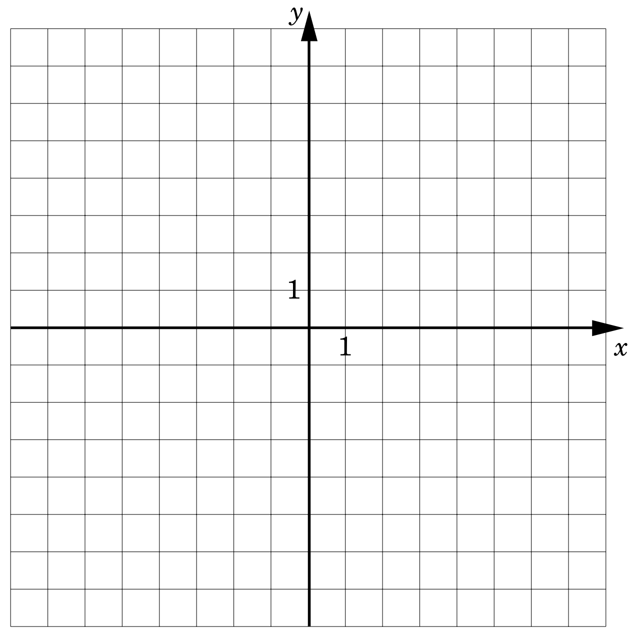
h) Représentez sur un même graphique cartésien les fonctions f et k en identifiant sur le graphique trois points de chaque courbe dont l'ordonnée à l'origine ainsi que leur asymptote.



2. a) Représentez graphiquement la fonction exponentielle $f(x) = -\left(\frac{4}{5}\right)^{2(x-4)} + 7$.



x	-2	-1	0	1	2	4	6
$f(x)$							



b) Quel est le domaine de f? ....

c) Quelle est l'image de f? ....

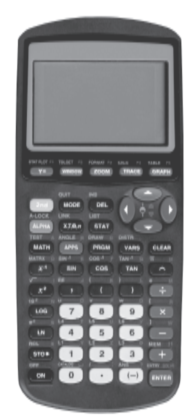
d) Quelle est l'équation de l'asymptote?..

e) Quelle est l'ordonnée à l'origine? ....

f) f est-elle croissante ou décroissante? Justifiez votre réponse. ....

....

3. Soit l'équation de la fonction f définie par $f(x) = -3^{2x+4} + 5$.



a) Quel est le domaine de f? ....

b) Quelle est l'image de f? ....

c) Quelle est l'équation de l'asymptote? ....

d) Quelle est l'ordonnée à l'origine? ....

e) Cette fonction est-elle croissante ou décroissante? Justifiez votre réponse.

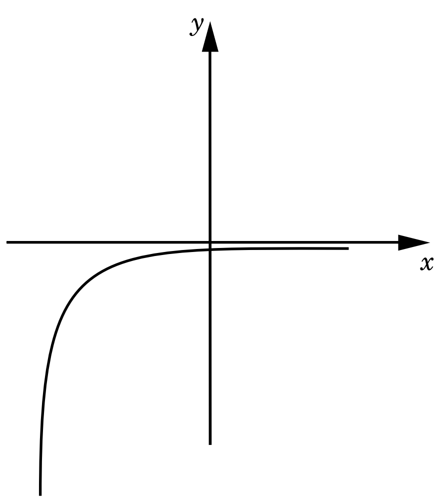
....

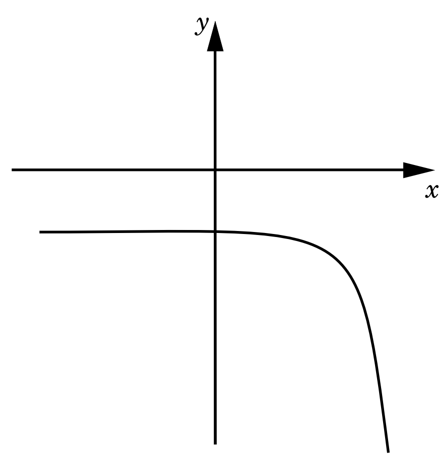
....

f) Si *f* subit une translation de (3, 2), quelle est la nouvelle règle de cette fonction? ....

4. Soit la fonction g de forme $g(x) = c^x$ et h de forme $h(x) = ac^{bx} + k$, ainsi que leur représentation graphique ci-dessous. Déterminez les paramètres (a, b ou k) qui ont varié et dites de quelle façon.
N.B. – Les paramètres a et b peuvent prendre des valeurs positives ou négatives et la valeur du paramètre k peut augmenter ou diminuer.

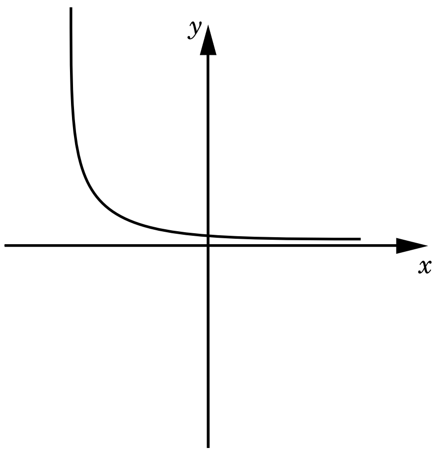
a) $g(x) = c^x$ $\qquad$ $h(x) = ac^{bx} + k$

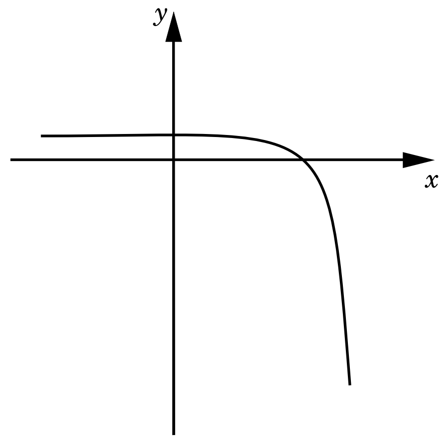




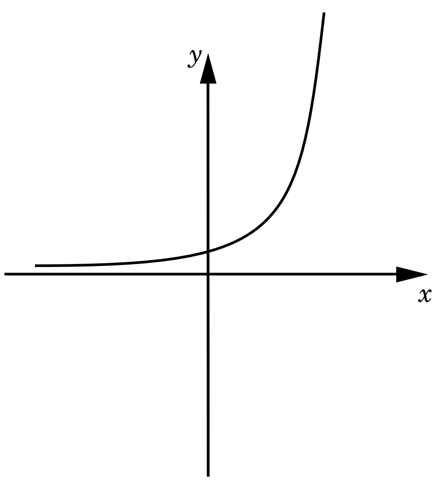
....

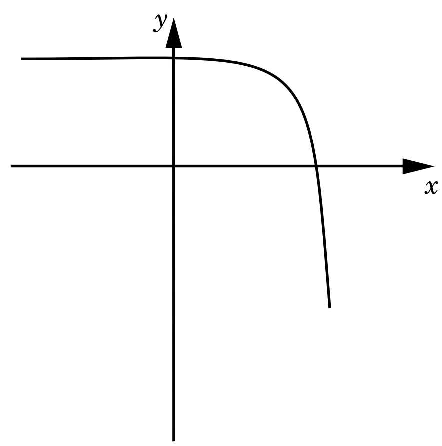
b) $g(x) = c^x$ $h(x) = ac^{bx} + k$



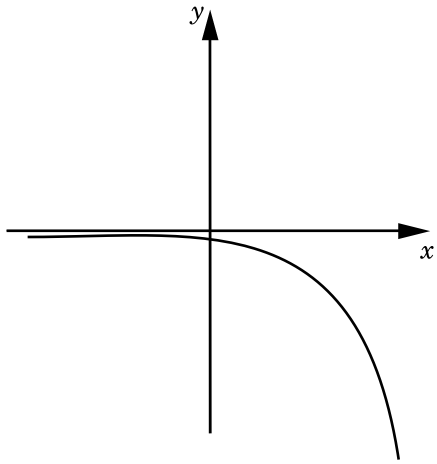


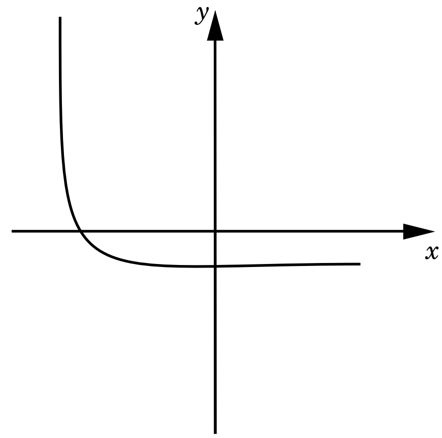
c) $g(x) = c^x$ $h(x) = ac^{bx} + k$





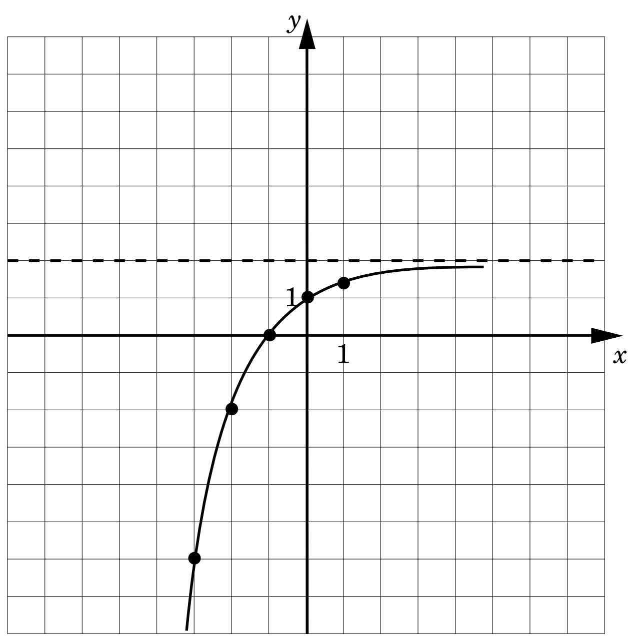
d) $g(x) = c^x$ $h(x) = ac^{bx} + k$





....

5. Soit une fonction exponentielle g définie par la règle $g(x) = ac^x + k$ et dont le graphique est le suivant.



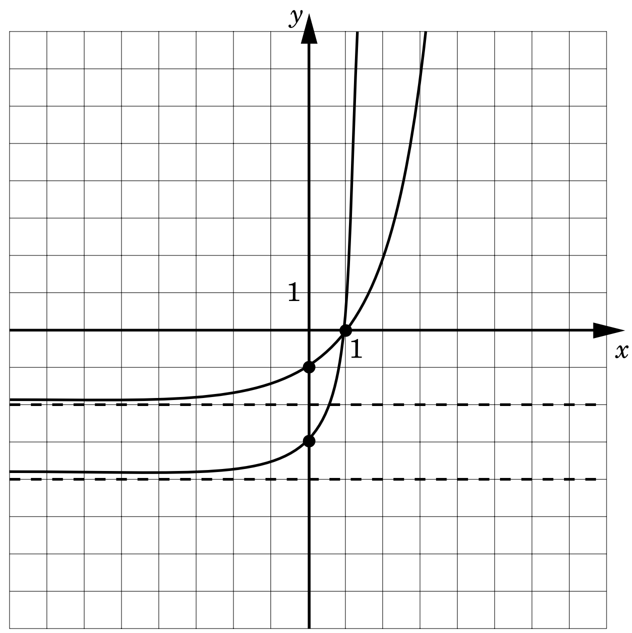
Dites si $a > 0$ ou si $a < 0$, si $c > 1$ ou si $0 < c < 1$ et si $k < 0$ ou $k > 0$.

....

6. Soit les deux fonctions suivantes et leur graphique.

$$h(x) = 2^{2x} - 4$$

$$k(x) = 2^{x} - 2$$



a) Quelles sont les images de chacune des fonctions?

....

b) Déterminez leur ordonnée à l'origine.

....

c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des deux fonctions?

....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

Dans ce sous-module, nous avons découvert une nouvelle fonction réelle : la fonction exponentielle. Sa forme la plus élaborée est définie par $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$. Pour mieux comprendre le rôle de la variable c et celui des paramètres a, b, h et k, nous comparons cette fonction avec la fonction $f(x) = c^x$.

1. Quel renseignement nous apporte la variable c dans une fonction exponentielle?

   ....

   ....

2. Si $k > 0$ dans une fonction exponentielle g, comment se comporte cette dernière fonction par rapport à f?

   ....

3. Soit $k = 2$ dans la fonction g.

   a) Quelle est l'équation de l'asymptote de g? ....

   b) Quelle est l'image de g? ....

4. Si $a > 0$ et $k = 0$, dans quels quadrants se trouve la fonction g? ....

5. Si $a < 0$ et $k = 0$, dans quels quadrants se trouve la fonction g? ....

6. Soit les couples (2, 3) et (3, 9) d'une fonction h et un changement d'échelle vertical de 2 unités.

   a) Lequel des paramètres a, b, h, k a changé? ....

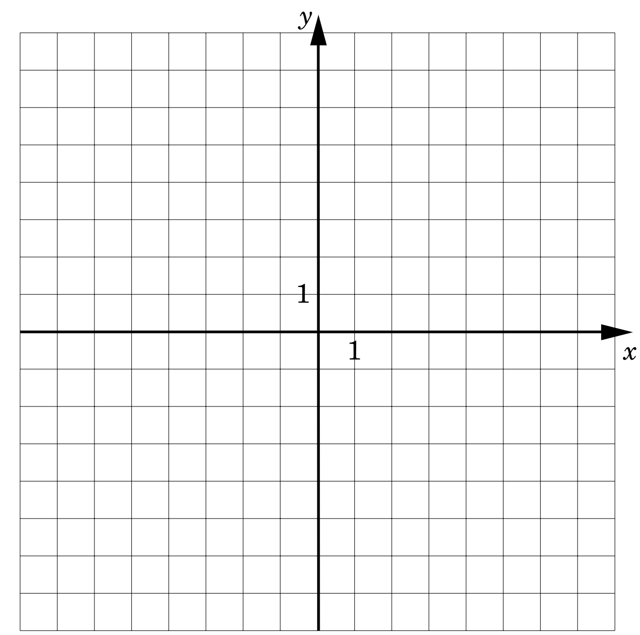
   b) Quelles seront les nouvelles coordonnées de h?

   ....

   ....

7. Tracez la fonction définie par l'équation $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

x							
$f(x)$							



1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Des équations exponentielles pour tout le monde!

Les équations exponentielles sont faciles et amusantes à résoudre en autant que vous connaissiez bien les lois des exposants ainsi qu'une propriété des exposants que vous n'aurez pas de difficulté à comprendre.

Si $b^c = b^d$, alors $c = d$.

Voyons cette propriété avec quelques exemples.

- Si $4^x = 4^3$, alors $x = 3$.

- Si $2^{x+1} = 2^{2x}$, alors $x + 1 = 2x$.
$$x - 2x = -1$$
$$-x = -1$$
$$x = 1$$

- Si $2^x = 16$, alors $2^x = 2^4$.
$$x = 4$$

Le secret : rendre les bases égales. Compliquons quelque peu.

Soit à résoudre $27^x \times 81^{x-2} = 9$.

$$(3^3)^x \times (3^4)^{x-2} = 3^2$$

$$3^{3x} \times 3^{4x-8} = 3^2$$

$$3^{3x+4x-8} = 3^2$$

$$3^{7x-8} = 3^2$$

$$7x - 8 = 2$$

$$7x = 10$$

$$x = \frac{10}{7}$$

Mettez maintenant ces nouvelles connaissances à l'épreuve!

Résolvez les équations exponentielles ci-dessous.

1. $5^{x-1}(25^{2x+2}) = 125^x$

2. $\dfrac{1\,000^x}{10^{4x-3}} = \dfrac{1}{10}$

3. $16^{4x-3}(4^{x+1}) - 1 = 0$

....

....

....

....

....

....

....