MAT-5101-1

OPTIMISATION I

sofad

MAT-5101-1

OPTIMISATION I

sofad

Coordonnateur du projet : Jean-Paul Groleau

Rédactrice : Louise Brouillette

Mise à jour : Alain Malouin

Réviseur du contenu : Jean-Paul Groleau

Réviseurs pédagogiques : Jean-Paul Groleau

Réviseures linguistiques : Francine Cardinal
Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Première édition : 2005

Impression : 2005

Dépôt légal — 2005

Bibliothèque et archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 2-89493-300-8

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

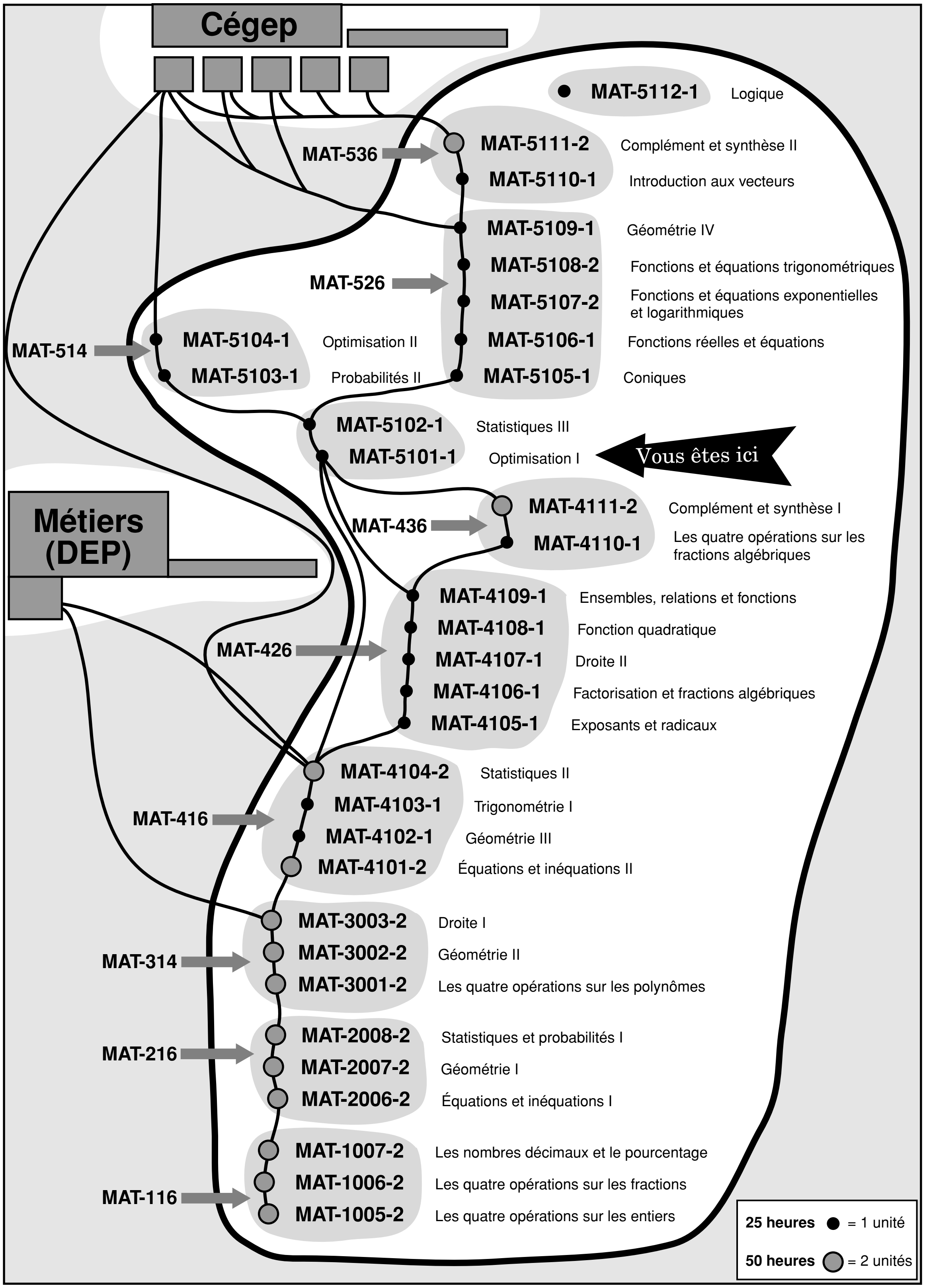
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP) et certains programmes de niveau collégial (cégep) pour la route MAT-4104-2.

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

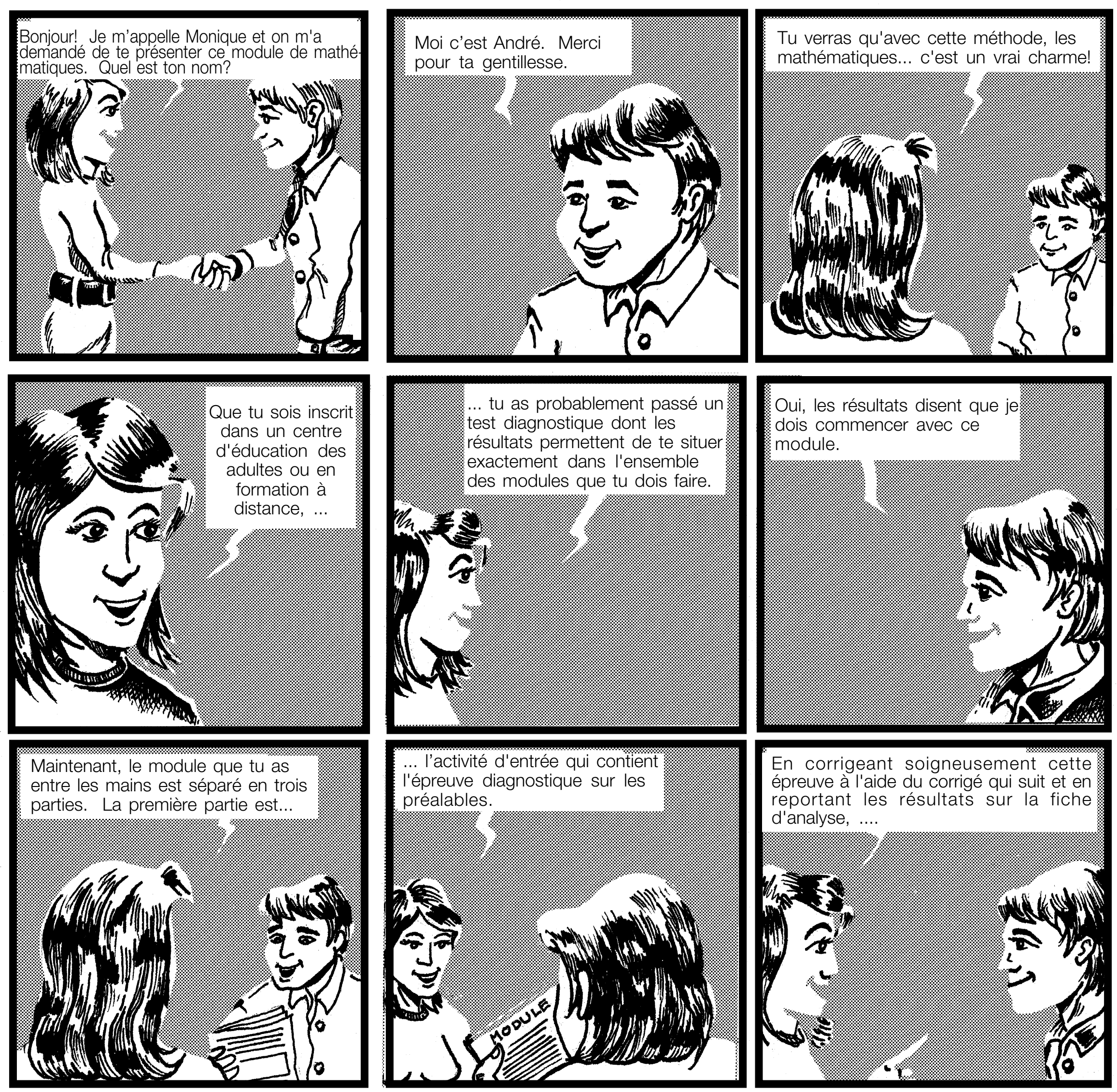
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE



La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

UN PAS VERS LA RENTABILITÉ

L'ère moderne dans laquelle nous vivons, avec sa haute technologie et ses marchés de plus en plus concurrentiels, exige que les entreprises commerciales, industrielles et de services soient en mesure de maximiser leurs profits. Elles doivent améliorer leur productivité en minimisant leurs coûts de production pour arriver à survivre.

Pour les grosses entreprises, ces calculs sont souvent complexes. Ils demandent l'apport d'un système informatique afin de tenir compte de toutes les contraintes qui entrent en jeu : le calcul du prix de revient, le prix de vente, les horaires, le salaire des employés, les avantages sociaux, les journées chômées, le volume des ventes, la publicité, l'entretien de la machinerie, la sécurité.

Par contre, pour de petites et moyennes entreprises (PME), certaines situations sont plus simples : elles peuvent souvent se traduire par des équations à deux variables. Vous verrez, dans ce module, une façon de résoudre des problèmes traduisant ces situations que nous appelons « problèmes d'optimisation ».

Vous apprendrez à résoudre de tels problèmes en respectant leurs étapes de résolution. D'abord, l'identification des éléments importants du problème et la détermination des deux variables. Puis, la mathématisation de la situation en traduisant la fonction à optimiser sous forme d'une équation du premier degré à deux variables. Ensuite, la mathématisation des contraintes sous forme d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables. Après, il faudra tracer le polygone de contraintes correspondant et déterminer les coordonnées de ses sommets. Puis, vous devrez trouver la valeur des variables qui optimisent la situation décrite dans le problème après avoir procédé à la vérification de leur exactitude. Finalement, vous devrez évaluer le fonction à optimiser à chacun des somments du nouveau polygone de contraintes créé par l'ajout d'une nouvelle contrainte.

Une fois ce travail fait, il est intéressant de constater qu'il est vraiment possible de trouver la solution qui optimise la situation étudiée.

Il est fortement recommandé d'avoir en main une calculatrice pour l'apprentissage des sous-modules 3 à 5 particulièrement.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-5101-1 comporte six objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures réparties, tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombre d'heures***	**% (évaluation)**
1 et **2**	8	30 %
3	5	20%
4, **5** et **6**	11	50 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Interprétation des différentes parties d'un problème

   À partir d'un problème d'optimisation à données textuelles, indiquer d'une part les éléments qui permettent d'établir la fonction à optimiser, c'est-à-dire la fonction grâce à laquelle les valeurs recherchées peuvent être obtenues, et d'autre part, les éléments qui permettent d'établir les contraintes auxquelles sont soumises les variables de la fonction à optimiser. La donnée du problème doit comporter au plus 150 mots.

2. **Traduction d'un problème en langage mathématique**

   À partir des éléments appropriés d'un problème d'optimisation à données textuelles, exprimer la fonction à optimiser par une équation de la forme $Ax + By + C = Z$ où A, B et C sont des nombres entiers et traduire sous forme d'inéquations les contraintes auxquelles sont soumises les variables x et y de la fonction à

optimiser. Mathématiser les contraintes qui affectent chacune des variables individuellement ainsi que celles qui les affectent simultanément. Bien indiquer les variables choisies. La donnée du problème doit comporter au plus 150 mots.

3. Le polygone de contraintes

Étant donné un système d'inéquations traduisant l'ensemble des contraintes auxquelles sont soumises les variables d'une fonction à optimiser, représenter graphiquement, sur un même plan cartésien, toutes les contraintes données. Tracer ensuite le polygone de contraintes délimité par ce système d'inéquations et déterminer les coordonnées de chacun de ses sommets.

4. L'appartenance ou non d'un point au polygone de contraintes

Étant donné un système d'inéquations traduisant l'ensemble des contraintes auxquelles sont soumises les variables d'une fonction à optimiser, vérifier algébriquement si un point donné appartient au polygone de contraintes délimité par ce système d'inéquations. Les étapes de la vérification sont exigées.

5. Résolution d'un problème d'optimisation

Étant donné un problème d'optimisation à données textuelles, évaluer la fonction à optimiser à chacun des sommets du polygone de contraintes et déterminer la valeur des variables qui optimisent la situation décrite dans le problème. La donnée du problème doit comporter au plus 150 mots. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

6. Résolution d'un problème d'optimisation modifié

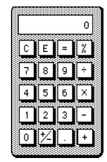
Étant donné un problème d'optimisation à données textuelles, évaluer la fonction à optimiser à chacun des sommets du nouveau polygone de contraintes créé par l'ajout d'une nouvelle contrainte. Le polygone de contraintes initial ainsi que les coordonnées de ses sommets sont donnés. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Résoudre par la méthode de comparaison le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

   ① $7x - 2 = 3y$
   ② $y = 3x - 4$

2. Résoudre par la méthode de substitution le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

   ① $x - y = 9$
   ② $y = 7x - 3$

3. Résoudre par la méthode d'élimination le système d'équations suivant. La solution complète est exigée.

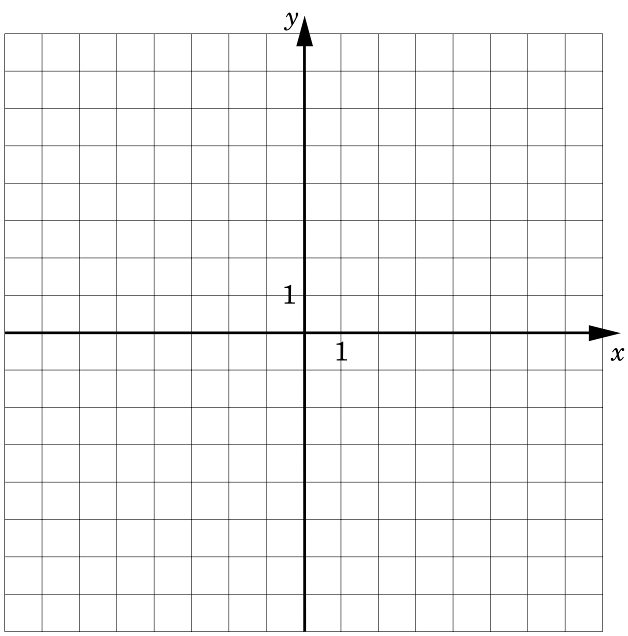
① $6x + 4y = 30$

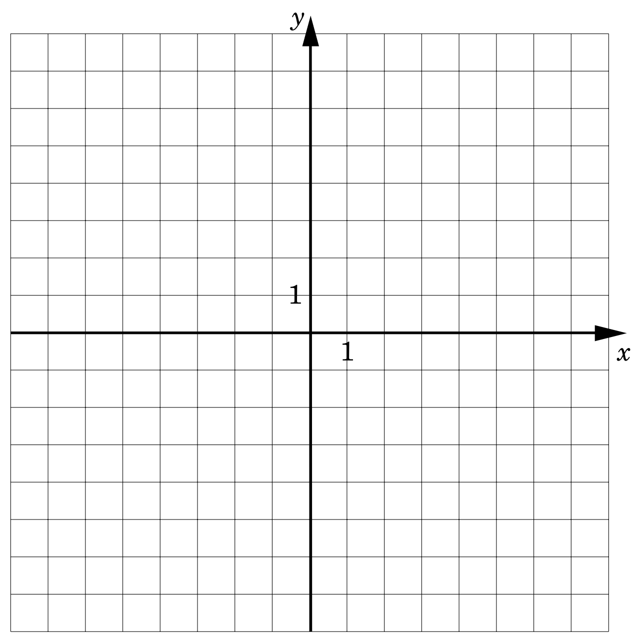
② $3x + y = 12$

4. Représentez graphiquement les systèmes d'inéquations donnés ci-dessous.

a) ① $2x - y \leq 5$

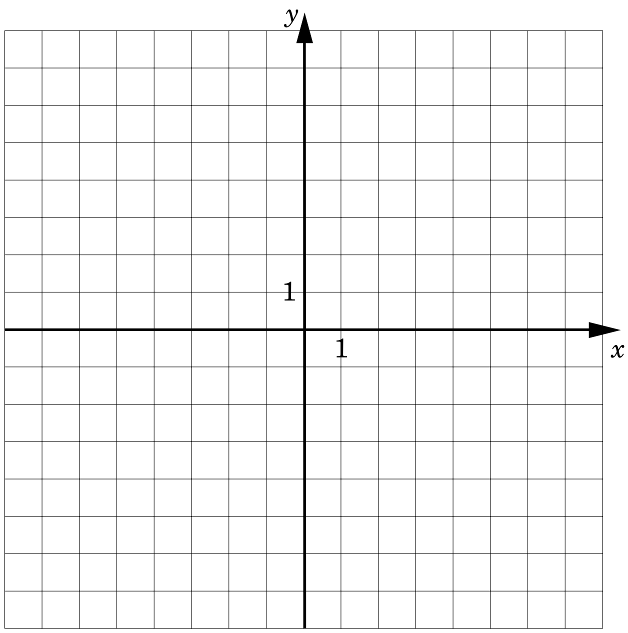
② $x + 3y \geq 4$

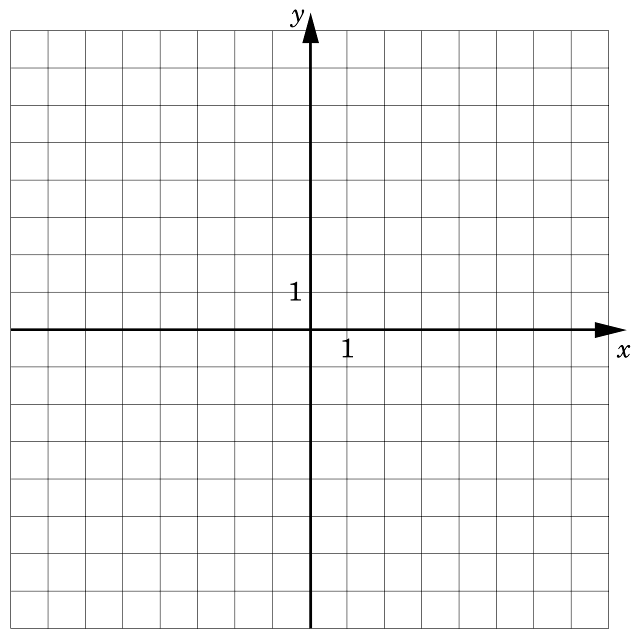




b) ① $y \leq 3x + 1$

② $3x \leq 9$





Corrigé

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. 1° Isoler la même variable dans les deux équations.

① $7x - 2 = 3y$

① $y = \dfrac{7x-2}{3}$ et ② $y = 3x - 4$

2° Comparer les deux expressions obtenues.

$$① = ②$$

$$\frac{7x-2}{3} = 3x - 4$$

3° Résoudre par la propriété fondamentale des proportions : le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

$$\frac{7x-2}{3} = \frac{3x-4}{1}$$

$$1(7x - 2) = 3(3x - 4)$$

$$7x - 2 = 9x - 12$$

$$7x - 9x = -12 + 2$$

$$-2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-2} = 5$$

4° Substituer x dans l'une des équations.

$x = 5$ dans ②

② $y = 3x - 4$

$y = 3(5) - 4$

$y = 15 - 4 = 11$

5° Vérifier la solution dans chacune des équations d'origine.

① $7x - 2 = 3y$	② $y = 3x - 4$
$7(5) - 2 = 3(11)$	$11 = 3(5) - 4$
$35 - 2 = 33$	$11 = 15 - 4$
$33 = 33$	$11 = 11$

6° Donner la solution.

(5, 11)

2. 1° Isoler une variable dans l'une des deux équations.

Soit ② $y = 7x - 3$

2° Substituer cette valeur dans l'autre équation.

① $x - y = 9$

$x - (7x - 3) = 9$

3° Résoudre l'équation obtenue.

$x - 7x + 3 = 9$

$x - 7x = 9 - 3$

$-6x = 6$

$x = \frac{6}{-6} = -1$

4° Substituer x dans l'une des équations.

$x = -1$ dans ②

② $y = 7x - 3$

$y = 7(-1) - 3$

$y = -7 - 3$

$y = -10$

5° Vérifier la solution dans chacune des équations d'origine.

① $x - y = 9$

$-1 - (-10) = 9$

$-1 + 10 = 9$

$9 = 9$

② $y = 7x - 3$

$-10 = 7(-1) - 3$

$-10 = -7 - 3$

$-10 = -10$

6° Donner la solution.

$(-1, -10)$

3. Il y a deux solutions possibles.

   1° Choisir une variable à éliminer.

   La variable x **ou** la variable y.

   2° Transformer les équations pour que les coefficients de la variable choisie soient opposés.

① $6x + 4y = 30 \quad \times(-1)$	ou	① $6x + 4y = 30$
② $3x + y = 12 \quad \times(2)$		② $3x + y = 12 \times(-4)$
① $-6x - 4y = -30$		① $6x + 4y = 30$
② $6x + 2y = 24$		② $-12x - 4y = -48$

   3° Additionner les équations.

$$\begin{array}{rcr} -6x - 4y &=& -30 \\ 6x + 2y &=& 24 \\ \hline 0 - 2y &=& -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 6x + 4y &=& 30 \\ -12x - 4y &=& -48 \\ \hline -6x + 0 &=& -18 \end{array}$$

   4° Résoudre l'équation obtenue.

$-2y = -6$	ou	$-6x = -18$
$y = \dfrac{-6}{-2}$		$x = \dfrac{-18}{-6}$
$y = 3$		$x = 3$

   5° Substituer la valeur obtenue dans l'une des équations d'origine.

① $6x + 4y = 30$	② $3x + y = 12$
$6x + 4(3) = 30$	$3(3) + y = 12$
$6x + 12 = 30$	$9 + y = 12$
$6x = 30 - 12$	$y = 12 - 9$
$6x = 18$	$y = 3$
$x = \dfrac{18}{6}$	
$x = 3$	

6° Vérifier la solution dans chacune des équations d'origine.

① $6x + 4y = 30$
$6(3) + 4(3) = 30$
$18 + 12 = 30$
$30 = 30$

② $3x + y = 12$
$3(3) + 3 = 12$
$9 + 3 = 12$
$12 = 12$

7° Donner la solution.
(3, 3)

4. a) ① $2x - y \le 5$
② $x + 3y \ge 4$

① $2x - y = 5$

- Si $x = 0$, alors :
$2(0) - y = 5$
$-y = 5$
$y = -5$
- Si $x = 1$, alors :
$2(1) - y = 5$
$2 - y = 5$
$-y = 3$
$y = -3$

x	0	1
y	-5	-3

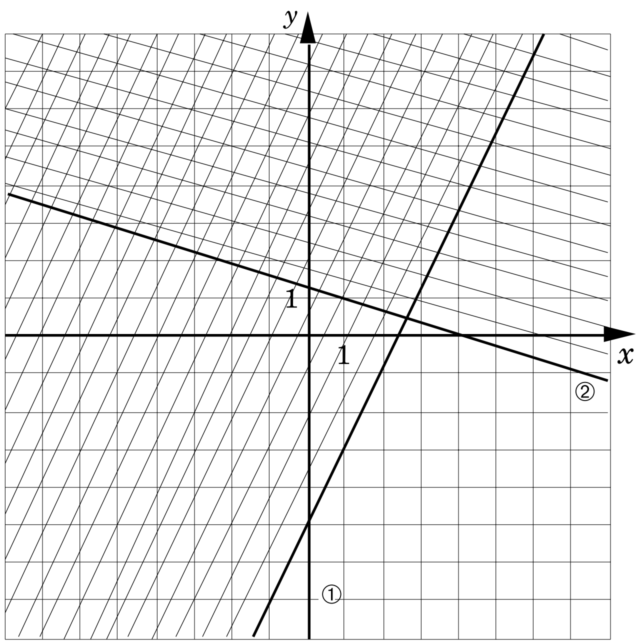
Soit le point (0, 0).
$2x - y \le 5$
$2(0) - 0 \le 5$
$0 - 0 \le 5$
$0 \le 5$
Vrai. Il faut donc hachurer la région au-dessus de la droite.

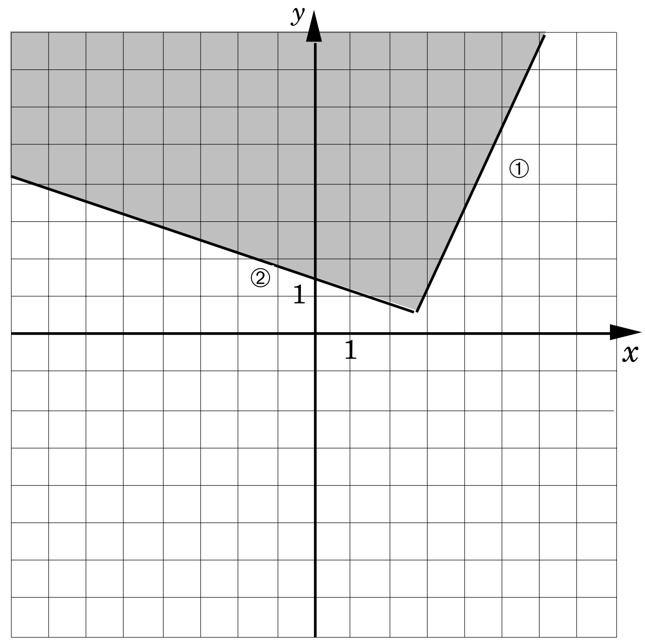
② $x + 3y = 4$

- Si $y = 0$, alors :
$x + 3(0) = 4$
$x + 0 = 4$
$x = 4$
- Si $y = 1$, alors :
$x + 3(1) = 4$
$x + 3 = 4$
$x = 1$

x	4	1
y	0	1

Soit le point (0, 0).
$x + 3y \ge 4$
$0 + 3(0) \ge 4$
$0 + 0 \ge 4$
$0 \ge 4$
Faux. Il faut donc hachurer la région au-dessus de la droite.





b) ① $y \leq 3x + 1$

② $3x \leq 9$

① $y = 3x + 1$

- Si $x = 0$, alors :

  $y = 3(0) + 1$

  $y = 0 + 1$

  $y = 1$

- Si $x = 1$, alors :

  $y = 3(1) + 1$

  $y = 3 + 1$

  $y = 4$

x	0	1
y	1	4

Soit le point (0, 0).

$y \leq 3x + 1$

$0 \leq 3(0) + 1$

$0 \leq 0 + 1$

$0 \leq 1$

Vrai. Il faut donc hachurer la région en dessous de la droite.

② $3x = 9$

$x = 3$

x	3	3
y	0	3

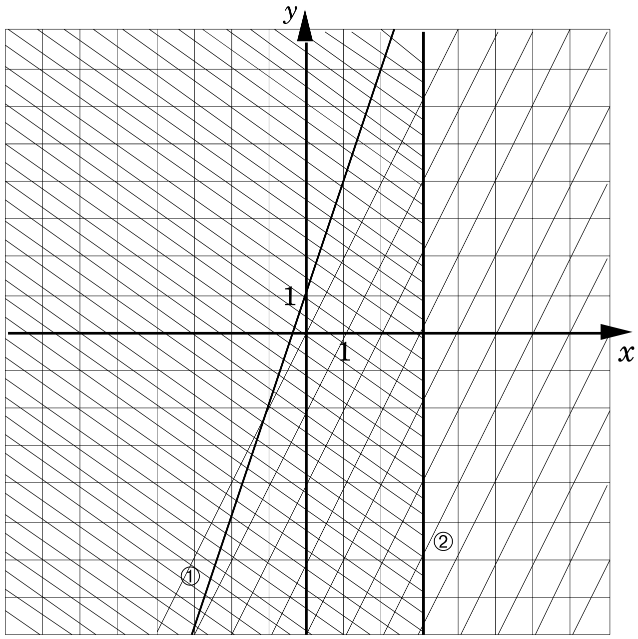
Soit le point (0, 0).

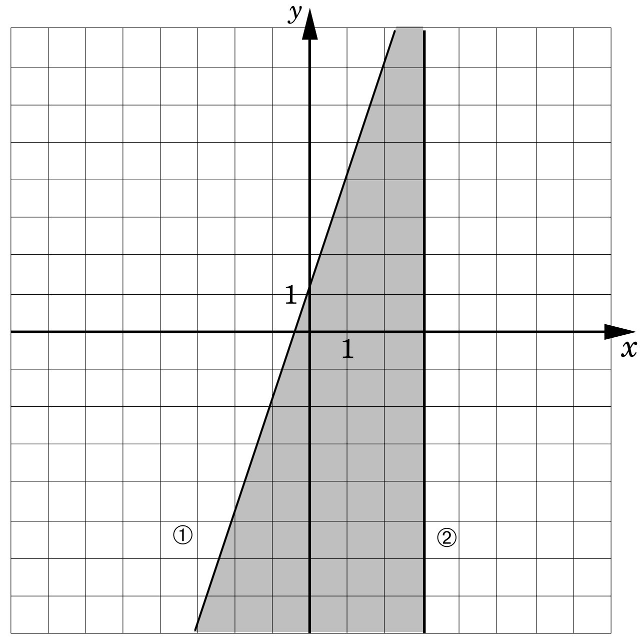
$3x \leq 9$

$3(0) \leq 9$

$0 \leq 9$

Vrai. Il faut donc hachurer la droite à gauche de la droite.


y
1
1
x
①
②


y
1
1
x
①
②

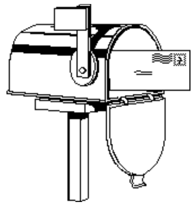
ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1.			7.1	7.4	Sous-module 3
2.			7.2	7.10	Sous-module 3
3.			7.3	7.16	Sous-module 3
4.			7.4	7.21	Sous-module 3
5.			7.4	7.21	Sous-module 3

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».

Corrigé



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-5101-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-5101-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

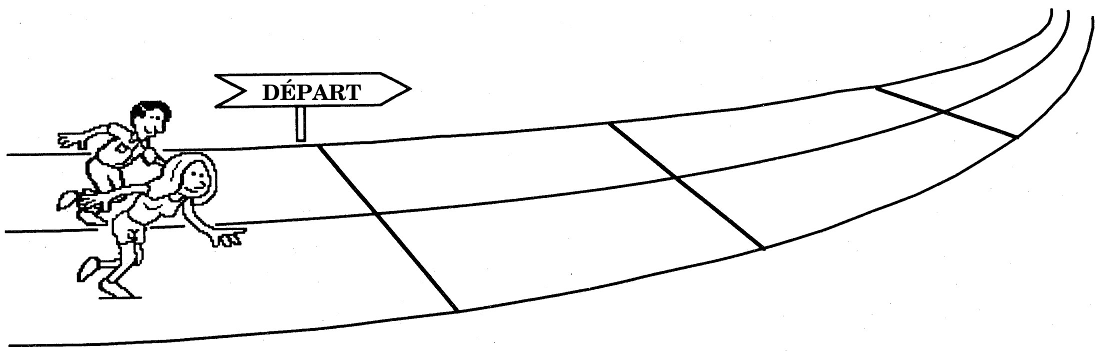
Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 3.

Le devoir 2 porte sur les sous-modules 4 et 5.

Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 5.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

INTERPRÉTATION DES DIFFÉRENTES PARTIES D'UN PROBLÈME

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Une entreprise québécoise

Pour qu'une entreprise soit rentable, les dirigeants doivent prendre des décisions éclairées afin d'optimiser son rendement. Que ce soit une entreprise manufacturière, une exploitation agricole, une entreprise de transport de passagers, une entreprise de vente de biens ou autre, il est important de connaître la façon de maximiser les profits et de minimiser les coûts de production. C'est ce que nous appelons résoudre un problème d'***optimisation***.

Voyons l'exemple d'une entreprise québécoise, Les Raquettes d'argent ltée. Elle se spécialise dans la fabrication de raquettes de tennis et de raquettes de badminton, deux sports de plus en plus appréciés des Québécois.

Comment pourrait-elle maximiser ses profits?

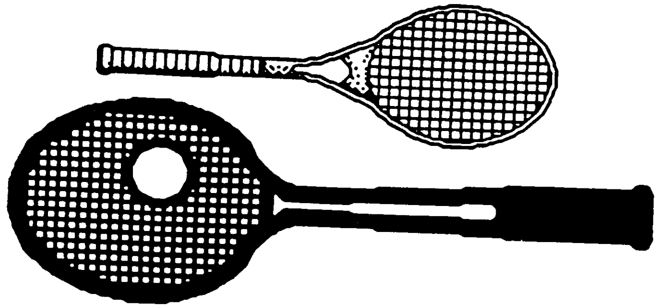
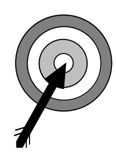


Fig. 1.1 Raquettes

La construction d'une raquette se fait en deux étapes : l'élaboration du cadre de la raquette puis le tressage du fond. La fabrication d'une raquette de tennis nécessite 20 minutes pour le cadre et 20 minutes pour le tressage du fond. La raquette de badminton demande 15 minutes pour le cadre et 30 minutes pour le tressage du fond. Le temps disponible par semaine à l'atelier de fabrication du cadre est de 240 heures, alors qu'il est de 300 heures à l'atelier de tressage. Quelle quantité de raquettes de chaque sorte devra être fabriquée, par semaine, pour maximiser les profits si l'entreprise fait un bénéfice de 5,00 $ sur une raquette de tennis et de 6,00 $ sur une raquette de badminton?

Pour résoudre ce type de problème, il est primordial de faire ressortir les éléments importants de l'énoncé du problème : ce que nous voulons optimiser, c'est-à-dire la ***fonction à optimiser***, et les conditions qui l'influencent, c'est-à-dire les ***contraintes***.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable d'identifier, dans un problème d'optimisation à données textuelles, les éléments qui permettent d'établir la fonction à optimiser et ceux qui serviront à établir les contraintes auxquelles sont soumises les variables de la fonction à optimiser.



Dans tout problème d'optimisation, pour identifier les deux éléments qui permettent d'établir la fonction à optimiser, nous devons nous poser la question suivante :

« Que cherchons-nous à déterminer? »

? Revenons à l'entreprise Les Raquettes d'argent ltée. Que cherchons-nous à déterminer dans ce problème de fabricant de raquettes? ....

....

....

Si nous revenons à l'énoncé du problème, la question se pose comme suit : Quelle quantité de raquettes de chaque sorte devra être fabriquée par semaine pour maximiser les profits?

Ainsi, nous cherchons le nombre de raquettes de tennis et le nombre de raquettes de badminton à fabriquer par semaine pour obtenir le maximum de profits.

Il faut donc conclure que la fonction à optimiser dans ce problème sera obtenue à partir du nombre de raquettes de chaque sorte à fabriquer et du profit rapporté par chacune.

Voyons si vous pouvez en faire autant!

Exercice 1.1

Pour chacun des énoncés suivants, identifiez les éléments qui permettent d'établir la fonction à optimiser.

1. La maison des jeunes de votre localité organise une soirée récréative afin de recueillir des fonds pour une activité spéciale. En raison de la dimension de la salle, le nombre total de billets est limité à 200. Au moins 75 billets seront vendus aux membres de la maison des jeunes. De plus, nous prévoyons qu'il y aura au moins trois fois plus de membres de la maison des jeunes que de non-membres qui assisteront à cette soirée. Un billet coûte 3,00 $ pour un membre et 5,00 $ pour un non-membre. Quel devrait être le nombre de billets vendus aux membres de la maison des jeunes et le nombre de billets vendus aux non-membres pour maximiser les profits de cette soirée?

   ....

   ....

   ....

   ....

2. M. Robert Latulipe est fleuriste. Il veut profiter d'un rabais offert par son grossiste pour l'achat de roses et de marguerites. L'espace réfrigéré dont il dispose lui permet d'acheter au plus 24 douzaines de fleurs. Le grossiste exige qu'un minimum de 2 douzaines de roses et 3 douzaines de marguerites soient achetées pour profiter du rabais proposé. Sachant que les roses se vendent mieux que les marguerites, M. Latulipe pense acheter au moins deux fois plus de roses que de marguerites. Combien de douzaines de fleurs de chaque sorte M. Latulipe doit-il acheter pour obtenir le meilleur profit possible si son bénéfice est de 1,00$ la rose et de 0,75$ la marguerite?

   ....

   ....

   ....

   ....

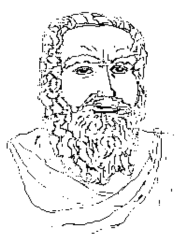
3. Marina fait la culture biologique de carottes qu'elle vend au marché le samedi matin. Elle prépare des sacs de 1 kg et des sacs de 2 kg. Elle ne peut transporter plus de 150 kg de carottes dans son véhicule à chaque samedi. Par expérience, elle sait que les sacs de 2 kg se vendent généralement mieux que ceux de 1 kg. Elle en préparera donc au moins autant sinon plus. Elle sait qu'elle doit préparer au moins 10 sacs de 1 kg et au moins 15 sacs de 2 kg pour ses clients réguliers. Combien de sacs de 1 kg et de sacs de 2 kg Marina devrait-elle préparer pour optimiser son revenu si elle vend le sac de 1 kg 0,90 $ et le sac de 2 kg 1,50 $?

....

....

....

....



Saviez-vous que...

… il existe une autre méthode pour résoudre un système d'équations? Elle s'appelle la règle de Cramer. En fait, cette façon de faire est directement dérivée de la méthode par élimination.

Soit le système d'équations

$$\text{①}\; a_1x + b_1y = c_1$$
$$\text{②}\; a_2x + b_2y = c_2$$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 représentent respectivement les coefficients de x, de y et le terme constant.

Éliminons y.

$$\begin{array}{lcrcl} \text{①}\; a_1x + b_1y = c_1 \times (b_2) & \Rightarrow & \text{①}\; a_1b_2x + b_1b_2y & = & b_2c_1 \\ \text{②}\; a_2x + b_2y = c_2 \times (-b_1) & \Rightarrow & \text{②}\; \underline{-a_2b_2x - b_1b_2y} & = & \underline{-b_1c_2} \\ & & (a_1b_2 - a_2b_1)x & = & b_2c_1 - b_1c_2 \\ & & x & = & \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{array}$$

Éliminons y.

$$① \ a_1x + b_1y = c_1 \times (-a_2) \ \Rightarrow ① \ -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1$$

$$② \ a_2x + b_2y = c_2 \times (a_1) \ \Rightarrow ② \ \underline{a_1a_2x + a_1b_2y = -a_1c_2}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Donc, les valeurs de x et de y sont :

$$x = \frac{b_2\,c_1 - b_1\,c_2}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}; \qquad y = \frac{a_1\,c_2 - a_2\,c_1}{a_1\,b_2 - a_2\,b_1}$$

Seriez-vous capable d'appliquer ces résultats dans le système d'équations suivant?

$$① \ 3x - 4y = 13$$
$$② \ 5x + 7y = 22$$

N.B. – Identifiez d'abord a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 avant d'appliquer la règle.

Solution

$a_1 = 3$, $b_1 = -4$, $c_1 = 13$

$a_2 = 5$, $b_2 = 7$, $c_2 = 22$

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{7(13) - (-4)(22)}{3(7) - 5(-4)} = \frac{91 + 88}{21 + 20} = \frac{179}{41}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{3(22) - 5(13)}{3(7) - 5(-4)} = \frac{66 - 65}{21 + 20} = \frac{1}{41}$$

Une fois que nous avons pu identifier ce qui est recherché dans le problème, il est important que nous soyons capable d'identifier toutes les autres données qui ont une influence sur sa résolution.

> **Dans tout problème d'optimisation, pour identifier les éléments qui servent à établir les contraintes ou limites imposées, nous devons** :
> 1° lire attentivement le texte du problème,
> 2° analyser le texte du problème pour en dégager toutes les informations pertinentes.

Relisons donc le texte du problème de l'entreprise Les Raquettes d'argent ltée pour en ressortir toutes les informations pertinentes. Nous pouvons dire que :

- la fabrication d'une raquette de tennis demande 20 minutes pour le cadre et 20 minutes pour le tressage du fond;

- la fabrication d'une raquette de badminton demande 15 minutes pour le cadre et 30 minutes pour le tressage du fond;

- nous disposons de 240 heures par semaine à l'atelier de fabrication du cadre;

- nous disposons de 300 heures par semaine pour le tressage du fond de la raquette.

Il est très important de ne rien oublier de ce qui pourrait être utilisé comme contrainte lors de la résolution du problème.

À vous de pratiquer.

Exercice 1.2

Pour chacun des énoncés de l'exercice 1.1, identifiez les éléments qui serviront à établir les contraintes ou limites imposées.

1. La maison des jeunes de votre localité organise une soirée récréative afin de recueillir des fonds pour une activité spéciale. En raison de la dimension de la salle, le nombre total de billets est limité à 200. Au moins 75 billets seront vendus aux membres de la maison des jeunes. De plus, nous prévoyons qu'il y aura au moins trois fois plus de membres de la maison des jeunes que de non-membres qui assisteront à cette soirée. Un billet coûte 3,00 $ pour un membre et 5,00 $ pour un non-membre. Quel devrait être le nombre de billets vendus aux membres de la maison des jeunes et le nombre de billets vendus aux non-membres pour maximiser les profits de cette soirée?

   ....

   ....

   ....

   ....

2. M. Robert Latulipe est fleuriste. Il veut profiter d'un rabais offert par son grossiste pour l'achat de roses et de marguerites. L'espace réfrigéré dont il dispose lui permet d'acheter au plus 24 douzaines de fleurs. Le grossiste exige qu'un minimum de 2 douzaines de roses et 3 douzaines de marguerites soient achetées pour profiter du rabais proposé. Sachant que les roses se vendent mieux que les marguerites, M. Latulipe pense acheter au moins deux fois plus de roses que de marguerites. Combien de douzaines de fleurs de chaque sorte M. Latulipe doit-il acheter pour obtenir le meilleur profit possible si son bénéfice est de 1,00 $ la rose et de 0,75 $ la marguerite?

   ....

   ....

   ....

   ....

3. Marina fait la culture biologique de carottes qu'elle vend au marché le samedi matin. Elle prépare des sacs de 1 kg et des sacs de 2 kg. Elle ne peut transporter plus de 150 kg de carottes dans son véhicule à chaque samedi. Par expérience, elle sait que les sacs de 2 kg se vendent généralement mieux que ceux de 1 kg. Elle en préparera donc au moins autant sinon plus. Elle sait qu'elle doit préparer au moins 10 sacs de 1 kg et au moins 15 sacs de 2 kg pour ses clients réguliers. Combien de sacs de 1 kg et de sacs de 2 kg Marina devrait-elle préparer pour optimiser son revenu si elle vend le sac de 1 kg 0,90 \$ et le sac de 2 kg 1,50 \$?

....

....

....

....

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

Pour chacun des énoncés de problèmes suivants :

a) identifier les éléments qui permettront d'obtenir la fonction à optimiser;

b) identifier les éléments du problème qui serviront à établir les contraintes ou limites imposées.

1. Carla et Antonio viennent d'acheter un aquarium dans lequel ils veulent mettre des poissons rouges et des poissons noirs. Le marchand leur recommande de ne pas mettre plus de 12 poissons dans l'aquarium. Ils en veulent au moins deux de chaque sorte et au maximum deux fois plus de poissons rouges que de poissons noirs. Sachant qu'un poisson rouge coûte 2,00 \$ et un poisson noir 3,00 \$, quelle quantité de chaque sorte pourraient-ils acheter pour minimiser leur achat?

a) ....

....

....

....

b) ....

....

....

....

2. Gérard vend des tablettes de chocolat et des biscuits à la crème glacée dans les estrades du Stade Molson pendant les parties de football des Alouettes de Montréal. Il a constaté que la crème glacée se vend au moins deux fois mieux que le chocolat. Il ne peut mettre plus de 144 unités des deux sortes dans le support qu'il transporte. Son fournisseur lui demande de prendre un minimum d'une caisse de 24 unités de chaque sorte lorsqu'il remplit son support. Gérard fait un profit de 0,50 $ par tablette de chocolat et de 0,45 $ par biscuit à la crème glacée. De combien d'unités de chaque sorte devra-t-il remplir son support afin de maximiser son profit?

a) ....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

3. M. et M^{me} Soarès ont un dépanneur. Ils emploient deux jeunes, Christian et Messaoud. Leur travail consiste à transporter et trier les bouteilles vides, à déballer, étiqueter et placer la marchandise sur les tablettes ainsi qu'à faire le ménage dans le dépanneur. Christian y travaille depuis quelque temps et gagne 6,00 $ de l'heure, alors que Messaoud débute comme employé et reçoit 5,00 $ de l'heure. Le travail doit se faire en 30 heures ou moins par semaine. M. et M^{me} Soarès ne veulent pas payer plus de 160,00 $ par semaine pour les deux employés. Christian devra travailler au moins 1 heure de plus que Messaoud par semaine. Les propriétaires ont promis à Messaoud qu'il travaillerait au moins 10 heures par semaine. Combien d'heures devront travailler chacun des deux employés pour minimiser le coût de leur salaire?

a) ....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

4. Un candidat à une élection municipale veut faire distribuer un journal publicitaire partout dans le quartier où il se présente. L'imprimeur demande 0,15 $ pour l'impression d'une page en noir et blanc, 0,30 $ pour une page contenant de la couleur et 2,00 $ pour la page couverture. Pour démontrer son sérieux, le candidat pense que le journal devra contenir au moins 5 pages et au plus 15 pages. Il aimerait au moins 2 pages contenant de la couleur. Combien de pages en noir et blanc et combien de pages contenant de la couleur devrait contenir ce journal pour que le coût d'impression soit le plus bas possible?

a) ....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

5. Les motos Bella enr., un marchand local, est distributeur de motocyclettes. La saison prochaine, son propriétaire pense ajouter à ses activités la vente de véhicules récréatifs tout terrain. Pour débuter, il considère vendre au moins deux fois plus de motocyclettes que de véhicules tout terrain. Cette année, il a vendu 80 motocyclettes et, la saison prochaine, il prévoit vendre au moins 10 motocyclettes de plus. Il prévoit aussi vendre au moins 30 véhicules tout terrain. L'espace disponible d'entreposage ne lui permet pas de ranger plus de 150 unités. Trouvez, s'il fait en moyenne un profit de 300,00 $ par motocyclette et un bénéfice de 200,00 $ par véhicule tout terrain, le nombre de motocyclettes ainsi que le nombre de véhicules tout terrain qu'il doit commander pour maximiser son profit.

a) ....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

La lecture attentive d'un problème d'optimisation à données textuelles est primordiale pour en dégager les éléments qui permettront de le résoudre.

Deux types d'éléments sont importants à identifier dans un tel problème. Ce sont :

1° ....

....

....

2° ....

....

....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Attention aux pièges

Voici un problème d'optimisation à données textuelles pour lequel vous devrez identifier :

1° les éléments qui permettront d'établir la fonction à optimiser,

2° les éléments qui serviront à établir les contraintes.

À lire très attentivement...

Au mois de février de chaque année, dans le cadre de son carnaval d'hiver, la ville de Chicoutimi fourmille d'activités, plus particulièrement d'activités relatant « le bon vieux temps ».

À cette occasion, Jérémie et sa soeur Marie-Chantale organisent des balades en véritables traîneaux d'époque. Ils sont tirés par au moins 2 chevaux et au plus 4 chevaux. Un maximum de 6 passagers peuvent s'asseoir confortablement dans chacun des deux traîneaux, en plus du conducteur. Parmi les passagers, il devra y avoir au moins un adulte. Une randonnée dure un peu plus de 15 minutes. Pour ne pas endommager la structure des traîneaux, la charge maximale que peut accepter chacun des traîneaux est de 350 kg, outre le conducteur. Marie-Chantale et Jérémie évaluent la masse moyenne d'un adulte à 70 kg et celle d'un enfant à 35 kg. Durant les journées de fin de semaine, l'achalandage est grand et chaque traîneau peut faire jusqu'à 25 randonnées par jour. Le prix de la balade est fixé à 6,00 $ par adulte et à 4,00 $ par enfant.

Trouvez le nombre d'adultes et le nombre d'enfants à accepter pour une randonnée afin d'en maximiser les profits. Nos deux amis évaluent à 5,00 $ les frais fixes pour chaque balade effectuée.

1° ....

....

....

....

....

2° ....

....

....

....

....

Corrigé