MAT-4109-1

Ensembles, relations et fonctions

sofad

MAT-4109-1

ENSEMBLES, RELATIONS ET FONCTIONS

sofad

Chargé de projets en mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteurs : Serge Dugas
Louise Allard

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Alain Malouin

Réviseur pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseure linguistique : Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. Inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Première impression : 2005

Réimpression : 2006

Dépôt légal — 2005
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada
ISBN 2-89493-275-9

TABLE DES MATIÈRES

Présentation de l'ordinogramme 0.6
Ordinogramme du programme 0.7
Comment utiliser ce guide? 0.8
Introduction générale 0.11
Objectifs intermédiaires et terminaux du module 0.12
Épreuve diagnostique sur les préalables 0.23
Corrigé de l'épreuve diagnostique sur les préalables 0.27
Analyse des résultats de l'épreuve diagnostique 0.29
Suivez-vous ce cours en formation à distance? 0.31

SOUS-MODULES

1. Les ensembles de nombres et leurs descriptions 1.1
2. Relations ensemblistes d'inclusion et d'égalité 2.1
3. Opérations et suite d'opérations sur les ensembles 3.1
4. Opérations ensemblistes avec les nombres réels 4.1
5. Produit cartésien 5.1
6. Relations 6.1
7. Définition d'une relation en compréhension 7.1
8. Fonctions 8.1
9. Graphique cartésien d'une fonction 9.1
10. Paraboles 10.1
11. Équation d'une fonction polynomiale de degré 1 ou 2 .... 11.1
12. Description des caractéristiques de diverses fonctions 12.1
13. Analyse comparative de situations fonctionnelles 13.1

Synthèse finale 14.1
Corrigé de la synthèse finale 14.26
Objectifs terminaux 14.39
Épreuve d'autoévaluation 14.41
Corrigé de l'épreuve d'autoévaluation 14.59
Analyse des résultats de l'épreuve d'autoévaluation 14.67
Évaluation finale 14.68
Glossaire 14.69
Liste des symboles 14.75
Bibliographie 14.76

Activités de révision 15.1

Corrigé

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

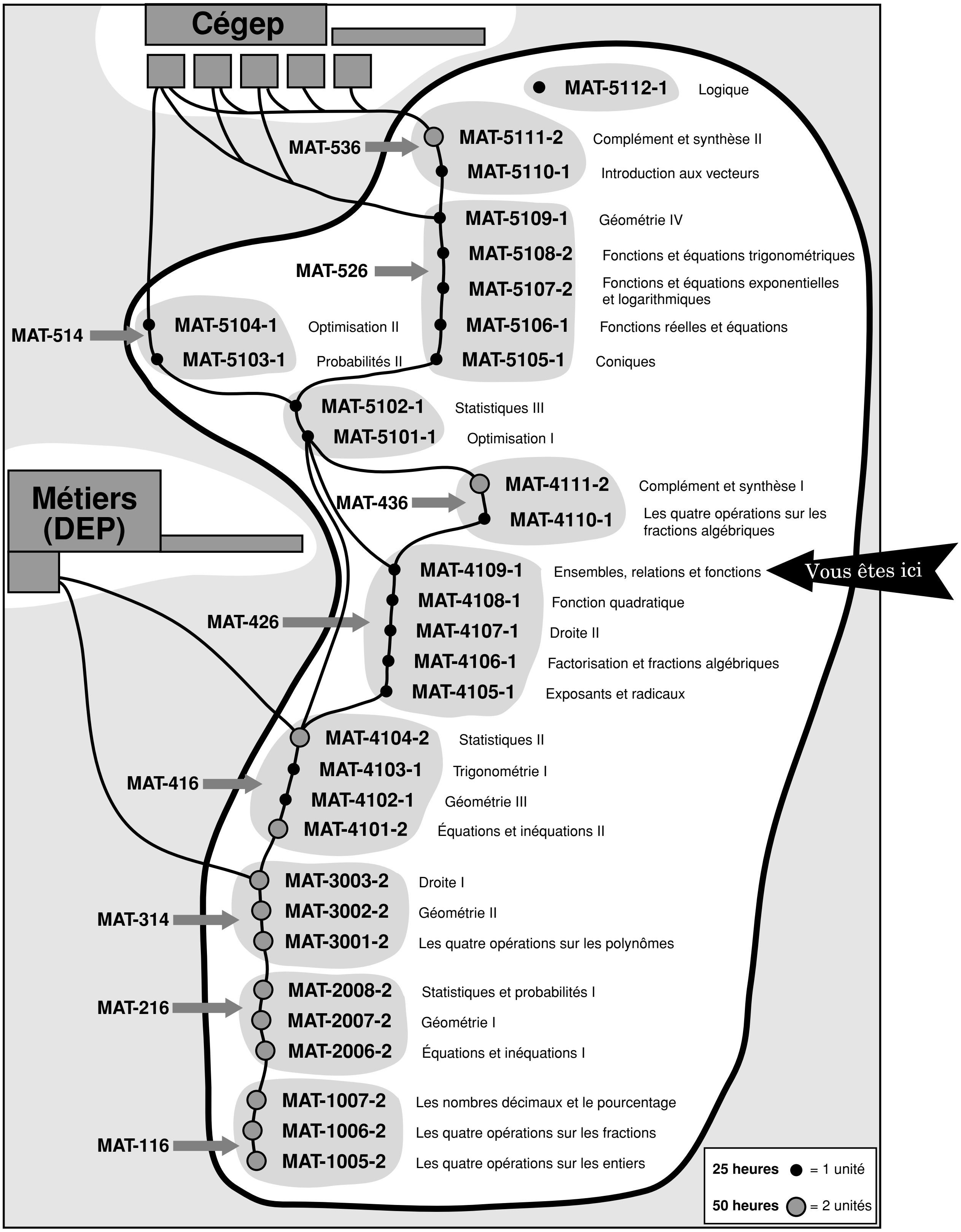
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

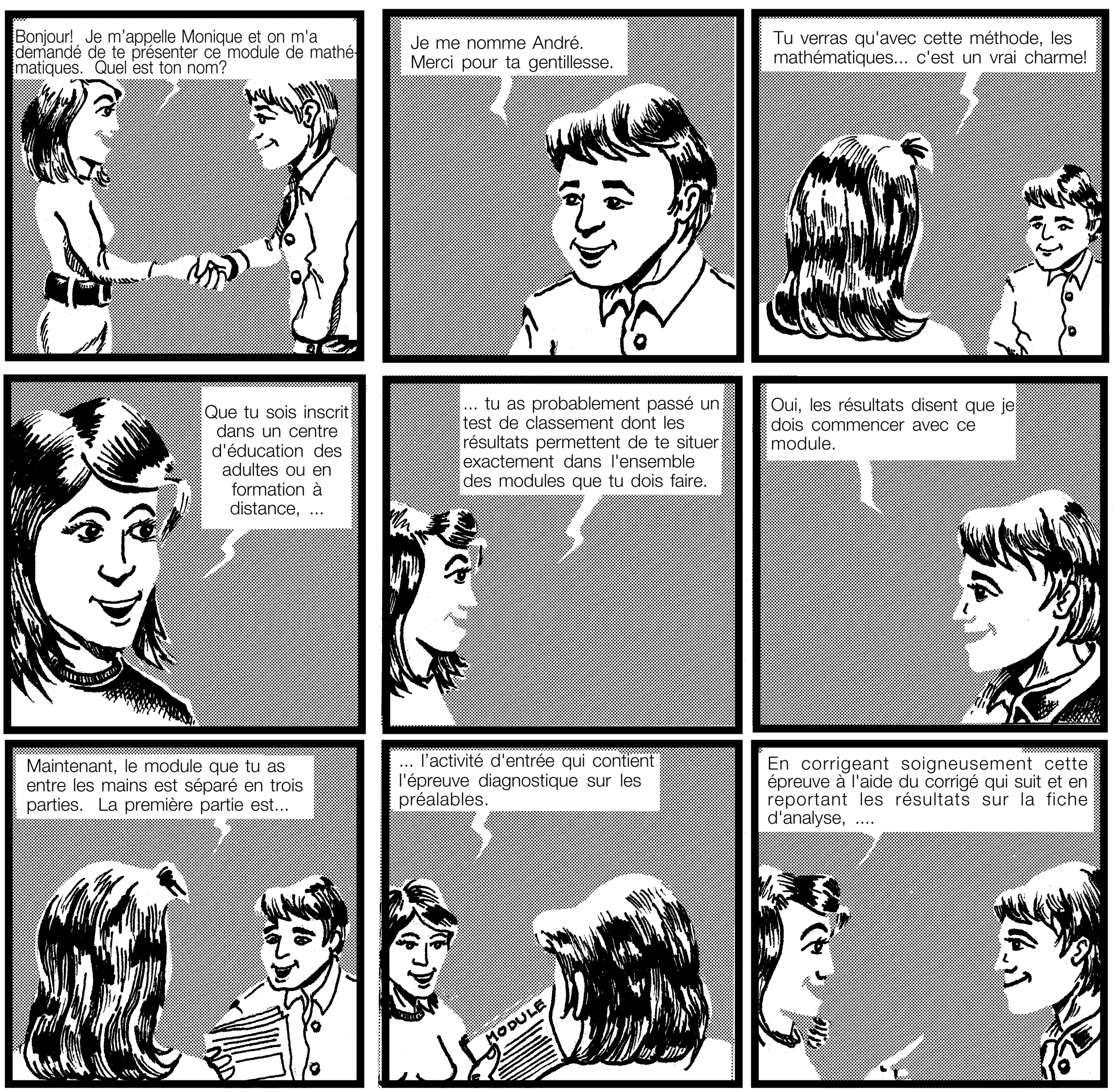
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au niveau collégial (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

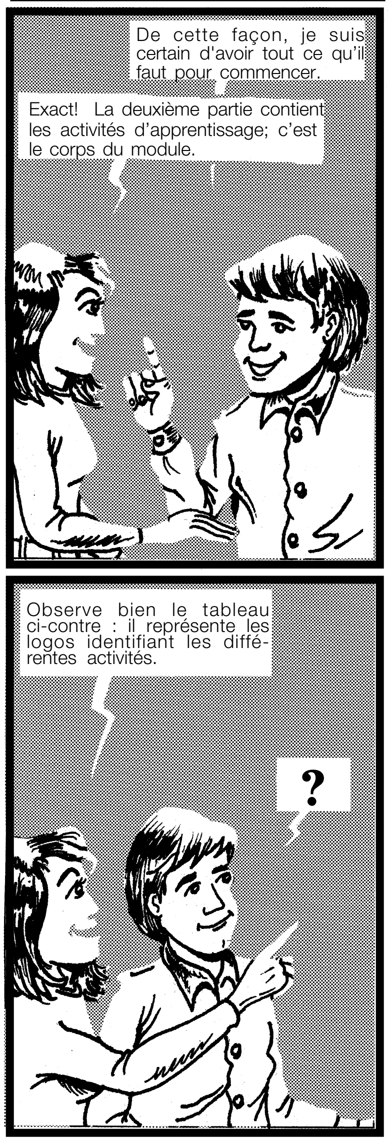
S'il s'agit de votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez la section intitulée « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la section intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?





DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

ENSEMBLES, RELATIONS ET FONCTIONS

Il n'y a pas une journée qui passe où nous ne devons pas associer ou regrouper des éléments, établir des liens entre des personnes ou des objets, ou encore faire des choix conscients ou non à partir de l'analyse d'une situation. Voilà donc ce dont nous allons traiter dans ce module, mais appliqué aux mathématiques.

Ainsi le cours de mathématiques MAT-4109-1 comporte trois grandes parties :

- les ensembles;
- les relations;
- les fonctions.

La première partie portant sur les ensembles vise surtout à vous donner une bonne maîtrise de la théorie des ensembles et du langage ensembliste.

La deuxième partie va vous permettre d'acquérir une bonne maîtrise du concept de relation et du langage formel qui en découle.

Les acquisitions de ces deux premières parties vont vous permettre d'aborder les fonctions, la partie la plus importante de ce module. Cette troisième partie va vous permettre de maîtriser les concepts inhérents à l'étude des fonctions, de découvrir diverses situations fonctionnelles, de les représenter et de les analyser.

Cet outil pédagogique est écrit dans un langage simple et clair sans sacrifice à la rigueur mathématique. Surtout, n'oubliez pas qu'en tout temps, vous êtes l'agent principal de votre apprentissage.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4109-1 comporte 25 objectifs et prévoit une durée d'apprentissage de 25 heures réparties comme dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombres d'heures*	% (évaluation)
1 à **6**	2	10 %
7 à **11**	1	5 %
12 et **13**	1	5 %
14 à 16	2	5 %
17	1	5 %
18	1	5 %
19	2	5 %
20 et **21**	3	10 %
22	3	10 %
23	4	20 %
24 et **25**	4	20 %

* Une heure est réservé à l'évaluation finale.

1. Description d'un ensemble de nombres entiers en extension, par diagramme de Venn ou en compréhension

   Étant donné un ensemble fini ou infini de nombres entiers ($\mathbb{Z}$) dont le contenu est déterminé par une inéquation de la forme, $x < n$, $x > n$, $n_1 < x < n_2$, $x \leq n$, $x \geq n$, $n_1 \leq x \leq n_2$, ou une caractéristique telle que les nombres premiers, les nombres pairs, les nombres impairs, les nombres carrés, les nombres cubes, les multiples d'un nombre donné ou les facteurs d'un nombre donné; décrire cet ensemble en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme de Venn. De plus, changer la description d'un ensemble donné en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme de Venn sous l'une ou l'autre des autres formes.

2. Relation d'appartenance d'un élément à un ensemble de nombres

   Exprimer la relation d'appartenance ou de non-appartenance par le symbolisme approprié, soit : $x \in$ E pour signifier l'appartenance de l'élément x à l'ensemble E et $x \notin$ E pour signifier la non-appartenance de l'élément x à l'ensemble E.

3. Relation d'inclusion ou d'égalité entre deux ensembles

   Déterminer s'il existe une relation d'inclusion ou une relation d'égalité entre deux ensembles donnés. Exprimer la relation d'inclusion par le symbole $\subseteq$ et la non-inclusion par le symbole $\nsubseteq$, la relation d'égalité par le symbole = et la non-égalité par le symbole $\neq$. De plus, parmi une liste d'ensembles, indiquer ceux qui sont des sous-ensembles d'un ensemble donné. La plupart des ensembles sont décrits en extension.

4. Suite d'opérations ensemblistes sur des ensembles décrits en extension

Étant donné un ensemble référentiel U, effectuer l'union ($\cup$), l'intersection ($\cap$) ou la différence ($\setminus$) entre deux ensembles donnés ou trouver le complément (') d'un ensemble donné en utilisant la symbolique approprié et en appliquant la définition appropriée parmi les suivantes :

- $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$,
- $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$,
- $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Les ensembles A et B sont des ensembles finis ou infinis exprimés en extension.

5. Description d'un ensemble de nombres réels graphiquement, en compréhension ou en notation par intervalle

Étant donné un ensemble fini ou infini de nombres faisant partie de l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$) dont le contenu est déterminé par une inéquation ou des caractéristiques et étant donné un intervalle de nombres réels décrit en compréhension, représenter celui-ci sur la droite numérique ou l'exprimer sous la forme appropriée parmi les suivantes :

$$[a, b] \qquad [a, b[\qquad]a, b] \qquad]a, b[$$
$$[a, \infty \qquad]a, \infty \qquad -\infty, b] \qquad -\infty, b[$$

où a et b correspondent aux bornes de l'intervalle. De plus, représenter sur la droite numérique un intervalle donné entre crochets et vice versa.

6. Suite d'opérations ensemblistes

Effectuer une suite de deux opérations ensemblistes ($\cup, \cap, \backslash, '$) sur au plus trois ensembles de nombres réels notés par intervalle, sur la droite numérique ou décrits en compréhension. Le résultat de l'opération doit être présenté sous forme d'intervalle, sur la droite numérique ou décrit en compréhension.

7. Produit cartésien de deux ensembles

Trouver le produit cartésien de deux ensembles présentés en extension, en compréhension ou à l'aide d'un diagramme de Venn en utilisant le symbolisme approprié soit, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$ pour signifier le produit cartésien d'un ensemble A par un ensemble B.

8. Distinction entre les ensembles de départ et d'arrivée

Trouver les ensembles de départ et d'arrivée qui sont des sous-ensembles finis ou infinis de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Par définition, le premier ensemble d'un produit cartésien s'appelle l'ensemble de départ et le deuxième, l'ensemble d'arrivée.

9. Relation en tant que sous-ensemble d'un produit cartésien

Étant donné le produit cartésien de deux ensembles et une règle de correspondance entre les éléments de ces deux ensembles, décrire une relation formée d'un sous-ensemble du produit cartésien avec tous les éléments qui respectent la règle énoncée en utilisant le symbolisme approprié.

10. Ensembles de départ et d'arrivée, domaine et image en précisant l'inclusion ou l'égalité

    Trouver les ensembles de départ et d'arrivée, le domaine et l'image qui sont des sous-ensembles finis ou infinis de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$. Par définition, l'ensemble des premières coordonnées des couples faisant partie de l'ensemble solution s'appelle le domaine et les deuxièmes coordonnées, l'image. De plus, déterminer s'il existe une relation d'inclusion ou d'égalité entre ces ensembles.

11. Relation en compréhension

Définir en compréhension une relation donnée graphiquement. La règle de correspondance doit s'exprimer par une équation ou une inéquation du premier degré à une ou deux variables dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, déterminer le domaine et l'image de la relation.

12. Représentation graphique d'une inéquation

    Représenter graphiquement, à l'aide d'un plan cartésien, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une inéquation du premier degré à une ou deux variables.

13. Représentation par un graphique cartésien d'une relation définie en compréhension

Représenter par un graphique cartésien une relation définie en compréhension dans un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La règle de correspondance doit se traduire par une équation ou une inéquation de premier degré à une ou deux variables. De plus, trouver le domaine et l'image de cette relation et décrire ces ensembles en compréhension.

14. Détermination d’une fonction

Dans une situation concrète décrite par un énoncé, par un graphique, par une table de valeurs ou par sa règle de correspondance, déterminer si cette relation est une fonction ou non, c’est-à-dire si chaque élément utilisé dans l’ensemble de départ correspond à au plus un élément de l’ensemble d’arrivée.

15. Détermination de la variable dépendante et indépendante dans une situation fonctionnelle

Étant donné une fonction représentée en compréhension, en extension, à l’aide d’une représentation par diagramme de Venn ou à l’aide d’un plan cartésien, déterminer la variable dépendante, soit celle dont les valeurs sont influencées par les valeurs de l’autre variable dite variable indépendante.

16. Détermination d’une fonction à l’aide de la notation fonctionnelle

Déterminer l’ensemble de départ, l’ensemble d’arrivée ainsi que la règle de correspondance et représenter le tout en utilisant le symbolisme approprié de la notation fonctionnelle soit,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \text{ où } f(x) \text{ est la règle de correspondance.} \end{aligned}$$

17. Extraction de renseignements

Extraire les renseignements à partir du graphique de fonctions diverses.

18. Description des caractéristiques d'une fonction

À partir d'une situation fonctionnelle décrite à l'aide d'un graphique cartésien, décrire les caractéristiques de cette fonction :

- taux de variation;
- type de variation;
- croissance ou décroissance;
- domaine et image;
- signe;
- existence de maximums ou de minimums;
- abscisse ou abscisses à l'origine (zéros);
- ordonnée à l'origine;
- existence d'axe de symétrie.

19. Représentation graphique d'une parabole

Tracer une parabole à partir d'une équation sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ ou $y = a(x - h)^2 + k$ et comprendre le lien entre la forme canonique et la forme générale de l'équation. Les caractéristiques de chacune des courbes doivent être précisées sur le graphique (sommet, zéro(s), ordonnée à l'origine).

20. Équation canonique ou générale d'une parabole

Déterminer l'équation canonique ou générale d'une parabole dont nous connaissons soit le sommet et un autre de ses points, soit ses zéros et un autre point. À partir des coordonnées du sommet et d'un autre point ou des zéros et d'un autre point, déterminer l'équation d'une fonction quadratique sous la forme canonique ($f(x) = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$) et sous la forme générale ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$).

21. Recherche de l'équation d'une fonction à partir d'un énoncé textuel

À partir d'un énoncé textuel décrivant une situation fonctionnelle à l'aide des données pertinentes, rechercher l'équation de la fonction qui décrit cette situation, puis écrire cette équation en notation fonctionnelle.

La situation proposée doit pouvoir être décrite par l'une des fonctions suivantes :
- **une fonction polynomiale de degré 1, étant donné deux points ou la pente et un point;**
- **une fonction polynomiale de degré 2, étant donné les zéros et un point, ou encore le sommet et un point.**

22. Passage d'un mode de représentation à un autre

Effectuer le passage d'un mode de représentation d'une fonction à un autre en se rapportant aux cases ombrées du tableau ci-dessous.

DE \ À	Énoncé	Table de valeurs	Graphique	Règle ou équation
Énoncé				**(1)**
Table de valeurs				**(1)**
Graphique				**(1)**
Règle ou équation			**(2)**	

(1) Pour la transformation d'un énoncé, d'une table de valeurs, d'un graphique ou d'une règle ou équation, se limiter aux cas suivants :
- une fonction polynomiale de degré 1, étant donnée deux points ou la pente et un point;
- une fonction polynomiale de degré 2, étant donné les zéros et un point, ou encore le sommet et un point.

(2) Pour la transformation d'une règle ou équation en graphique, envisager des situations très variées telles les fonctions polynomiales, les fonctions de variation inverse, les fonctions rationnelles, les fonctions racine carrée, les fonctions en escalier, les fonctions valeur absolue, les fonctions exponentielles, etc. On pourra alors recourir à un outil technologique s'il s'agit d'une fonction qui n'a pas encore été vue dans ce cours ou un cours antérieur.

23. Représentation graphique d'une situation fonctionnelle

À partir d'une situation fonctionnelle décrite à l'aide d'un énoncé, d'une table des valeurs ou d'une règle, produire le graphique cartésien correspondant, à l'aide d'un outil technologique si nécessaire, et décrire les caractéristiques de la fonction.

24. Détermination des valeurs du domaine ou de l'image d'une situation fonctionnelle

Déterminer ou estimer certaines valeurs du domaine ou de l'image dans une situation fonctionnelle décrite à l'aide d'un énoncé, d'un graphique cartésien ou d'une règle. La situation peut être décrite par la combinaison de deux ou plusieurs fonctions sur des intervalles consécutifs.

25. Analyse comparative de situations fonctionnelles

Résoudre des problèmes en effectuant une analyse comparative de situations fonctionnelles analogues. Chaque situation doit être décrite par une fonction présentée sous forme d'un énoncé, d'une table de valeurs, d'une règle de correspondance ou d'un graphique.

Ce module comporte 25 objectifs. Nous avons regroupé leur étude comme dans le tableau ci-dessous.

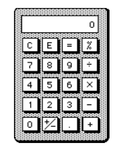
Sous-module	Objectif(s)	
1	Description d'un ensemble de nombres entiers Relation d'appartenance	1 2
2	Relation d'inclusion ou d'égalité	3
3	Suite d'opérations ensemblistes sur des ensembles décrits en extension	4
4	Description d'un ensemble de nombres réels **Suite d'opérations ensemblistes**	5 6
5	Produit cartésien de deux ensembles Distinction entre les ensembles de départ et d'arrivée	7 8
6	Relation en tant que sous-ensemble d'un produit cartésien Ensembles de départ et d'arrivée, domaine et image en précisant l'inclusion ou l'égalité **Relation en compréhension**	9 10 11
7	Représentation graphique d'une inéquation **Représentation par un graphique cartésien d'une relation définie en compréhension**	12 13
8	Détermination d'une fonction Détermination de la variable dépendante et indépendante Détermination d'une fonction à l'aide de la notation fonctionnelle	14 15 16
9	Extraction de renseignements Description des caractéristiques d'une fonction	17 18
10	Représentation graphique d'une parabole Équation canonique ou générale d'une parabole	19 20
11	**Recherche de l'équation d'une fonction à partir d'une énonce textuel**	21
12	Passage d'un mode de représentation à un autre **Représentation graphique d'une situation fonctionnelle**	22 23
13	**Détermination des valeurs du domaine ou de l'image d'une situation fonctionnelle** **Analyse comparative de situations fonctionnelles**	24 25

Corrigé

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.



2° L'utilisation de la calculatrice est permise.

3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez les réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être acceptées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

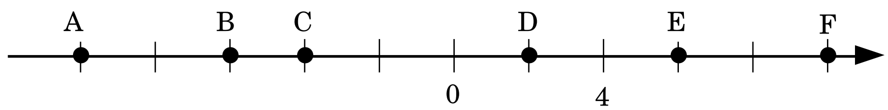
8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Énumérez :

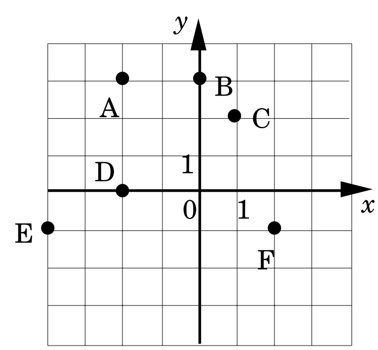
   a) tous les nombres premiers inférieurs à 30. ....
   b) tous les facteurs ou diviseurs de 30. ....
   c) tous les multiples de 6. ....
   d) tous les diviseurs de 50. ....
   e) tous les nombres premiers pairs. ....

2. Soit la droite numérique ci-dessous.



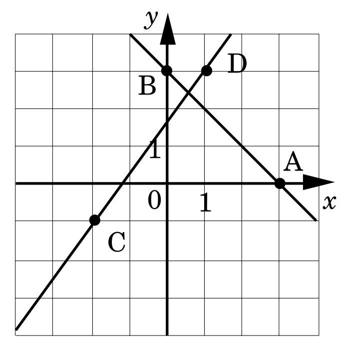
   a) Quelle est la coordonnée de chacun des points suivants?
      A : .... ; B : .... ; C : .... ; D : .... ;
   b) Quel est le point dont la coordonnée est 6? ....
   c) Placez le point H sur la droite ci-dessus si sa coordonnée est –8.

3. Soit le système de coordonnées cartésiennes ci-contre.



   a) Trouvez les coordonnées des points suivants.
      A : .... B : .... C : ....
      D : .... E : .... F : ....
   b) Quel est l'abscisse du point A? ....
   c) Quelle est l'ordonnée du point C? ....
   d) Nommez un point du quadrant II. ....
   e) Nommez un point situé sur l'axe des x. ....
   f) Donnez un synonyme de « axe des y ». ....

4. Soit le graphique cartésien ci-contre.

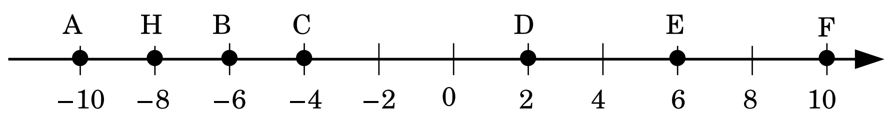


Déterminez l'équation des droites AB et CD et écrivez-les sous la forme $y = mx + b$.

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
   b) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
   c) 0, 6, 12, 18, 24, 30, …
   d) 1, 2, 5, 10, 25, 50
   e) 2

2. a) A : –10; B : –6; C : –4; D : 2.
   b) E
   c)



3. a) A(–2, 3), B(0, 3), C(1, 2), D(–2, 0), E(–4, –1), F(2, –1).

   b) –2 c) 2 d) A e) D f) Ordonnée

4. a) Équation de la droite AB

   Soit A(3, 0) et B(0, 3). Calculons la pente.

   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 3} = \frac{3}{-3} = -1$$

   Puisque $m = -1$ et $b = 3$ (ordonnée à l'origine), nous pouvons écrire directement $y = -1x + 3$.

   L'équation de la droite AB est alors $y = -x + 3$.

b) Équation de la droite CD

Soit C(–2, –1) et D(1, 3). Calculons la pente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{1 - (-2)} = \frac{3 + 1}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

Alors, $\frac{4}{3} = \frac{y - 3}{x - 1}$

$$3(y - 3) = 4(x - 1)$$
$$3y - 9 = 4x - 4$$
$$3y = 4x - 4 + 9$$
$$3y = 4x + 5$$
$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

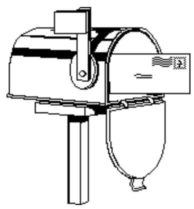
L'équation de la droite CD est alors $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			15.1	15.4	Sous-module 1
b)			15.1	15.4	Sous-module 1
c)			15.1	15.4	Sous-module 1
d)			15.1	15.4	Sous-module 1
e)			15.1	15.4	Sous-module 1
2. a)			15.2	15.11	Sous-module 4
b)			15.2	15.11	Sous-module 4
c)			15.2	15.11	Sous-module 4
3. a)			15.3	15.14	Sous-module 5
b)			15.3	15.14	Sous-module 5
c)			15.3	15.14	Sous-module 5
d)			15.3	15.14	Sous-module 5
e)			15.3	15.14	Sous-module 5
f)			15.3	15.14	Sous-module 5
4. a)			15.3	15.14	Sous-module 6
b)			15.3	15.14	Sous-module 6

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités proposées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4109-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4109-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

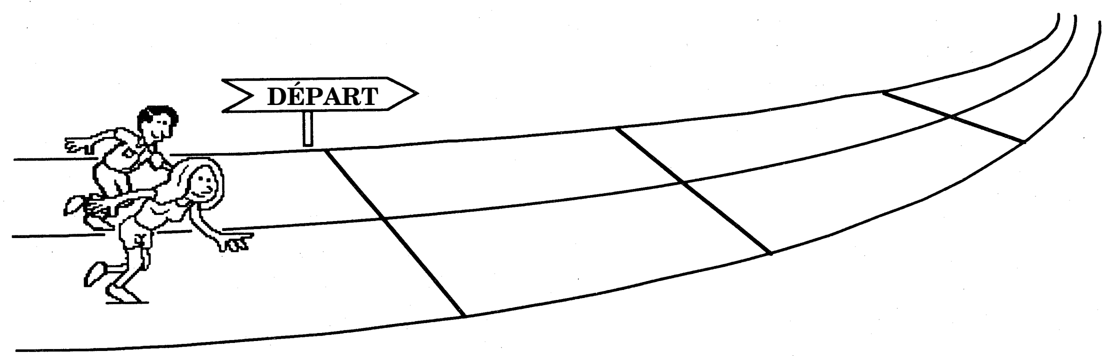
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 7.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 8 à 13.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 13.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

LES ENSEMBLES DE NOMBRES ET LEURS DESCRIPTIONS

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Ensemble et famille

Antoine veut faire comprendre la notion d'**ensemble** à ses amis. Il les amène chez le plus gros disquaire de la région et leur demande d'observer la répartition en sections des différents disques.

Antoine leur explique que toutes les catégories de disques font partie d'un grand ensemble. À l'intérieur de celui-ci, il y a des sous-catégories : pop rock , rap, jazz, classique, etc. Ce sont d'autres ensembles. De plus, il y a encore d'autres ensembles de possible, car à l'intérieur de la section pop rock, il peut y avoir du pop rock francophone et du pop rock anglophone .

Ils ont donc compris qu'un ensemble est une collection d'objets ou encore un groupe de personnes qui ont des caractéristiques communes. Antoine aurait pu amener ses amis dans la majorité des magasins ou sur n'importe quel site de vente par Internet pour leur expliquer le concept d'ensemble.

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable d'indiquer si un élément donné appartient ou non à un ensemble de nombres. De plus, vous devrez être capable de décrire un ensemble de nombres entiers en *extension*, en *compréhension* ou par *diagramme de Venn*.

Dans la vie courante et en mathématiques également, le terme « ensemble » est une notion très employée. Un ensemble regroupe des objets, des personnes ou des nombres qui ont un lien quelconque et forment un tout bien défini. Chaque objet faisant partie d'un ensemble porte le nom d'« élément ».

> Un **ensemble** est une collection bien déterminée de nombres, d'objets ou de personnes distinctes, ayant habituellement une ou plusieurs caractéristiques communes, appelés « éléments de l'ensemble ».

Quand des éléments ont une relation particulière entre eux, nous pouvons les définir comme faisant partie d'un certain ensemble. Cette relation particulière peut être aussi simple qu'une couleur, un lien familial ou amical, un regroupement de nombres, etc.

Il existe trois façons différentes de représenter un ensemble :
1° la représentation en extension;
2° la représentation en compréhension;
3° la représentation par diagramme de Venn.

Le choix de l'une ou l'autre de ces représentations varie selon son utilisation dans la solution du problème proposé.

Représentation en extension

Nous pouvons représenter un ensemble en énumérant, sans répétition, les éléments qui appartiennent à cet ensemble. Ce procédé qui illustre tous les éléments les uns à la suite des autres s'appelle « représentation en extension d'un ensemble ».

Représenter un ensemble en extension consiste à énumérer sans répétition et entre accolades les éléments qui appartiennent à cet ensemble. L'ensemble est nommé par une lettre majuscule.

Exemple 1

Décrivons en extension l'ensemble A des ***nombres naturels*** plus petits que 5.

Nous le notons A = {0, 1, 2, 3, 4}.

Nous remarquons qu'aucun élément n'a été omis et que de plus, chacun correspond aux caractéristiques recherchées.

Dans toute représentation en extension, nous devons obligatoirement respecter les règles d'écriture suivantes :

1° une lettre majuscule sert à nommer un ensemble;
2° le symbole = est placé après la majuscule;
3° les éléments sont placés entre accolades et séparés par des virgules;
4° chacun des éléments n'est nommé qu'une seule fois;
5° l'ordre des éléments n'est pas important; toutefois, pour faciliter la lecture des ensembles contenant des nombres, il est préférable de les placer en ordre croissant ou décroissant;
6° des points de suspension sont utilisés lorsque nous ne pouvons énumérer tous les éléments d'un ensemble; ces points de suspension sont précédés d'une virgule et remplacent les éléments non énumérés.

Voici quelques exemples qui illustrent la représentation en extension d'un ensemble donné.

Exemples 2

a) Écrivons en extension l'ensemble A des ***nombres*** naturels ***pairs*** inférieurs à 10.

Alors, A = {0, 2, 4, 6, 8}.

Nous remarquons que les éléments de cet ensemble rencontrent les caractéristiques que nous voulons pour cet ensemble : les éléments sont des nombres naturels pairs et sont inférieurs à 10.

Chacun des éléments de cet ensemble correspond à cette définition : aucun élément n'a été omis et aucun élément n'ayant pas les caractéristiques recherchées n'en fait partie.

b) Décrivons l'ensemble M des nombres naturels qui sont multiples de 4.

Nous obtenons M = {0, 4, 8, 12, 16, 20, ...}.

Cette fois-ci, nous avons utilisé les points de suspension puisque l'ensemble demandé n'a pas un nombre fini d'éléments. Nous énumérons à ce moment-là 5 ou 6 éléments qui nous permettent de reconnaître aisément l'ensemble donné.

Si, par exemple, nous avions écrit M = {0, 4, ...}, nous aurions pu penser que cet ensemble représentait l'ensemble des carrés des nombres naturels pairs.

rappel

$\mathbb{N}$: *l'ensemble des nombres naturels*
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

$\mathbb{Z}$: *l'ensemble des* ***nombres entiers***
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Q}$: *l'ensemble des* ***nombres rationnels***
$\mathbb{Q} = \{...; -50, ...; -4{,}2, ...; -\frac{1}{2}, ...; 0, ...; 1; ...; \frac{15}{4}; ...\}$

Exercice 1.1

1. Représentez en extension les ensembles suivants.

   a) L'ensemble A des nombres naturels impairs inférieurs à 16.

   ....

   b) L'ensemble B des carrés des 5 premiers nombres naturels pairs.

   ....

   c) L'ensemble C des nombres entiers compris entre −6 et 6.

   ....

   d) L'ensemble D des nombres entiers inférieurs à 2.

   ....

   e) L'ensemble E des nombres entiers supérieurs à −2.

   ....

Un **ensemble fini** est un ensemble dont nous pouvons déterminer le nombre exact d'éléments c'est-à-dire son cardinal.
Un **ensemble infini** est un ensemble dont l'énumération des éléments n'a pas de fin.

Exemple 3

a) Décrivons en extension, l'ensemble A des nombres entiers plus petits ou égal à 5.

Nous obtenons A = {..., –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}.

b) Représentons en extension, l'ensemble B des nombres entiers plus grands ou égal à 5.

Nous obtenons B = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}.

c) Exprimons en extension l'ensemble C des nombres entiers pairs compris entre –200 et 200.

Nous obtenons C = {–198, –196, –194, ..., 194, 196, 198}.

Nous remarquons dans le présent exemple que tous les ensembles exprimés en extension comprennent les trois points de suspension mais que seuls les ensembles A et B sont infinis. Dans l'ensemble C, l'énumération étant trop longue, nous devons l'écourter. L'énumération des premiers et des derniers éléments est suffisante pour nous permettre de reconnaître l'ensemble donné.

Le ***cardinal d'un ensemble*** est le nombre d'éléments que possède cet ensemble. Le cardinal de l'ensemble E est noté n(E).

Ainsi, l'ensemble A = {0, 2, 4, 6, 8} est un ensemble fini et n(A) = 5, tandis que M = {0, 4, 8, 12, 16, 20, ...} est un ensemble infini dont nous ne pouvons déterminer le nombre exact d'éléments.

? Quel est le cardinal d'un ensemble qui ne possède aucun élément? ....

En effet, le cardinal d'un tel ensemble est 0 et il est appelé « ensemble vide ».

Un **ensemble vide** est un ensemble qui ne contient aucun élément. Nous le notons { } ou Ø qui se lit « phi ».

Nous pouvons aussi, à partir d'un ensemble décrit en extension, retrouver la description en mots de cet ensemble. Nous devrons alors donner le plus de caractéristiques possibles de cet ensemble pour ne pas le confondre avec un autre.

Exemple 4

Soit l'ensemble A = {16, 20, 24, 28, 32, 36, ...}.

En examinant les éléments de cet ensemble, nous voyons que :
1° ce sont tous des nombres naturels;
2° ce sont tous des multiples de 4;
3° ces multiples de 4 sont tous supérieurs ou égaux à 16.

Nous pouvons alors en déduire que ces éléments représentent l'ensemble suivant : *les nombres naturels multiples de 4 supérieurs ou égaux à 16*.

Soit B = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}.

? Que pouvons-nous dire des éléments de l'ensemble B?

....

? Décrivez le plus exactement possible cet ensemble en mots.

....

Les éléments de l'ensemble B sont tous des carrés. Nous pouvons alors écrire que l'ensemble B est l'ensemble des nombres naturels qui sont des carrés.

Exercice 1.2

1. Représentez en extension les ensembles demandés, dites s'ils sont finis ou infinis et donnez leur cardinal, s'il y a lieu.

   a) Les ***nombres*** naturels ***impairs***.

   A = ...

   b) Les nombres naturels multiples de 5 et inférieurs à 200.

   B = ...

   c) Les ***nombres premiers*** inférieurs à 50.

   C = ...

   d) Les carrés des 8 premiers nombres naturels.

   D = ...

e) Les diviseurs de 24.

E = ...

f) Les entiers inférieurs à 4 et supérieurs à -3.

F = ...

g) Les cubes des 6 premiers nombres naturels.

G = ...

h) Les nombres naturels inférieurs à 0.

H = ...

2. Donnez les caractéristiques des ensembles écrits en extension.

a) A = {0, 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100}

....

b) B = {0, 8, 16, 24, 32, ...}

....

c) C = {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3}

....

d) D = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

....

e) E = {1, 8, 27, 64}

....

f) F = {3, 4, 5, 6}

....

g) G = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

....

h) H = {0, 2, 4, ..., 94, 96, 98}

....

3. Notre typographe étant distrait, il a fait quelques erreurs en écrivant en extension certains ensembles. Corrigez ses erreurs.

a) A = {1 2 3 4 5} ....

b) B = {8, 8, 9, 10, 11, 11, 12} ....

c) c = {13, 14, 15, 16, 17, ...} ....

d) D = 1, 3, 5, 7, 9, 11 ....

Pour confirmer qu'un ensemble est bien défini, nous devons être en mesure de déterminer si chacun de ses éléments appartient ou non à cet ensemble.

Pour indiquer qu'un élément appartient à un ensemble, nous employons le symbole d'***appartenance*** que nous notons $\in$. Par exemple, quand nous employons la notation $x \in$ C, cela veut dire que l'élément x fait partie de l'ensemble C, est un élément de l'ensemble C ou encore que x appartient à l'ensemble C.

Nous savons que l'élément 4 fait partie de l'ensemble des nombres naturels pairs : P = {0, 2, 4, 6, 8, ...}. Nous pouvons donc écrire 4 $\in$ P.

Pour indiquer qu'un élément x **appartient** à un ensemble donné A, nous écrivons $x \in$ A.

$x \in$ A se lit : x est élément de l'ensemble A

ou encore

x appartient à l'ensemble A.

Dans le cas où un élément n'appartient pas à un ensemble donné, nous utilisons alors le symbole $\notin$. Le nombre 7 n'étant pas élément de l'ensemble des nombres naturels pairs P, nous écrivons donc $7 \notin$ P.

> Pour indiquer qu'un élément x **n'appartient pas** à un ensemble donné A, nous écrivons $x \notin$ A.
>
> $x \notin$ A se lit : x n'est pas élément de l'ensemble A
>
> ou encore
>
> x n'appartient pas à l'ensemble A.

Exemple 5

Soit A= $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

Nous pouvons écrire $-3 \in$ A, $-2 \in$ A, $-1 \in$ A, $0 \in$ A, $1 \in$ A.

$-3 \in$ A se lit : -3 est élément de l'ensemble A

ou encore

-3 fait partie de l'ensemble A.

Nous pouvons aussi écrire $3 \notin$ A, $5 \notin$ A, $7 \notin$ A.

$3 \notin$ A se lit : 3 n'est pas un élément de l'ensemble A

ou encore

3 ne fait pas partie de l'ensemble A.

Nous pouvons aussi utiliser le symbole $\notin$ pour tous les autres nombres, sauf ceux faisant partie de l'ensemble A.

Pour trouver si un élément x appartient ou non à un ensemble donné A, nous devons :

1° chercher les éléments qui appartiennent à l'ensemble A et les écrire en extension;

2° vérifier si l'élément x appartient ou non à l'ensemble A;

3° écrire selon le cas $x \in$ A ou $x \notin$ A.

Exemple 6

A est l'ensemble des diviseurs de 12. Vérifions si les deux énoncés suivants sont vrais : $2 \in$ A, $8 \in$ A.

1° A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

2° L'élément 2 appartient à l'ensemble A mais non l'élément 8.

3° Nous pouvons donc écrire $2 \in$ A et $8 \notin$ A.

Exercice 1.3

1. Si A est l'ensemble des diviseurs de 40, dites si les énoncés suivants son vrais ou faux.

a) $2 \in$ A .... b) $0 \notin$ A .... c) $80 \in$ A ....

d) $1 \notin$ A .... e) $\frac{1}{2} \notin$ A .... f) $a \in$ A ....

2. Soit A = {1, 2, 8, 9} et B = {2, 4, 7, 8}, complétez par $\in$ ou $\notin$.

a) 2 ...... A b) 1 ...... A c) 4 ...... A

d) 2 ...... B e) 8 ...... B f) 9 ...... B

3. Indiquez, en utilisant le symbole approprié, si les éléments suivants appartiennent à l'ensemble A = {−50, 5, 10, 50}.

a) −50 ...... A b) −10 ...... A c) 1 ...... A

d) 10 ...... A e) −5 ...... A f) 0 ...... A

Représentation en compréhension

Une deuxième façon de représenter un ensemble consiste à donner une ou des propriétés qui sont satisfaites par tous les éléments de cet ensemble et par aucun autre objet qui n'appartient pas à cet ensemble : c'est la description d'un ensemble en **compréhension**.

Les caractéristiques communes à tous les éléments de l'ensemble doivent être suffisamment précises pour que nous ne puissions en faire qu'une seule interprétation permettant ainsi de repérer ces éléments, et seulement ceux-ci, sans avoir à les énumérer. Cette représentation est plus concise.

> **Représenter un ensemble en compréhension** consiste dans un premier temps, à indiquer à quel ensemble de nombres les éléments appartiennent (***référentiel***), et dans un deuxième temps, à indiquer la ou les propriétés communes à tous les éléments de cet ensemble. Le tout doit être entre accolades et précédé du nom de l'ensemble en majuscule.

Puisque nous ne devons énumérer aucun élément appartenant à l'ensemble, une lettre minuscule généralement choisie entre x, y ou z servira à désigner tous les éléments de l'ensemble.

Voyons l'écriture d'un ensemble en compréhension en nous servant d'un exemple.

Exemple 7

Soit l'ensemble décrit en extension A = {..., −9, −6, −3, 0, 3, 6, 9, ...}.

Représentons cet ensemble en compréhension.

1° Choisissons x pour représenter les éléments de cet ensemble.

2° Puisque les éléments de cet ensemble font partie de l'ensemble $\mathbb{Z}$, celui-ci devient l'***ensemble de référence*** et nous pouvons alors écrire :

$$x \in \mathbb{Z}$$

3° Puisque chacun des éléments de cet ensemble est un multiple de 3, nous écrivons :

x est un multiple de 3.

4° Pour relier ces deux phrases mathématiques, nous utilisons la barre verticale (|) qui se lit : « tel que ».

5° Nous mettons ensuite tous ces éléments entre accolades et les faisons précéder du nom de cet ensemble.

Nous obtenons A = {$x \in \mathbb{Z} \mid x$ est un multiple de 3}.

Cette phrase mathématique se lit : *A est l'ensemble des éléments x appartenant à l'ensemble des entiers tel que x est un multiple de 3.*

Nous pouvons constater que nous avons dans la définition en compréhension toutes les caractéristiques de l'ensemble sans avoir énuméré un seul élément de l'ensemble, et ceci grâce au langage et aux symboles mathématiques.

Pour représenter un ensemble en compréhension, nous devons :

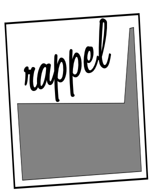
1° choisir une variable qui représente les éléments de l'ensemble;

2° trouver l'ensemble de référence et le relier à la variable par le symbole d'appartenance;

3° trouver la ou les caractéristiques communes à tous les éléments et les exprimer en langage mathématique;

4° relier ces deux phrases mathématiques par le symbole | (tel que);

5° placer le tout entre accolades en les faisant précéder du nom de cet ensemble.



Pour exprimer des relations d'ordre entre des nombres nous pouvons utiliser les symboles mathématiques suivants :

$<$ *qui signifie plus petit que;*

$>$ *qui signifie plus grand;*

$=$ *qui signifie égal;*

$\leq$ *qui signifie plus petit ou égal;*

$\geq$ *qui signifie plus grand ou égal.*

Exemple 8

Soit B = {7, 8, 9, 10, 11}.

Les caractéristiques des éléments de B sont les suivantes :

- ce sont des nombres naturels : $x \in \mathbb{N}$;
- ces nombres sont compris entre 6 et 12 exclusivement, alors $6 < x < 12$.

Nous écrivons donc $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 12\}$.

Cette phrase se lit : *B est l'ensemble des éléments x appartenant à l'ensemble des nombres naturels tel que x est compris entre 6 et 12.*

Notons que nous pouvons tout aussi bien décrire cet ensemble en compréhension de la manière suivante :

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\},$$
$$\text{ou } B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x \leq 11\},$$
$$\text{ou } B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}.$$

rappel

Pour représenter un nombre naturel compris entre 6 et 12, nous pouvons écrire $6 < x < 12$: ces nombres sont 7, 8, 9, 10, 11, car x ne peut valoir ni 6 ni 12. Nous pouvons aussi écrire $7 \leq x \leq 11$: x est compris entre 7 et 11 et peut valoir 8, 9, 10; de plus, l'égalité (sous l'inégalité) indique que x peut valoir 7 ou 11, donc x peut prendre comme valeur 7, 8, 9, 10, 11. Nous pouvons aussi combiner ces deux notations et obtenir $6 < x \leq 11$ ou $7 \leq x < 12$.

☞ **Attention**, ces notations en compréhension ne sont pas équivalentes si nous avons un autre ensemble de référence, par exemple $\mathbb{Q}$.

Pourquoi les ensembles A et B ne sont-ils pas équivalents si

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 < x < 6\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 4 \leq x \leq 5\}?$$

....

....

....

Dans l'ensemble A, nous retrouvons tous les éléments de $\mathbb{Q}$ qui sont supérieurs à 3 et inférieurs à 6. Dans B par contre, ce sont tous les éléments de $\mathbb{Q}$ à partir de 4 jusqu'à 5. Il manque donc des éléments rationnels dans B pour que ces deux ensembles représentent les mêmes éléments. Par exemple, $3{,}5 \in A$ mais $3{,}5 \notin B$.

La prudence est de mise quand il s'agit de décrire un ensemble en compréhension : connaître l'ensemble de référence et employer avec discernement les symboles <, >, ≤ et ≥.

La prochaine étape consiste à faire l'inverse de ce que nous venons de voir : à partir d'un ensemble décrit en compréhension, nous devons définir cet ensemble en extension.

Exemple 9

Soit l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un nombre premier diviseur de } 12\}$. Décrivons cet ensemble en extension.

De cette description en compréhension, nous retenons :

- les éléments sont des nombres naturels;
- les éléments sont des nombres premiers;
- les éléments sont des diviseurs de 12.

Les éléments qui ont les caractéristiques mentionnées sont 2 et 3.

Nous écrivons donc $C = \{2, 3\}$.

Un nombre premier possède exactement deux diviseurs : 1 et lui même. De ce fait, 1 n'est pas un nombre premier puisqu'il ne possède qu'un seul diviseur, c'est-à-dire 1.

Lorsque, dans une définition d'un ensemble en compréhension, nous avons plus de une caractéristique, nous pouvons les nommer en employant la conjonction **et** qui signifie que les éléments doivent respecter toutes les caractéristiques énumérées.

Exemple 10

D = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ est pair et $x > -12\}$

Nous cherchons alors des **entiers**. Ces entiers sont pairs **et** supérieurs à -12.

D = $\{-10, -8, -6, -4, ...\}$

Si D = $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ est pair et $x > -12\}$, avons-nous le même ensemble?

....

Non puisque les éléments de D doivent être des nombres naturels. L'ensemble D en extension s'écrit D = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

Certains exemples écrits en extension ne contiendront pas d'éléments puisqu'aucun nombre ne correspondra aux caractéristiques demandées dans la définition en compréhension.

Exemple 11

Soit à décrire en extension A = $\{x \in \mathbb{N} \mid x < -5\}$.

Il n'existe aucun élément de $\mathbb{N}$ qui soit négatif, donc inférieur à -5. Nous écrivons alors A = { } ou Ø.

Allons-y de quelques exercices!

Exercice 1.4

1. Écrivez en langage usuel les ensembles décrits ci-dessous en compréhension.

 a) A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -3\}$ ....

 ....

 b) B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 7$ et x est impair$\}$ ....

 ....

 c) C = $\{x \in \mathbb{Q} \mid x$ est diviseur de $0\}$ ....

 ....

2. Décrivez en compréhension les ensembles suivants.

 a) A = {1, 3, 5, 7, 9, ...} ....

 b) B = {0, 1, 2, 3} ....

 c) C = {–27, –8, –1, 0, 1, 8, 27} ....

 d) D = {1, 3, 5, 15} ....

 e) E = {..., 0, 7, 14, 21, 28, ...} ....

3. Décrivez en extension les ensembles suivants.

   a) D = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ est pair$\}$ ....
   b) E = $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq -2\}$ ....
   c) F = $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ est multiple de $100\}$ ....
   d) G = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ diviseur de $50\}$ ....
   e) J = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 6\}$ ....
   f) K = $\{x \in \mathbb{N} \mid -10 < x \leq -6\}$ ....
   g) L = $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 50$ et x est un cube$\}$ ....
   h) M = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 8$ et x est négatif$\}$ ....
   i) N = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1/2\}$ ....
   j) P = $\{x \in \mathbb{N} \mid 5{,}35 < x < 6{,}73\}$ ....

Représentation par diagramme de Venn

La dernière façon de représenter un ensemble consiste à utiliser une figure fermée, généralement un cercle, dans lequel nous plaçons des points illustrant tous les éléments appartenant à cet ensemble : c'est ce que nous appelons « représentation par un diagramme de Venn ».

Cette représentation sera surtout utilisée pour représenter des ensembles finis lorsque nous décrivons des ensembles ou encore pour représenter les ensembles de nombres que nous connaissons bien : naturels, entiers, rationnels, etc.

Nous verrons plus loin dans ce cours que ce genre de représentation nous aidera à résoudre de nombreux problèmes ensemblistes.

Représenter un ensemble par un diagramme de Venn consiste à écrire le symbole correspondant à l'ensemble en majuscule à l'extérieur d'une figure fermée dans laquelle nous plaçons des points qui représentent tous les éléments de cet ensemble.

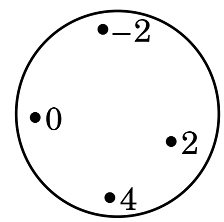
Exemple 12

Représentons par un diagramme de Venn l'ensemble suivant :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 6 \text{ et } x \text{ est pair}\}.$$

1° Décrivons en extension les éléments de cet ensemble : A = {–2, 0, 2, 4}.

2° Traçons un cercle dans lequel nous associons un point à chaque élément trouvé.



3° Écrivons le nom de l'ensemble à l'extérieur de ce cercle.

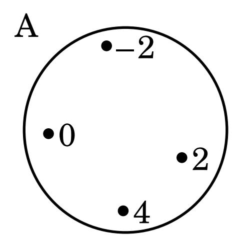


Fig. 1.1 Représentation de A

Voilà! Nous avons alors la représentation de l'ensemble A par un diagramme de Venn et il nous est facile de décrire cet ensemble en extension puisque nous n'avons qu'à nommer les éléments qui se trouvent à l'intérieur de ce cercle.

Dans la plupart des situations que nous rencontrerons, plus d'un ensemble sera nécessaire.

Soit A = {0, 1, 2, 3} et B = {3, 4, 5}.

Si l'ensemble de référence est U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, nous pouvons décrire par un diagramme de Venn ces trois ensembles. Par convention, nous représentons l'ensemble de référence par un rectangle dans lequel nous plaçons les ensembles A et B puisqu'ils proviennent du référentiel U ainsi que les éléments appartenant à chacun de ces ensembles.

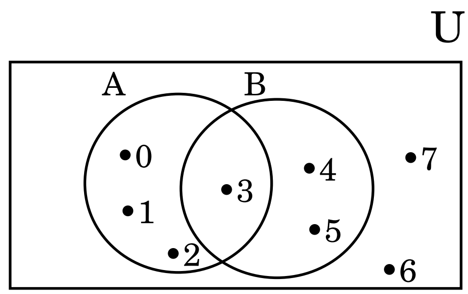


Fig. 1.2 Représentation de U, A et B

- $3 \in A$ et $3 \in B$: 3 est donc placé dans A **et** dans B.
- $0 \in A$, $1 \in A$ et $2 \in A$: 0, 1 et 2 sont placés dans A seulement.
- $4 \in B$ et $5 \in B$: 4 et 5 sont placés dans B seulement.
- $6 \in U$ et $7 \in U$: 6 et 7 sont placés dans U seulement.

Exemple 13

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6\}$.

Décrivons ces ensembles par un diagramme de Venn.

1° Décrivons en premier lieu les ensembles A et B en extension :
$A = \{3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{6\}$.

2° Représentons par un diagramme de Venn la situation où $\mathbb{N}$ est l'ensemble de référence.

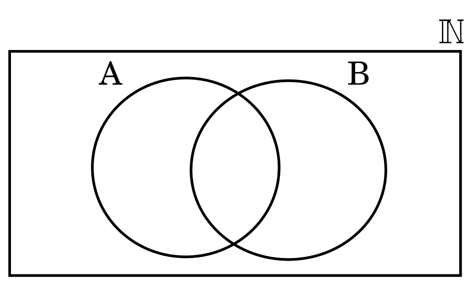


Figure 1.3 Diagramme de Venn

3° Plaçons les éléments dans les différents ensembles en commençant par ceux qui sont communs aux deux ensembles. Ici, l'élément 6 est commun. Complétons avec les éléments qui manquent dans A, soit les éléments 3, 4 et 5. Il n'y a aucun élément à ajouter à B.

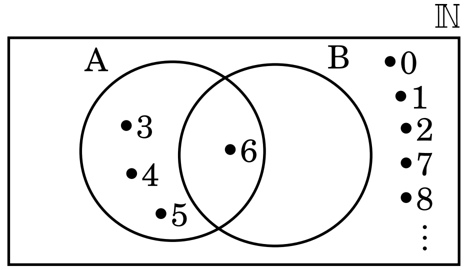


Fig. 1.4 Représentation de A, B et ℕ

Nous avons ici inséré les éléments 0, 1, 2, 7, 8 ainsi que des points de suspension pour compléter l'ensemble ℕ. Ces ajouts ne sont pas nécessaires, car nous connaissons la définition de ℕ. À l'avenir, nous les omettrons.

La représentation par diagramme de Venn de trois ensembles A, B et C faisant partie d'un même ensemble référentiel U est aussi chose courante en mathématiques. Voici un diagramme représentant cette situation.

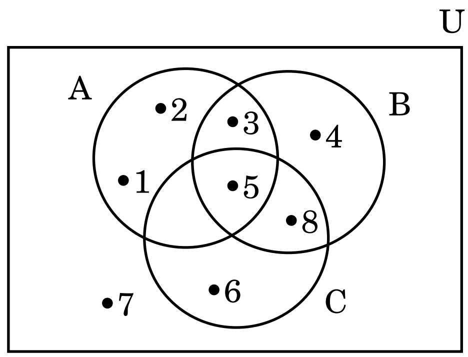


Fig. 1.5 Représentation de U, A, B et C

? Décrivez l'ensemble de référence en extension. ....

? Décrivez les ensembles A, B et C en extension. ....

....

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) $1 \in A$ .... b) $9 \in U$ .... c) $8 \notin B$ ....
d) $3 \in C$ .... e) $1 \notin U$ .... f) $2 \notin A$ ....

L'ensemble de référence est U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, tandis que les ensembles A, B et C sont respectivement A = {1, 2, 3, 5}, B = {3, 4, 5, 8} et C = {5, 6, 8}. Seule la proposition a) est vraie, les autres se révélant toutes fausses.

Pour représenter trois ensembles par un diagramme de Venn, nous devons :

1° décrire en premier lieu tous les ensembles en extension;
2° placer les éléments qui sont communs à tous les ensembles;
3° placer les éléments qui sont communs strictement à deux ensembles;
4° compléter avec les éléments manquants de chaque ensemble;

Exercice 1.5

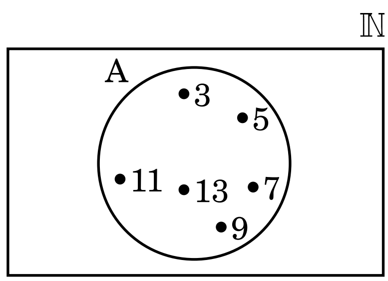
1. Représentez par un diagramme de Venn les ensembles suivants.

a) A = {0, 1, 4, 5, 8} b) B = {1, 4, 6, 8}

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 3 \text{ et } x \text{ est pair}\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$

2. Décrivez en extension et en compréhension les ensembles décrits à l'aide des diagrammes de Venn suivants.

a)



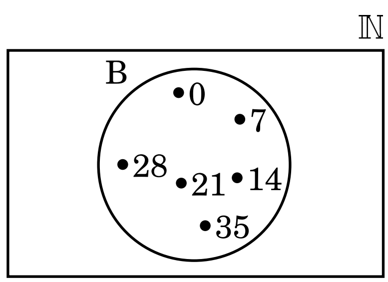
- En extension

....

- En compréhension

....

b)



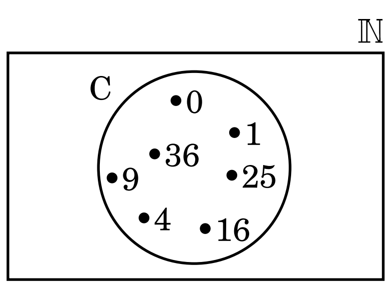
- En extension

....

- En compréhension

....

c)



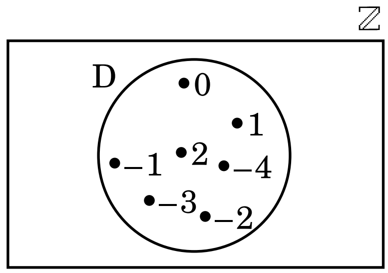
- En extension

....

- En compréhension

....

d)



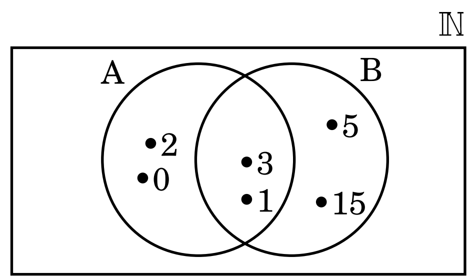
- En extension

  ....

- En compréhension

  ....

3. Soit le diagramme de Venn suivant.



a) Décrivez A en extension. ....

b) Décrivez B en extension. ....

c) Décrivez A en compréhension. ....

d) Décrivez B en compréhension. ....

e) Complétez avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

- 2 .... A • 5 .... B • 1 .... $\mathbb{N}$ • 3 .... B

4. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 8\}$,

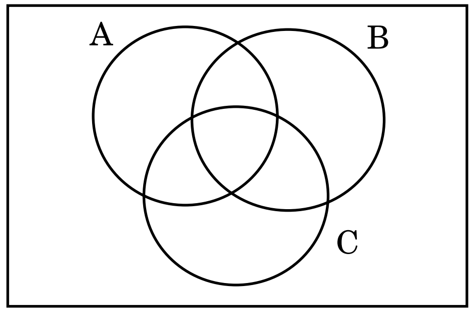
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12$ et x est multiple de $4\}$,

   $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ est diviseur de $8\}$.

a) Représentez les ensembles A, B et C en extension.

A = ... B = ... C = ...

b) Complétez le diagramme de Venn pour représenter ces ensembles.



5. Alicia décide d'offrir de l'argent à sa copine en guise de cadeau d'anniversaire. Elle dispose exactement de 25 $, soit 3 billets de 5 $ et 1 billet de 10 $ et n'a aucun moyen de monnayer ses billets.

a) Représentez les ensembles ci-dessous en extension

- U est l'ensemble de référence consitué de tous les montants qu'Alicia peut offrir à son amie.

  U = ...

- A est l'ensemble des montants possibles si Alicia décide d'offrir un montant impair.

  A = ...

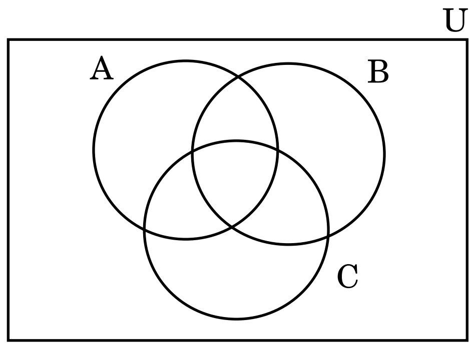
- B est l'ensemble des montants possibles si Alicia décide d'offrir un montant pair.

  B = ...

- C est l'ensemble des montants possibles si Alicia n'offre que deux billets.

  C = ...

b) Représentez tous ces ensembles dans le diagramme de Venn ci-dessous.



Ensemble des nombres ℕ, ℤ, ℚ, ℚ' et ℝ

Nous avons vu jusqu'ici plusieurs ensembles de nombres et une brève description de chacun d'eux. Nous allons maintenant faire une synthèse de tous les ensembles de nombres qui font partie de l'ensemble des nombres réels. De plus, nous apprendrons à déterminer l'appartenance ou la non-appartenance d'un nombre à chacun de ces ensembles, à construire le diagramme de Venn les représentant et à y situer des nombres réels.

- **Les nombres naturels :** ℕ

Quand nous comptons des objets, nous disons qu'il y en a 0, 1, 2, 3, ... selon le cas. L'ensemble de ces nombres constitue l'ensemble ℕ.

L'ensemble ℕ est l'ensemble de tous les nombres entiers positifs et du nombre 0.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$$

L'astérisque indique que le zéro n'appartient pas à l'ensemble.

- **Les nombres entiers :** $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est insuffisant pour certaines soustractions. En effet, 8 – 15 n'est pas possible dans $\mathbb{N}$. Nous agrandissons alors l'ensemble $\mathbb{N}$ de façon à inclure les entiers négatifs. Le nouvel ensemble est $\mathbb{Z}$.

> **L'ensemble** $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers.
>
> $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

Puisque $\mathbb{Z}$ est un agrandissement ou une extension de $\mathbb{N}$, nous pouvons les représenter par le diagramme de Venn ci-contre.

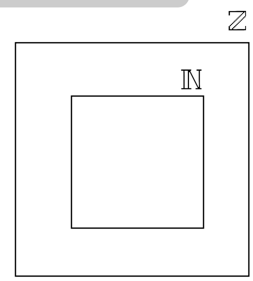


Fig. 1.6 Diagramme de Venn représentant $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

- **Les nombres rationnels :** $\mathbb{Q}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est insuffisant pour certaines divisions. En effet, 8 ÷ 3 n'est pas possible dans $\mathbb{Z}$. Nous agrandissons alors l'ensemble $\mathbb{Z}$ de façon à inclure dans le nouvel ensemble les nombres qui s'expriment sous forme d'une fraction dont le numérateur est un entier et le dénominateur est un entier différent de 0. Le nouvel ensemble est $\mathbb{Q}$.

N.B. – La division par 0 est impossible.

> **L'ensemble** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres que nous pouvons représenter sous la forme d'un quotient de deux entiers, le deuxième entier étant différent de 0.
>
> $$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

N.B. – Nous donnons une description en compréhension de $\mathbb{Q}$, car nous pouvons difficilement le décrire en extension.

Comme $\mathbb{Q}$ est un agrandissement de $\mathbb{Z}$ et que $\mathbb{Z}$ est un agrandissement de $\mathbb{N}$, nous pouvons les représenter par le diagramme de Venn ci-contre.

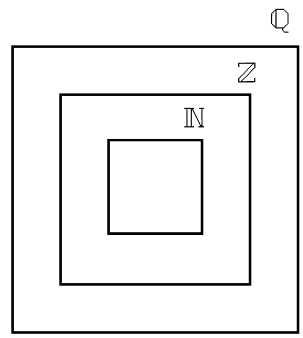


Fig. 1.7 Diagramme de Venn représentant $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Les nombres rationnels possèdent une propriété importante. Pour la découvrir, représentons certains nombres rationnels sous forme décimale.

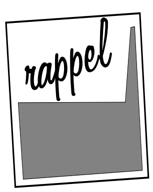
$\frac{1}{3}$ = 0,333... et est noté $0,\overline{3}$;

$\frac{4}{11}$ = 0,363 636... et est noté $0,\overline{36}$;

3 = 3,000... et est noté $3,\overline{0}$;

$\frac{1}{4}$ = 0,25 = 0,250 00... et est noté $0,25\overline{0}$;

$-2\frac{1}{7} = -2,142\,857\,142\,857...$ et est noté $-2,\overline{142\,857}$.



Le trait au-dessus d'un chiffre ou d'un groupe de chiffres indique que le ou les chiffres se répètent indéfiniment et ce chiffre ou ce groupe de chiffres se nomme la période.

En continuant ainsi ces transformations, nous pouvons constater que tous les nombres entiers et toutes les fractions ont un développement décimal périodique et sont rationnels.

Remarques

1. Toutes les fractions, toutes les expressions fractionnaires et tous les nombres fractionnaires sont des nombres rationnels :
   $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $-\frac{8}{3} \in \mathbb{Q}$, $-2\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$.

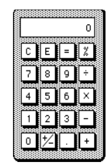
2. Tous les nombres naturels et tous les nombres entiers sont des nombres rationnels, car ils s'expriment tous sous la forme d'une fraction :
   $8 = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = ... \in \mathbb{Q}$, $-9 = -\frac{9}{1} = -\frac{18}{2} = ... \in \mathbb{Q}$, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = ... \in \mathbb{Q}$.

3. Tous les nombres à développement décimal périodique sont des nombres rationnels :
   $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}\overline{6} \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}500\,0... = 0{,}5\overline{0} \in \mathbb{Q}$.

- **Les nombres irrationnels :** $\mathbb{Q}'$

Nous avons mentionné plus haut que tous les nombres rationnels ont un développement décimal périodique. Mais il existe aussi des nombres qui ont un développement décimal non périodique.

À l'aide de la calculatrice, donnez la valeur des expressions suivantes.



$\sqrt{2}$ = ... ; $\sqrt{3}$ = ... ; π = ...

Que pouvez-vous conclure au sujet de leur développement décimal? ....

En effet, ces nombres n'ont pas de période, car $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 5...$, $\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 8...$ et $\pi = 3{,}141\ 59...$

Nous pouvons aussi construire des nombres qui ont un développement décimal non périodique, comme 3,202 002 000 200 002... et 8,018 249 517 426...

> **L'ensemble** $\mathbb{Q}'$ est l'ensemble des nombres qui ont un développement décimal non périodique.

Un nombre irrationnel ne peut s'exprimer sous la forme d'une fraction. Un nombre est donc rationnel ou irrationnel, il ne peut pas être les deux à la fois.

Nous pouvons représenter les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ par le diagramme de Venn suivant.

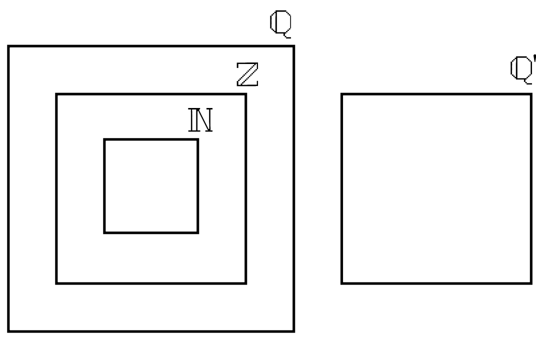


Fig. 1.8 Diagramme de Venn représentant $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$

Vérifiez à l'aide de la calculatrice la valeur des expressions suivantes.

? $-\sqrt{5}$ = ... ; $\sqrt{-5}$ = ...

? Que constatez-vous? ....

....

Vous avez probablement trouvé $-\sqrt{5} = -2{,}236\,067...$, car le 5 placé sous le radical est positif et c'est l'expression $-\sqrt{5}$ qui est négative, tandis que la calculatrice affiche E dans le deuxième cas. En effet, la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{Q}'$. La racine carrée d'un nombre négatif fait partie de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Cet ensemble de nombres n'est pas à l'étude à ce niveau.

- **Les *nombres réels* :** $\mathbb{R}$

Si nous regroupons l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels, nous obtenons l'ensemble des nombres réels.

> **L'ensemble** $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres qui sont rationnels ou irrationnels.
>
> $$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{Q}'\}$$

N.B. – L'ensemble des nombres irrationnels est noté $\mathbb{Q}'$ et il correspond à la négation de $\mathbb{Q}$ par rappport à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ qui est le référentiel.

Nous pouvons finalement représenter les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$ par le diagramme de Venn suivant.

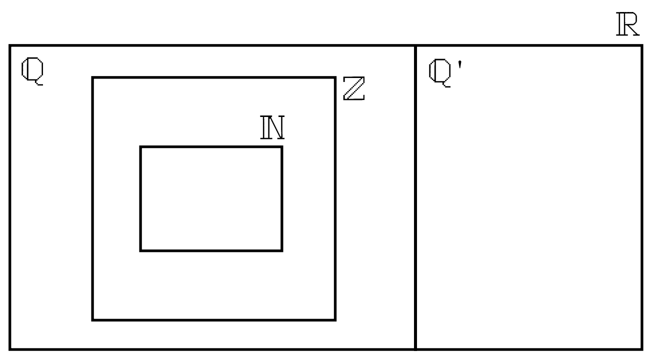


Fig. 1.9 Diagramme de Venn représentant $\mathbb{R}$

Remarques

1. Tout nombre qui appartient à $\mathbb{N}$ appartient aussi à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$.
2. Tout nombre qui appartient à $\mathbb{Z}$ appartient aussi à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$.
3. Tout nombre qui appartient à $\mathbb{Q}$ appartient aussi à $\mathbb{R}$.
4. Tout nombre qui appartient à $\mathbb{Q}'$ appartient aussi à $\mathbb{R}$.

a) Parmi les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ et $\mathbb{R}$, à quel(s) ensemble(s) de nombres $-\frac{4}{3}$ appartient-il? ....

b) Dans le diagramme de Venn ci-dessous, situez correctement les nombres réels suivants : $0, -\frac{3}{4}, -8, \pi, -\sqrt{9}, \frac{5}{8}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, -\frac{10}{2}$

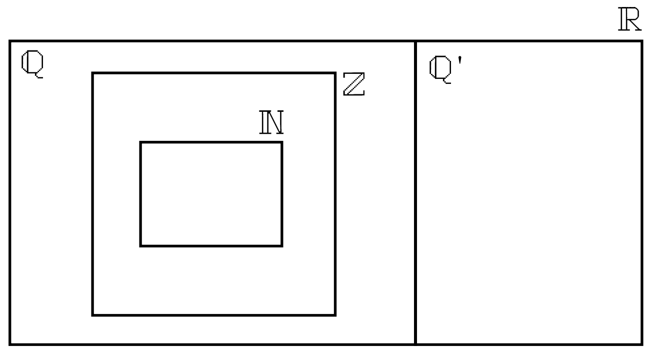


Fig. 1.10 Diagramme de Venn des nombres réels

En a), $-\frac{4}{3}$ est un élément de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ seulement. Alors qu'en b), nous obtenons $0 \in \mathbb{N}$, $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, $-8 \in \mathbb{Z}$, $\pi \in \mathbb{Q}'$, $-\sqrt{9} = -3 \in \mathbb{Z}$, $\frac{5}{8} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$, $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$ et $-\frac{10}{2} = -5 \in \mathbb{Z}$, ce qui se traduit par le diagramme de Venn qui suit.

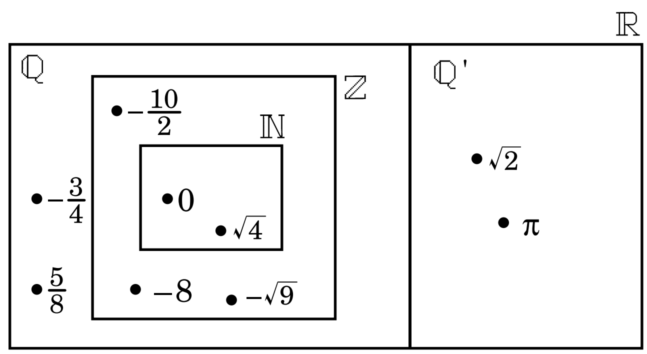
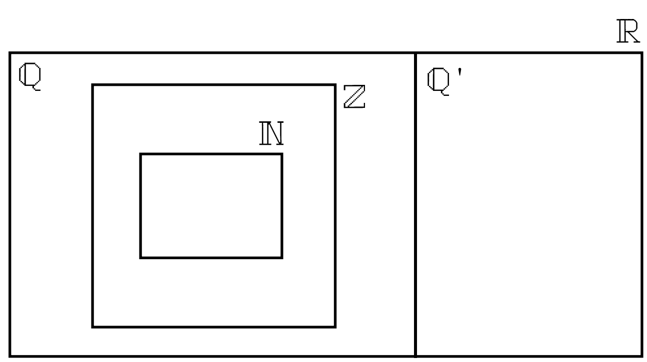


Fig. 1.11 Diagramme de Venn représentant certains nombres réels

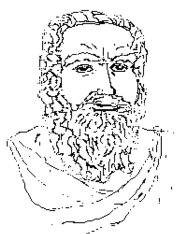
Exercice 1.6

1. Sur le diagramme de Venn ci-dessous, placez les nombres réels suivants :
   $\sqrt{3}$; $\sqrt{25}$; $-\frac{3}{4}$; -8; 1,372 451...; $-5{,}7$; $0{,}\bar{6}$.



2. Parmi les nombres suivants, lequel appartient à $\mathbb{Q}'$? ....

A) $\frac{25}{2}$ B) $-\sqrt{36}$ C) $\sqrt{12}$ D) 2,731 731 E) $\sqrt{-3}$



Saviez-vous que...

... le XVII[e] siècle a été le grand siècle des mathématiques en France et ailleurs dans le monde? C'est durant ce siècle que d'illustres savants tels Fermat, Descartes, Desargues, Pascal et Bernouilli ont apporté une contribution immense à l'avancement des mathématiques.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

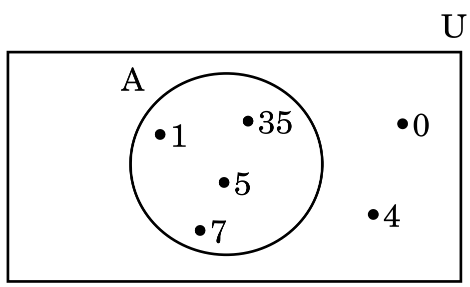
1. Décrivez les ensembles demandés en extension.

   a) A = $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ est impair et $x < -12\}$ A = ...

   b) B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 1\}$ B = ...

   c) C = $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ est un cube et $x > 100\}$ C = ...

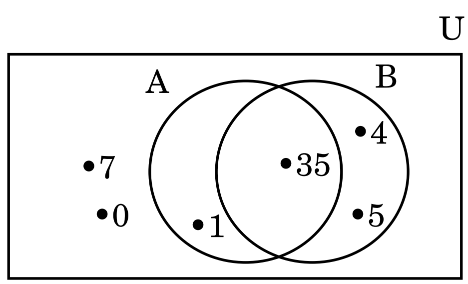
   d)



   A = ...

   U = ...

   e)



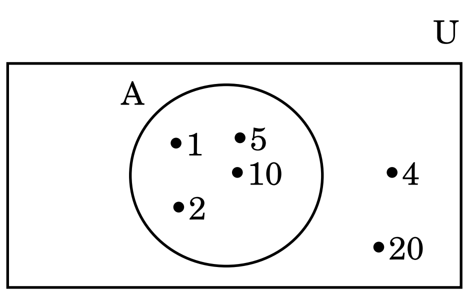
   A = ...

   B = ...

   U = ...

2. Décrivez les ensembles ci-dessous en compréhension.

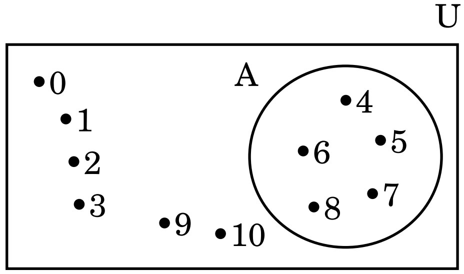
   a)



   A = ...

   U = ...

b)



A = ...

U = ...

c) C = {…, –12, –6, 0, 6, 12, ...} C = ...

d) D = {–15, –14, –13} D = ...

e) E = {1, 3, 13, 39} E = ...

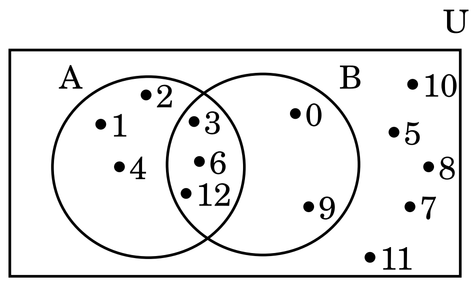
3. Décrivez les ensembles ci-dessous par un diagramme de Venn.

a) F = {0, 3, 5, 7, 9, 11} b) G = {–12, –4, 6, 9}

c) H = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$ d) J = $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

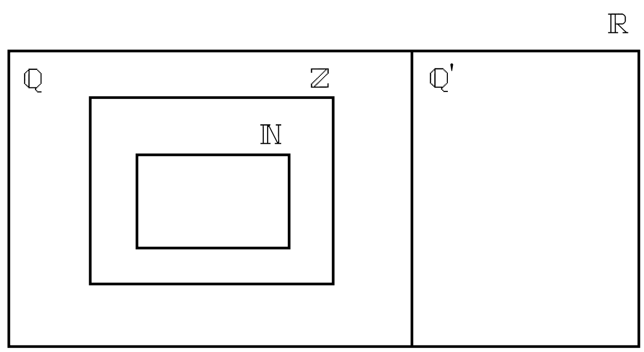
e) K = $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 6$ et x est multiple de $7\}$

4. Décrivez les ensembles U, A et B en extension et en compréhension.



En extension	En compréhension
U = ...	U = ...
A = ...	A = ...
B = ...	B = ...

5. Sur le diagramme de Venn ci-dessous, placez les nombres réels suivants : $1,\bar{4}; -\frac{12}{5}; \sqrt{8}; -7; \frac{8}{2}; -2,16; 0,010\ 01...$.



6. Déterminez à quel(s) ensemble(s) appartiennent les nombres ci-dessous en cochant (√) dans les cases appropriées.

$\in$	ℕ	ℤ	ℚ	ℚ'	ℝ
$-5/2$					
π					
$\sqrt{3}$					
-7					
12					
3,14					
$\sqrt{25}$					
0					

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Les ensembles U, A et B sont représentés en extension. Représentez-les par un diagramme de Venn et décrivez-les en compréhension.

   U = {–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; A = {–1, 0, 1, 2, 3}; B = {2, 3, 5, 7}.

   - Diagramme de Venn
   - Description en compréhension

     U = ...

     A = ...

     B = ...

2. Décrivez en extension les ensembles ci-dessous. Ensuite, représentez dans un diagramme de Venn les ensembles $\mathbb{N}$, A et B.

   a) A = $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 3$ et x est diviseur de $6\}$ = ...
   b) B = $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 7\}$ = ...
   c) C = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x$ est inférieur à $0\}$ = ...
   d) D = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 20$ et x est un nombre premier$\}$ = ...
   e) Diagramme de Venn représentant les ensembles $\mathbb{N}$, A et B.

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Sondage Croque

La société de sondage Croque a fait un sondage dernièrement afin de connaître le goût de la population québécoise en matière de boissons gazeuses. La société de sondage a ainsi interrogé 1 024 personnes réparties sur le territoire du Québec.

La question était la suivante : « Au cours de la dernière semaine, quelle(s) boisson(s) gazeuse(s) avez-vous consommées? » On donnait aux participants les choix suivants : PETSI, KOLA, autres boissons gazeuses, aucune boisson gazeuse.

Voici les résultats de ce sondage :

- 428 personnes ont consommé du PETSI;
- 475 personnes ont consommé du KOLA;
- 285 personnes ont consommé une autre boisson;
- 100 personnes ont consommé du PETSI et une autre boisson;
- 88 personnes ont consommé du KOLA et une autre boisson;
- 181 personnes ont consommé du PETSI et du KOLA;
- 53 personnes ont consommé du PETSI, du KOLA et une autre boisson.

Pouvez-vous dire combien de personnes ont répondu qu'ils n'avaient consommé aucune boisson gazeuse durant cette semaine?

Afin de vous donner un coup de pouce pour répondre à cette question, nous vous suggérons la démarche suivante.

1° Appelez P, K et A les ensembles représentant respectivement les consommateurs de PETSI, de KOLA et d'autres boissons; S est l'ensemble des personnes qui ont répondu au sondage.

2° Complétez le diagramme de Venn suivant. Attention! Les nombres qui sont inscrits ne représentent pas des éléments mais le nombre de personnes qui consomment telle ou telle boisson, c'est la raison pour laquelle nous ne mettons pas de points.

3° Puisque 53 personnes ont consommé du PETSI, du KOLA et une autre boisson, nous pouvons inscrire le nombre 53 dans l'intersection des 3 ensembles, tel qu'illustré sur la figure ci-dessous.

4° Comme 181 personnes ont consommé du PETSI et du KOLA, il n'en reste donc plus que 128 (soit 181 – 53) qui n'ont consommé que du PETSI et du KOLA. Nous avons inscrit ce nombre dans l'espace approprié.

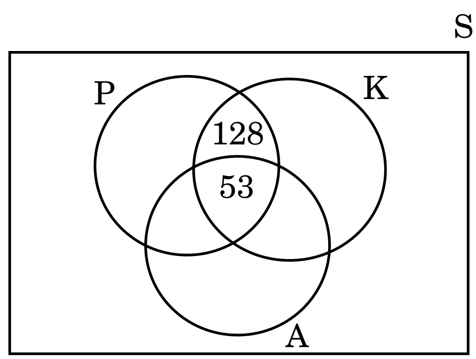


Fig. 1.12 Diagramme de Venn représentant le sondage de la société de sondage Croque

Vous devriez maintenant être en mesure de continuer seul et de répondre à notre question!