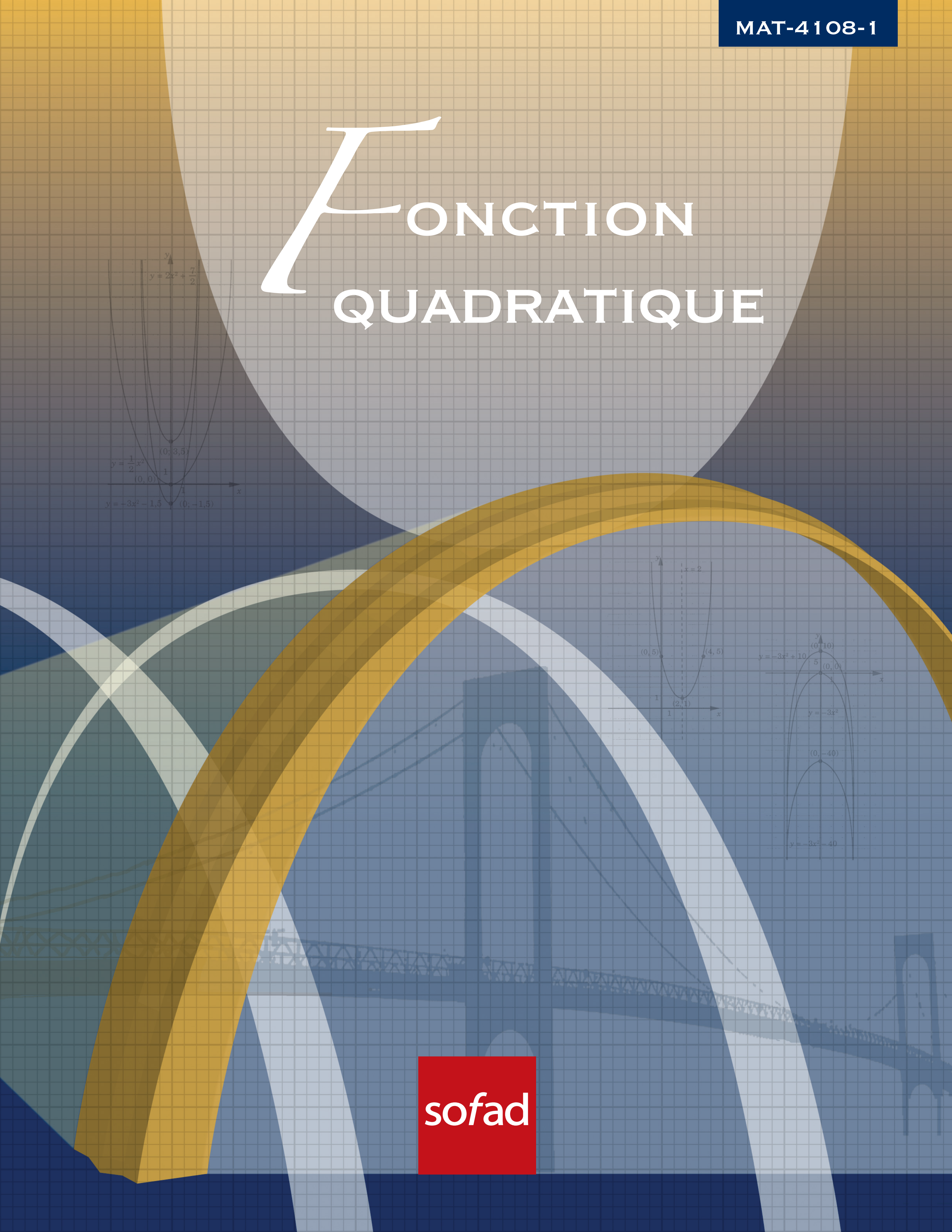
MAT-4108-1

Fonction quadratique



sofad

MAT-4108-1

FONCTION QUADRATIQUE

sofad

Rédactrice : Diane Vigneux

Réviseurs du contenu : Suzie Asselin
Jean-Paul Groleau

Réviseures linguistiques : Marie Rose Vianna
Francine Cardinal

Coordonnateur pour la SOFAD : Jean-Paul Groleau

Photocomposition et montage : P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Parution : 2005

Réimpression : 2006

Dépôt légal — 2005

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-89493-274-2

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

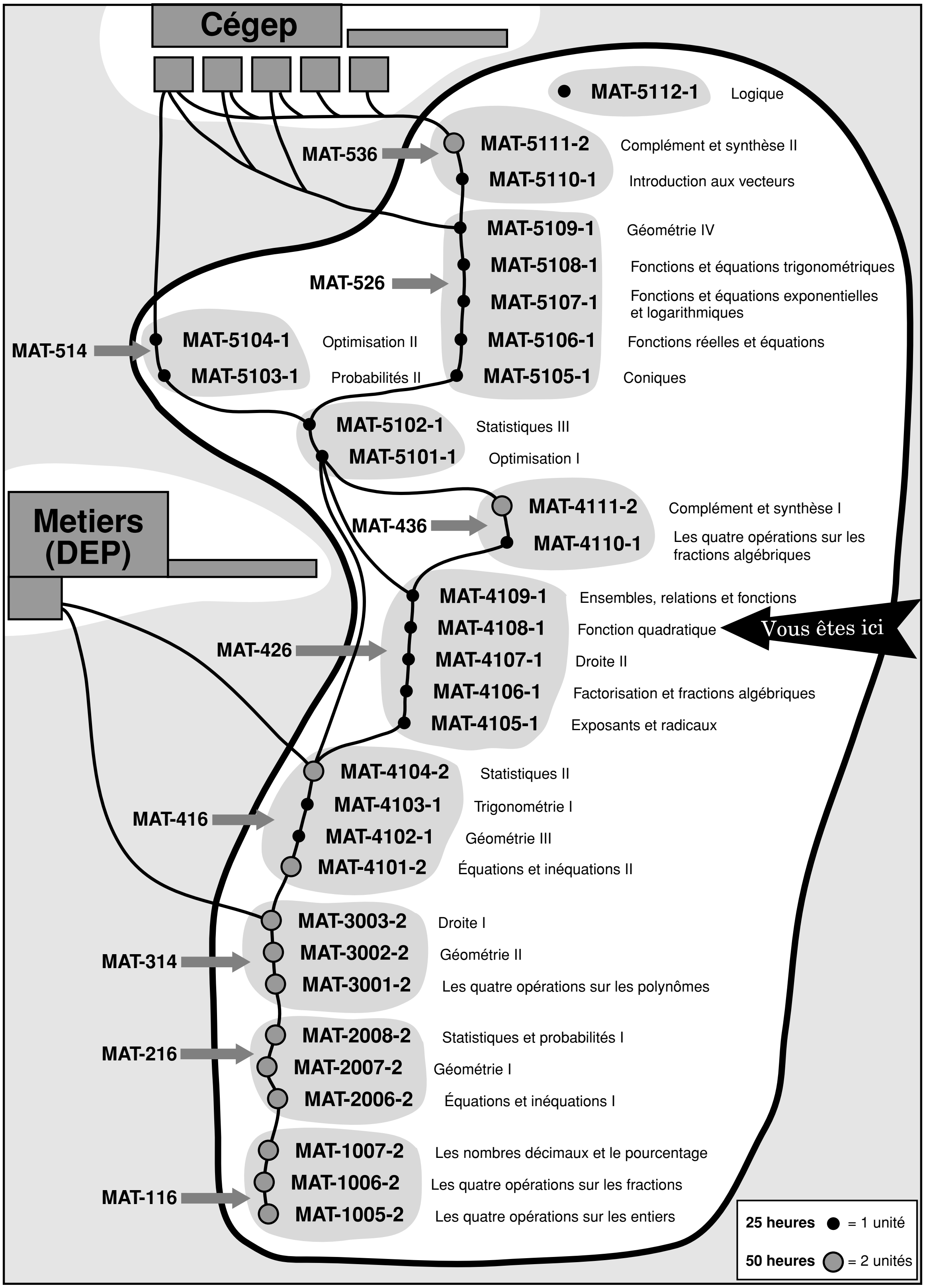
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

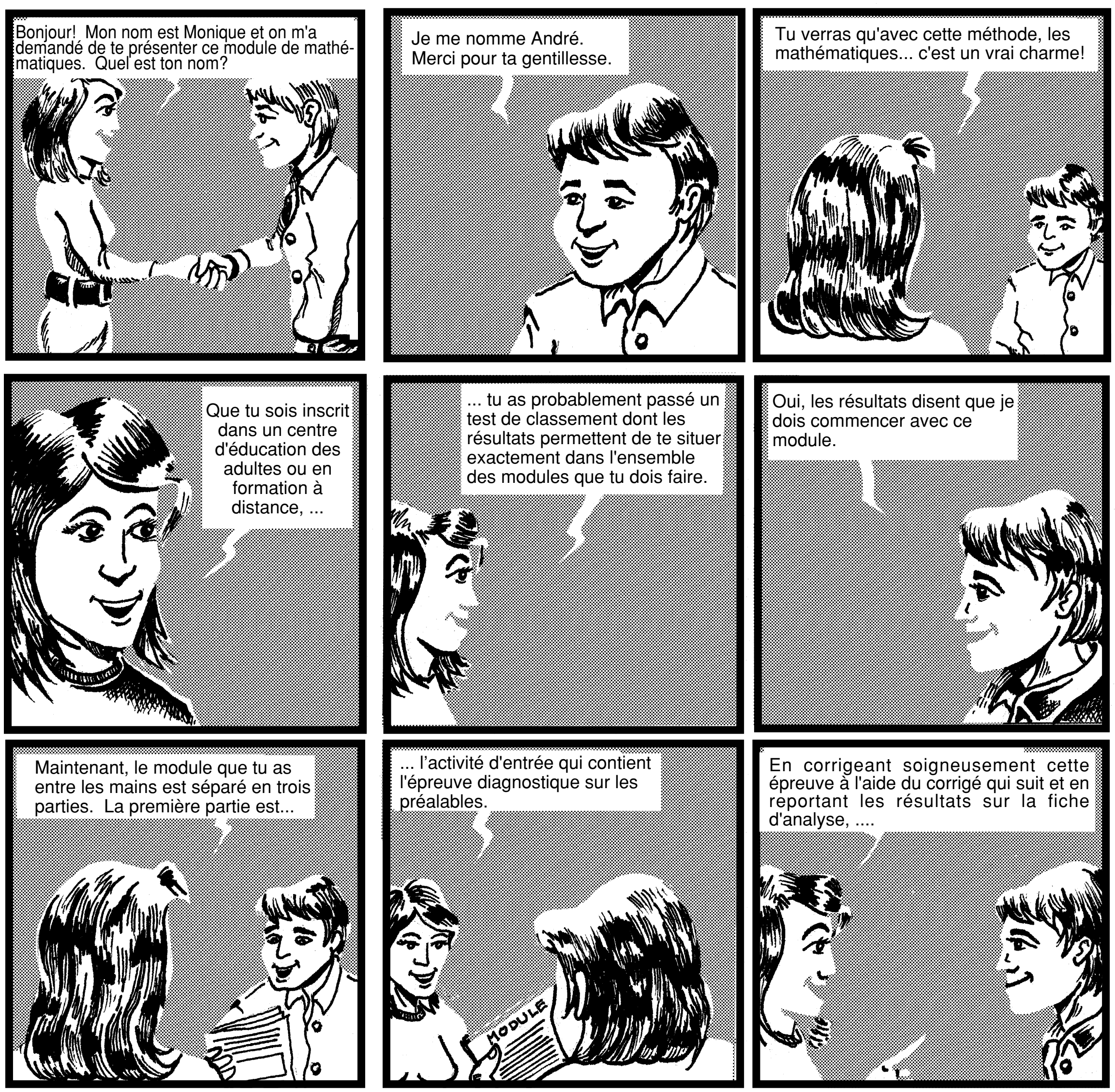
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au collège (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

Si c'est votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la partie intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?



La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un «Saviez-vous que...?».
«Saviez-vous que...?»
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour «La page des mathophiles» qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LA PARABOLE DES MATHÉMATICIENS

Ce module présente l'étude de la parabole. Disons en premier lieu que la parabole constitue la représentation graphique de différentes situations où une valeur maximale ou minimale, c'est-à-dire un sommet, est atteinte. Par exemple, une balle lancée dans les airs monte jusqu'à une hauteur que nous disons maximale avant de redescendre. La représentation graphique de son ascension jusqu'à sa hauteur maximale, puis sa descente, se fait au moyen d'une parabole.

Mathématiquement, la parabole se traduit par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$. Ce type d'équation est dit du second degré parce que l'exposant « 2 » accompagne la variable « x ». Les équations du second degré se distinguent de celles du premier degré en ce qu'elles supposent l'existence d'une valeur maximale ou minimale que nous ne retrouvons pas dans une équation du premier degré à deux variables.

Tous les cas analogues à celui de la balle lancée en l'air constituent des équations du second degré et sont représentés graphiquement par une parabole. Le monde des affaires et le domaine des sciences physiques utilisent souvent la parabole pour calculer la valeur maximale ou minimale de différentes situations. Aussi en verrons-nous plusieurs exemples au cours de ce module.

Nous apprendrons également à représenter graphiquement une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$ lorsque a est un nombre rationnel différent de 0 et $b = c = 0$ lorsque a et c sont des nombres rationnels différents de 0 et $b = 0$ lorsque a, b et c sont des nombres rationnels différents de 0. Pour cela, il nous faudra, entre autres, dresser des tableaux de valeurs et déterminer l'axe de symétrie.

Par la suite, nous résoudrons par factorisation des équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Les cinq cas de factorisation seront utilisés. Ces cinq cas devraient normalement être connus de vous puisqu'ils ont fait l'étude d'un module précédent, intitulé *Factorisation*.

Une nouvelle forme de résolution algébrique sera aussi abordée : la **formule quadratique**. Cette formule est indispensable à la résolution de **polynômes non factorisables**.

Quelle que soit la méthode de résolution choisie, il faudra trouver la ou les valeurs de la variable annulant l'équation. C'est ce que nous nommons les **racines** de l'équation.

De plus, nous devrons trouver algébriquement les coordonnées du point maximum d'une situation convertie en une fonction quadratique. Finalement, à partir d'une situation issue du domaine des nombres, de la géométrie appliquée ou de la vie courante, il nous faudra mathématiser la situation donnée et résoudre l'équation du second degré ainsi obtenue.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4108-1 comporte neuf sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures réparties, tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombres d'heures*	% (évaluation)
1 à **6**	4	20 %
7	10	40 %
8	5	20 %
9	5	20 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Recherche du maximum

   À partir de l'énoncé d'un problème basé sur une situation de la vie courante se ramenant à une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, déterminer la valeur des variables x et y qui correspondent au maximum recherché (rendement maximal, profit maximal ou hauteur maximale) en appliquant l'une des deux méthodes suivantes :
   - compléter un tableau de valeurs déjà ébauché;
   - substituer différentes valeurs à x dans une équation du second degré. Les valeurs de a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$.

   L'équation et les valeurs de x sont fournies. Les valeurs de x fournies sont généralement des nombres naturels. La solution doit avoir la forme d'un couple de coordonnées (x, y). Les étapes de la résolution sont exigées.

2. Équations du second degré traduisant une situation de la vie courante

   À partir de l'énoncé d'un problème basé sur une situation de la vie courante et à l'aide d'un tableau de valeurs déjà ébauché, formuler une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$.

3. Représentation graphique d'une équation de la forme $y = ax^2$

   Représenter graphiquement une équation du second degré de la forme $y = ax^2$ où a est un nombre rationnel dont la valeur varie entre -5 et 5 ($a \neq 0$). La représentation graphique est une parabole pour laquelle les coordonnées du sommet ainsi que l'axe de symétrie accompagné de son équation doivent être clairement indiqués. L'échelle fixée pour chacun des deux axes doit également être mentionnée.

4. Représentation graphique d'une équation de la forme $y = ax^2 + c$

   Représenter graphiquement une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + c$ où a est un nombre rationnel dont la valeur varie entre -5 et 5 ($a \neq 0$) et où c est un nombre rationnel. La représentation graphique est une parabole pour laquelle les coordonnées du sommet ainsi que l'axe de symétrie accompagné de son équation doivent être clairement indiqués. L'échelle fixée pour chacun des deux axes doit également être mentionnée. Il faut, de plus, indiquer si le sommet de la parabole obtenue est un maximum ou un minimum.

5. Résolution par factorisation d'une équation du second degré

   Résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$, en appliquant la technique de factorisation appropriée (simple mise en évidence, double mise en évidence, factorisation d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, factorisation de la différence de deux carrés) ainsi que la propriété d'un produit nul. Les étapes de la résolution doivent être décrites. De plus, connaissant les solutions d'une équation quadratique, déterminer les coordonnées des points auxquels ces valeurs correspondraient sur la représentation graphique de l'équation $ax^2 + bx + c = y$.

6. Résolution par la formule quadratique d'une équation du second degré

Calculer la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ pour déterminer le nombre de solutions (0, 1 ou 2) d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$. Résoudre ensuite, s'il y a lieu, cette équation en appliquant la formule quadratique $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Les valeurs obtenues sont des nombres réels. Les étapes de la résolution doivent être décrites. De plus, à partir de la représentation graphique d'une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$, déterminer le nombre de zéros de cette équation et indiquer les coordonnées des points qui correspondent à ces zéros.

7. Graphique d'une équation du second degré

Représenter graphiquement une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$. La représentation graphique est une parabole dont les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie accompagné de son équation, les coordonnées de l'ordonnée à l'origine, les coordonnées du point symétrique à l'ordonnée à l'origine et, s'il y a lieu, les coordonnées correspondant aux zéros de cette équation doivent être clairement indiqués. L'échelle fixée pour chacun des axes doit également être mentionnée. Les calculs qui ont servi à déterminer les coordonnées de chacun de ces points doivent être décrits.

8. Recherche du maximum ou du minimum à partir d'une équation du second degré

À partir d'une équation du second degré de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$, déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point maximum ou du point minimum de la parabole. Les énoncés s'inspirent de situations empruntées aux domaines des sciences et des affaires. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

9. Mathématisation et résolution d'un problème convertible en une équation du second degré

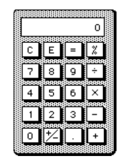
Résoudre, par la méthode de factorisation ou en appliquant la formule quadratique, un problème dont l'énoncé est convertible en une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres rationnels et $a \neq 0$. La résolution nécessite le rejet de toute valeur non pertinente. De plus, le problème exige la recherche de deux valeurs au maximum. Les situations évoquées relèvent du domaine du calcul, de la géométrie ou de la vie courante. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation d'une calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme telles. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Trouvez la valeur de y dans l'équation $y = -x^2 + 5x - 7$ si :

   a) $x = 3$

   b) $x = -2$

2. Trouvez la valeur de y dans l'équation $y = 0{,}25x^2 - 0{,}3x + 5$ si $x = 4$.

3. a) Trouvez la valeur de $b^2 - 4ac$ si $b = -5$, $a = -3$ et $c = 0$.

   b) Trouvez la valeur de $b^2 - 4ac$ si $a = \frac{1}{2}$, $b = 0{,}3$ et $c = \frac{1}{2}$.

4. Effectuez les opérations suivantes sur les polynômes.

   a) $(5x^2 - x + 3) + (x^2 + 2x - 5) =$

   b) $(x^2 + 7x -1) - (3x^2 + 4 - 2x) =$

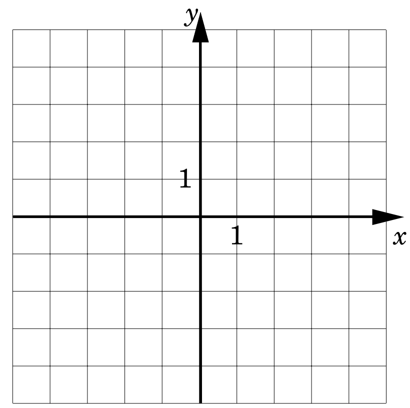
   c) $(x - 6)(2x + 4) =$

   d) $\dfrac{-2x^3 + 8x^2 - x}{2x} =$

5. a) Tracez le graphique de l'équation $y = 5x - 3$ et donnez le tableau d'au moins trois valeurs pertinentes.

Tableau de valeurs

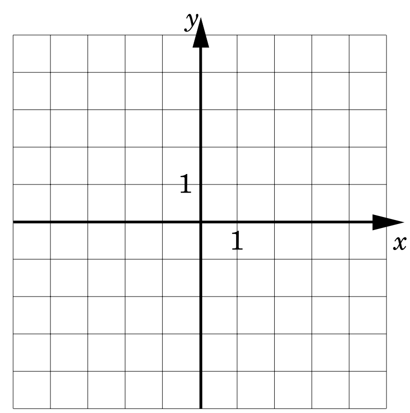
x	y



b) Tracez le graphique de l'équation $x = -2$ et donnez le tableau de valeurs de cette équation.

Tableau de valeurs

x	y



6. Résolvez les équations suivantes en inscrivant toutes les étapes et en faisant la vérification des résultats.

a) $2x + 7 = 0$

b) $-5x = 0$

c) $-8x + 6 = 0$

7. Factorisez les polynômes suivants.

a) $6x^2 + 3x$

b) $x^2 + 5x - 2x - 10$

c) $x^2 + 7x + 6$

d) $3x^2 + 11x - 20$

e) $4x^2 - 25$

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) $y = -x^2 + 5x - 7$
$y = -(3)^2 + 5(3) - 7$
$y = -9 + 15 - 7$
$y = -1$

b) $y = -x^2 + 5x - 7$
$y = -(-2)^2 + 5(-2) - 7$
$y = -4 - 10 - 7$
$y = -21$

2. $y = 0{,}25x^2 - 0{,}3x + 5$
$y = 0{,}25(4)^2 - 0{,}3(4) + 5$
$y = 0{,}25(16) - 1{,}2 + 5$
$y = 4 - 1{,}2 + 5$
$y = 7{,}8$

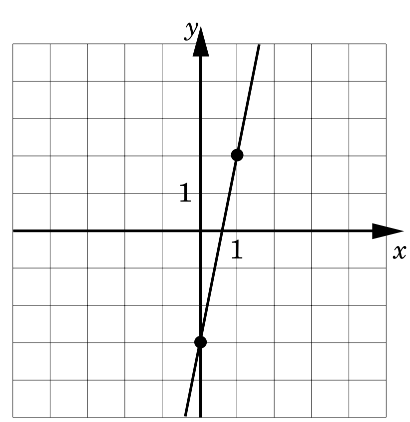
3. a) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-3)(0)$
$b^2 - 4ac = 25 - 0$
$b^2 - 4ac = 25$

b) $b^2 - 4ac = (0{,}3)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
$b^2 - 4ac = 0{,}09 - 1$
$b^2 - 4ac = -0{,}91$

4. a) $6x^2 + x - 2$
b) $-2x^2 + 9x - 5$
c) $2x^2 - 8x - 24$
d) $-x^2 + 4x - \frac{1}{2}$

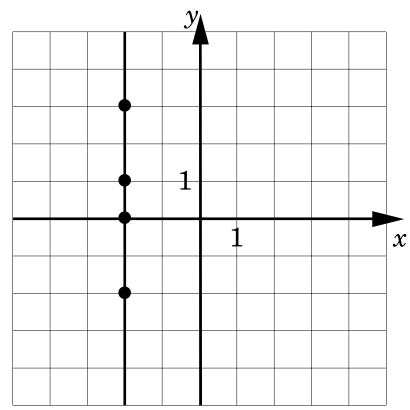
5. a)

x	y
-1	-8
0	-3
1	2
2	7



b)

x	y
-2	3
-2	1
-2	0
-2	-2



6. a) Solution :

$2x + 7 = 0$

$2x = -7$

$x = \frac{-7}{2}$ ou $-3{,}5$

Vérification :

$2x + 7 = 0$

$2(-3{,}5) + 7 = 0$

$-7 + 7 = 0$

$0 = 0$

b) Solution :

$-5x = 0$

$x = \frac{0}{-5}$

$x = 0$

Vérification :

$-5x = 0$

$-5(0) = 0$

$0 = 0$

c) Solution :

$-8x + 6 = 0$

$-8x = -6$

$x = \frac{-6}{-8}$

$x = \frac{3}{4}$ ou $0{,}75$

Vérification :

$-8x + 6 = 0$

$-8(0{,}75) + 6 = 0$

$-6 + 6 = 0$

$0 = 0$

7. a) $6x^2 + 3x$

$3x(2x + 1)$

- Simple mise en évidence

b) $x^2 + 5x - 2x - 10$

$x(x + 5) - 2(x + 5)$

$(x + 5)(x - 2)$

- Double mise en évidence

c) $x^2 + 7x + 6$

$x^2 + 6x + x + 6$

$x(x + 6) + 1(x + 6)$

$(x + 6)(x + 1)$

- Trinôme de la forme $x^2 + bx + c$

d) $3x^2 + 11x - 20$

$3x^2 + 15x - 4x - 20$

$3x(x + 5) - 4(x + 5)$

$(x + 5)(3x - 4)$

- Trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$

e) $4x^2 - 25$

$(2x)^2 - (5)^2$

$(2x + 5)(2x - 5)$

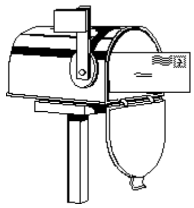
- Différence de carrés

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			11.1	11.4	Sous-module 1
b)			11.1	11.4	Sous-module 1
2.			11.1	11.4	Sous-module 1
3. a)			11.1	11.4	Sous-module 1
b)			11.1	11.4	Sous-module 1
4. a)			11.2	11.11	Sous-module 2
b)			11.2	11.11	Sous-module 2
c)			11.2	11.11	Sous-module 2
d)			11.2	11.11	Sous-module 2
5. a)			11.3	11.23	Sous-module 3
b)			11.3	11.23	Sous-module 3
6. a)			11.4	11.31	Sous-module 5
b)			11.4	11.31	Sous-module 5
c)			11.4	11.31	Sous-module 5
7. a)			11.5	11.40	Sous-module 5
b)			11.5	11.40	Sous-module 5
c)			11.5	11.40	Sous-module 5
d)			11.5	11.40	Sous-module 5
e)			11.5	11.40	Sous-module 5

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4108-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4108-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

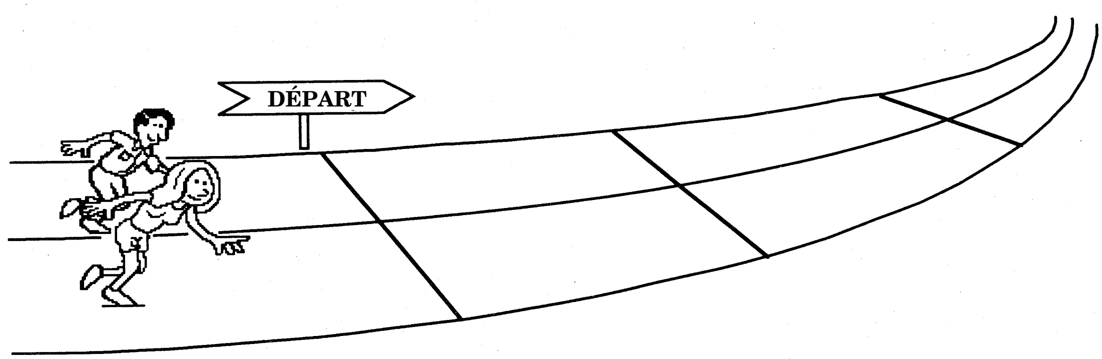
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 7.
Le devoir 2 porte sur les sous-module 8 et 9.
Le devoir 3 porte sur les sous-sous-modules 1 à 9.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

RECHERCHE DU MAXIMUM

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Dans les pommes!

M. Pépin possède un verger de 30 pommiers qui fournit un rendement moyen de 400 pommes par arbre. Il veut ajouter des pommiers pour obtenir de son verger un rendement maximal; or, pour chaque arbre supplémentaire, le rendement moyen par pommier baisse de 10 pommes. Combien de pommiers M. Pépin devra-t-il ajouter pour s'assurer d'une récolte maximale?

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de résoudre des problèmes de *maximum* de rendement, de profit ou de hauteur. Les problèmes sont basés sur des situations de la vie courante. Vous devrez compléter des tableaux déjà ébauchés et calculer la valeur de *x* ou de *y* qui correspond au maximum recherché. Vous devrez aussi calculer un maximum en fonction de situations dont l'équation est donnée.

Afin d'aider M. Pépin à résoudre son problème, nous dressons le tableau ci-dessous.

Tableau 1.1 Rendement projeté du verger de M. Pépin

Nombre de pommiers à ajouter ***x***	**Nombre total de pommiers**	**Rendement moyen par pommier**	**Rendement total du verger** ***y***
0	30	400	$30 \times 400 = 12\ 000$
1	30 + 1	$400 - 10 \times 1$	$(30 + 1) \times (400 - 10 \times 1) = 12\ 090$
2	30 + 2	$400 - 10 \times 2$	$(30 + 2) \times (400 - 10 \times 2) = 12\ 160$
3	30 + 3	$400 - 10 \times 3$	$(30 + 3) \times (400 - 10 \times 3) = 12\ 210$
4	30 + 4	$400 - 10 \times 4$	$(30 + 4) \times (400 - 10 \times 4) = 12\ 240$
5	**30 + 5**	$\mathbf{400 - 10 \times 5}$	$\mathbf{(30 + 5) \times (400 - 10 \times 5) = 12\ 250}$
6	30 + 6	$400 - 10 \times 6$	$(30 + 6) \times (400 - 10 \times 6) = 12\ 240$
7	30 + 7	$400 - 10 \times 7$	$(30 + 7) \times (400 - 10 \times 7) = 12\ 210$
8	30 + 8	$400 - 10 \times 8$	$(30 + 8) \times (400 - 10 \times 8) = 12\ 160$
9	30 + 9	$400 - 10 \times 9$	$(30 + 9) \times (400 - 10 \times 9) = 12\ 090$
10	30 + 10	$400 - 10 \times 10$	$(30 + 10) \times (400 - 10 \times 10) = 12\ 000$

La 1^{re} colonne représente le nombre d'arbres que M. Pépin devra ajouter à son verger actuel. Ces nombres vont de 0 à 10 inclusivement et sont identifiés par x.

La 2^e colonne représente le nombre total de pommiers obtenus en faisant la somme du nombre actuel de pommiers et du nombre d'arbres à ajouter en vue d'obtenir un rendement maximal.

La 3^e colonne représente le rendement moyen par pommier. Ce rendement est égal au nombre moyen de pommes produites par arbre (400) moins la perte de production par arbre ajouté (10/arbre ajouté).

La 4^e colonne représente le rendement total du verger après plantation d'arbres supplémentaires. Ce rendement est égal au ***produit*** du nombre total d'arbres (colonne 2) par le rendement moyen de chaque arbre (colonne 3). Ce produit est identifié par y.

Dès lors, si vous regardez la 3^e ligne du tableau 1.1, vous constaterez que si nous ajoutons 2 arbres, le nombre total des pommiers sera **30 + 2 = 32**, que le rendement moyen par pommier sera de **400 – 10** × **2** et que le rendement total sera de **(30 + 2)** × **(400 – 10** × **2) = 12 160 pommes**. Vérifions si vous avez bien saisi. Si tel est le cas, vous devriez répondre facilement à ces questions.

? Quel est le rendement total le plus élevé du verger? ....

? Combien d'arbres faut-il ajouter au verger de M. Pépin pour obtenir le rendement total le plus élevé? ....

? Quel sera le nombre total de pommiers nécessaires pour obtenir le rendement maximal du verger? ....

? Quel sera le rendement moyen par pommier lorsque le rendement total aura atteint son **maximum**? ....

? Si M. Pépin ajoute de 0 à 5 arbres, le rendement total de son verger ira-t-il en augmentant ou en diminuant? ....

? Qu'arriverait-t-il au rendement total du verger si M. Pépin ajoutait de 6 à 10 arbres? ....

? Quel ***couple*** correspond au maximum de rendement du verger? ....

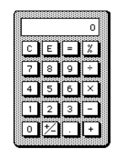
Le rendement total le plus élevé du verger de M. Pépin est de **12 250** pommes et ce rendement correspond à un ajout de **5** pommiers. Le nombre total de pommiers nécessaires à l'obtention du rendement maximal du verger est, par conséquent, de **35**. Le rendement moyen par pommier lorsque le rendement total atteint son maximum est égal à $400 - 10 \times 5$, soit **350** pommes.

En consultant le tableau 1.1, vous avez sans doute remarqué qu'en ajoutant de 0 à 5 arbres, le rendement total du verger de M. Pépin **augmente**, tandis qu'en ajoutant de 6 à 10 pommiers, ce même rendement **diminue**.

Finalement, le couple correspondant au maximum de rendement du verger est de 5 pommiers et 12 250 pommes, soit (**5, 12 250**). Voilà le problème résolu!

Plusieurs autres cas entraînent des problèmes basés sur le maximum. Voici un exemple tiré du secteur de l'imprimerie.

N.B. – L'usage de la calculatrice est permis pour tous les calculs et dans tout le module, à moins d'indication contraire.



Exemple 1

La presse *XYZ* imprime 36 volumes par jour qui sont vendus 40 $ chacun. Elle pourrait en imprimer 50 par jour. Cependant, pour chaque volume supplémentaire imprimé, le prix de vente à l'unité est réduit de 1 $. Combien de volumes supplémentaires devons-nous ajouter pour obtenir le montant maximal de ventes par jour? Quel est ce montant maximal?

Pour résoudre ce problème, complétez le tableau ci-dessous en suivant l'exemple des lignes déjà remplies.

Tableau 1.2 Montant des ventes de volumes produits par la presse *XYZ*

Volumes supplémentaires x	**Nombre total de volumes**	**Prix de vente par volume**	**Montant des ventes par jour** y
0	36	40 $	36 × 40 $ = 1 440 $
1	36 + 1 = 37	40 $ – 1 $ = 39 $	37 × 39 $ = ...
2	36 + 2 = 38	40 $ – 2 $ = ...	38 × .... = ...
3	36 + ... = ...	40 $ – ..... = ...	.... × .... = ...
4	.... + ... = ...	...... – ...... = ...	.... × .... = ...

Quel est le couple correspondant au maximum des ventes? ....

Quel est le nombre de volumes à ajouter pour obtenir le montant maximal de ventes par jour? ....

Quel est le montant maximal des ventes? ....

Complété, le tableau se présente comme suit.

Tableau 1.3 Montant des ventes de volumes produits par la presse *XYZ*

Volumes supplémentaires x	**Nombre total de volumes**	**Prix de vente par volume**	**Montant des ventes par jour** y
0	36	40 $	36 × 40 $ = 1 440 $
1	36 + 1 = 37	40 $ – 1 $ = 39 $	37 × 39 $ = **1 443** $
2	36 + 2 = 38	40 $ – 2 $ = **38 $**	38 × **38 $ = 1 444 $**
3	36 + **3 = 39**	40 $ **– 3 $ = 37 $**	**39** × **37 $ = 1 443 $**
4	**36 + 4 = 40**	**40 $ – 4 $ = 36 $**	**40** × **36** $ = **1 440 $**

Le couple correspondant au maximum des ventes est donc : 2 volumes supplémentaires et 1 444 $ de vente par jour soit (**2, 1 444**). Pour atteindre le maximum de **1 444 $**, il faut imprimer **2** volumes de plus par jour.

Pour trouver, à partir d'un tableau, la valeur de *x* ou de *y* qui correspond à un maximum, nous devons :

1° lire attentivement l'énoncé du problème;

2° compléter le tableau qui traduit la situation;

3° identifier le couple correspondant au maximum;

4° choisir en fonction de la question posée la valeur de x ou de y du couple maximum.

N.B. – Le couple qui correspond au maximum représente le ***sommet*** d'une ***parabole***. Nous étudierons la parabole lors d'un prochain objectif. Passons maintenant à un petit exercice.

Exercice 1.1

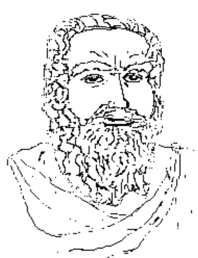
1. La compagnie Broche-à-foin peut vendre 300 magnétoscopes avec un ***profit*** de 60,00 $ l'unité. Comme elle veut en tirer un meilleur profit, elle retire ses appareils du marché afin d'en accroître la demande. Elle calcule que ses ventes augmenteront de 50 appareils par semaine d'attente, mais que son profit sera réduit de 5,00 $ par appareil à cause des frais d'entreposage. Complétez le tableau dressé d'après ces données.

Profits sur la vente de magnétoscopes

Nombre de semaines d'attente ***x***	**Nombre d'appareils vendus**	**Profit sur chaque appareil**	**Profit total** ***y***
0	300	60 $	60 $ $\times$ 300 = 18 000 $
1	300 + (1 $\times$ 50) = 350	60 $ – (5 $ $\times$ 1) = 55 $	55 $ $\times$ 350 = 19 250 $
2			
3			
4			
5			
6			

a) Quel est le couple correspondant au maximum de profit sur les ventes de magnétoscopes? ....

b) Quel est le nombre de semaines d'attente pour l'obtention d'un profit maximum? ....



Saviez-vous que...

… l'idée de retenir un article dans le but de faire hausser son prix sur le marché n'est pas nouvelle? C'est même l'un des principes de base en économie, car « la rareté crée la demande ». Cela signifie qu'une certaine clientèle est prête à payer cher et parfois très cher pour un produit qu'on ne retrouve pas partout. L'achat d'une automobile de luxe en est un bon exemple. Certaines personnes attendent depuis deux ans leur Ferrari Testarossa; cette voiture se vend approximativement 245 000 $ (prix de vente en 1989) service et taxes en sus!

Exemple 2

La hauteur en mètres atteinte par une balle lancée en l'air après t secondes est donnée par la ***fonction*** $h = -5t^2 + 30t$. Après combien de secondes la balle sera-t-elle à sa hauteur maximale?

Remarque

Tout au long de ce module, nous utiliserons le terme **fonction** pour désigner les ***équations*** relatives aux problèmes de maximum ou de ***minimum***.

Nous employons le terme **fonction** parce que, dans ce genre de situation, nous trouvons les valeurs d'une ***variable*** **en fonction** des valeurs déterminées de l'autre variable.

Vous aurez l'occasion d'approfondir davantage cette notion dans un module ultérieur.

? Pour résoudre ce problème, complétons le ***tableau de valeurs*** suivant où t représente le temps et h la hauteur.

Équation : $h = -5t^2 + 30t$

Tableau 1.4 Calcul de la hauteur atteinte par une balle

t	h	Détails du calcul du tableau de valeurs
0	0	Si $t = 0$, alors $h = -5(0)^2 + 30(0) = 0$.
1	25	Si $t = 1$, alors $h = -5(1)^2 + 30(1) = 25$.
2	40	Si $t = 2$, alors $h = -5(2)^2 + 30(2) = 40$.
3	45	Si $t = 3$, alors $h = -5(3)^2 + 30(3) = 45$.
4	40	Si $t = 4$, alors $h = -5(4)^2 +$ .... = ...
......	25	Si $t = 5$, alors $h =$ .... + ... = ...
6	......	Si $t =$ ..., alors $h =$ .... + ... = ...

Pour compléter le tableau 1.4, il suffit de remplacer t par la valeur qui lui est donnée à chaque ligne. Nous obtenons le tableau suivant.

t	h	Détails du calcul du tableau de valeurs
0	0	Si $t = 0$, alors $h = -5(0)^2 + 30(0) = 0$.
1	25	Si $t = 1$, alors $h = -5(1)^2 + 30(1) = 25$.
2	40	Si $t = 2$, alors $h = -5(2)^2 + 30(2) = 40$.
3	45	Si $t = 3$, alors $h = -5(3)^2 + 30(3) = 45$.
4	40	Si $t = 4$, alors $h = -5(4)^2 + \mathbf{30(4)} = \mathbf{40}$.
5	25	Si $t = 5$, alors $h = \mathbf{-5(5)^2} + \mathbf{30(5)} = \mathbf{25}$.
6	**0**	Si $t =$ **6,** alors $h = \mathbf{-5(6)^2} + \mathbf{30(6)} = \mathbf{0}$.

Le couple $(3, 45)$ correspond au point maximum de l'équation $h = -5t^2 + 30t$; c'est donc après 3 secondes que la balle aura atteint sa hauteur maximale.

> **Pour trouver, à partir d'une équation, la valeur de *x* ou de *y* qui correspond à un maximum, nous devons :**
> 1° déterminer ce que représentent le x et le y;
> 2° compléter le tableau de valeurs pour les x donnés;
> 3° identifier le couple correspondant au maximum;
> 4° choisir la valeur de x ou de y du couple maximum en fonction de la question posée.

L'exercice qui suit vous permettra de vérifier si vous pouvez trouver la valeur de x ou de y qui correspond au maximum recherché.

Exercice 1.2

1. Soit la fonction $h = -5t^2 + 20t + 30$ représentant la hauteur en mètres atteinte par un objet t secondes après son lancement. Calculez le temps requis pour que cet objet atteigne sa hauteur maximale. Quelle est cette hauteur maximale?

   Utilisez pour t les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 et complétez les quatre étapes de résolution du problème pour trouver la valeur maximale.

   1° ....

   2° Tableau de valeurs.

Hauteur atteinte par un objet après lancement

t	h	Détails des calculs du tableau de valeurs de l'équation $h = -5t^2 + 20t + 30$
0		
1		
2		
3		
4		

   3° ....

   4° ....
   ....

La théorie exposée dans ce premier sous-module se résume à deux algorithmes présentés dans les deux encadrés des pages précédentes. Relisez-les avant de passer aux exercices de consolidation.

? 1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Une enquête menée lors d'un festival de théâtre amateur à Sherbrooke démontre que 100 personnes y assisteraient si les billets étaient vendus au prix de 4,50 \$. Pour chaque diminution de 0,30 \$ du prix du billet, 20 personnes de plus viendraient au festival.

   a) Pour quel prix des places y aurait-il la plus grande rentrée d'argent possible?

   b) Quelle serait la rentrée d'argent maximale?

   Complétez le tableau suivant pour trouver les réponses à ces questions.

Rentrée d'argent au festival de théâtre de Sherbrooke

Nombre de personnes ajoutées $x \times 20$	Nombre total de personnes	Prix du billet	Rentrée d'argent y
0	100	4,50 \$	4,50\$ × 100 = 450 \$
1 × 20	100 + 20 = 120	4,50 \$ – (0,30 \$ × 1)	4,20 \$ × 120 = 504 \$
2 × 20			
3 × 20			
4 × 20			
5 × 20			
6 × 20			
7 × 20			

a) ....

b) ....

2. La fonction $h = 40t - 5t^2$ représente la hauteur d'un objet lancé en l'air après t secondes. Dressez un tableau de valeurs pour $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8. Après combien de secondes l'objet atteindra-t-il une hauteur maximale? Pour répondre à cette question, complétez les quatre étapes destinées à trouver la valeur maximale. Inscrivez vos réponses dans les espaces prévus ci-dessous.

1° ....

2°

Hauteur d'un objet lancé en l'air après *t* secondes

3° ....

4° ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Complétez les phrases suivantes.

   a) Nous pouvons trouver la valeur de x ou de y qui correspond à un .... à partir d'un tableau représentant la situation ou à partir d'une ....

   b) Pour trouver, à partir d'un tableau, la valeur de x ou de y qui correspond à un maximum, il suffit de :

   1° lire attentivement l'............................ du problème;

   2° .... le tableau de valeurs traduisant la situation;

   3° identifier le couple correspondant au .... ;

   4° choisir la valeur de .... ou de y du couple .... en fonction de la question posée.

2. Décrivez les quatre étapes nécessaires pour trouver la valeur de x ou de y qui correspond à un maximum à partir d'une équation.

   1° ....
   ....

   2° ....
   ....

   3° ....
   ....

   4° ....
   ....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Un maximum bien caché!

Voici un petit défi lancé aux audacieux et aux audacieuses!

La compagnie PUCE pourrait vendre actuellement 100 calculatrices de poche avec un profit de 5,00 $ l'unité. Elle décide de retirer ses calculatrices du marché afin de susciter une plus grande demande. La compagnie calcule que, pour chaque semaine d'attente, elle pourra vendre 20 calculatrices de plus. Par ailleurs, pour chaque semaine d'attente, le profit par calculatrice est réduit de 0,25 $ par suite de la remise et des frais d'entreposage. Combien de temps la compagnie PUCE devrait-elle attendre pour obtenir le profit maximal?

Pour résoudre ce problème, complétez le tableau de valeurs de la page suivante.

Profit sur ventes de calculatrices

Nombre de semaines d'attente x	**Nombre de calculatrices vendues**	**Profit sur chaque calculatrice**	**Profit total** y
0	100	5 $	100×5 $ = 500 $
1	$100 + 1 \times 20 = 120$	5 $ – $1 \times 0{,}25$ $ = 4,75 $	$120 \times 4{,}75$ $ = 570 $
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Corrigé