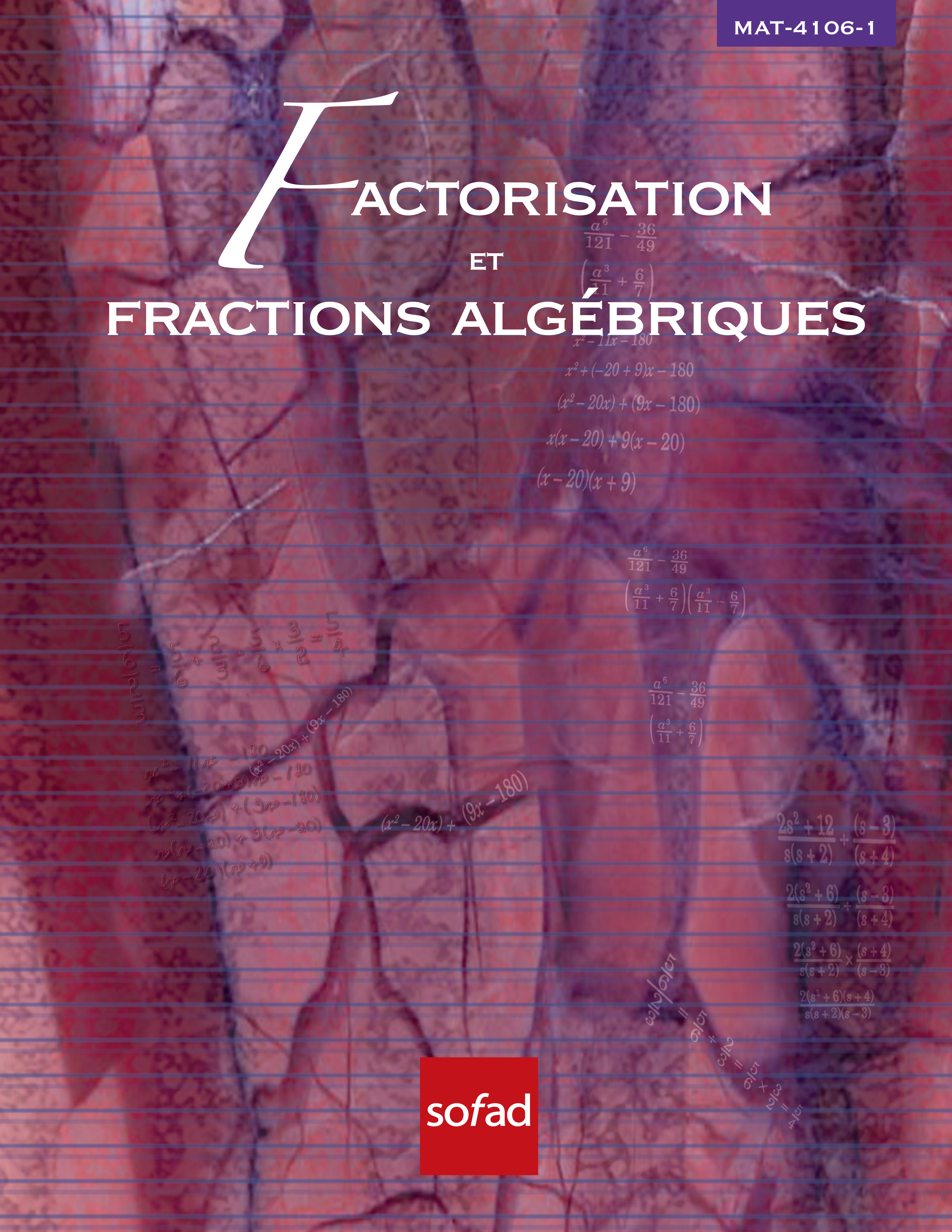
MAT-4106-1



FACTORISATION ET FRACTIONS ALGÉBRIQUES

sofad

MAT-4106-1

FACTORISATION

ET

FRACTIONS

ALGÉBRIQUES

sofad

Responsable du projet : Jean-Paul Groleau

Rédactrices : Nicole Perreault
Suzie Asselin

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Alain Malouin

Mise à jour : Line Régis

Réviseure linguistique : Johanne St-Martin

Édition électronique : P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Première édition : 2004

Impression : 2004

Dépôt légal — 2004

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 2-89493-272-3

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

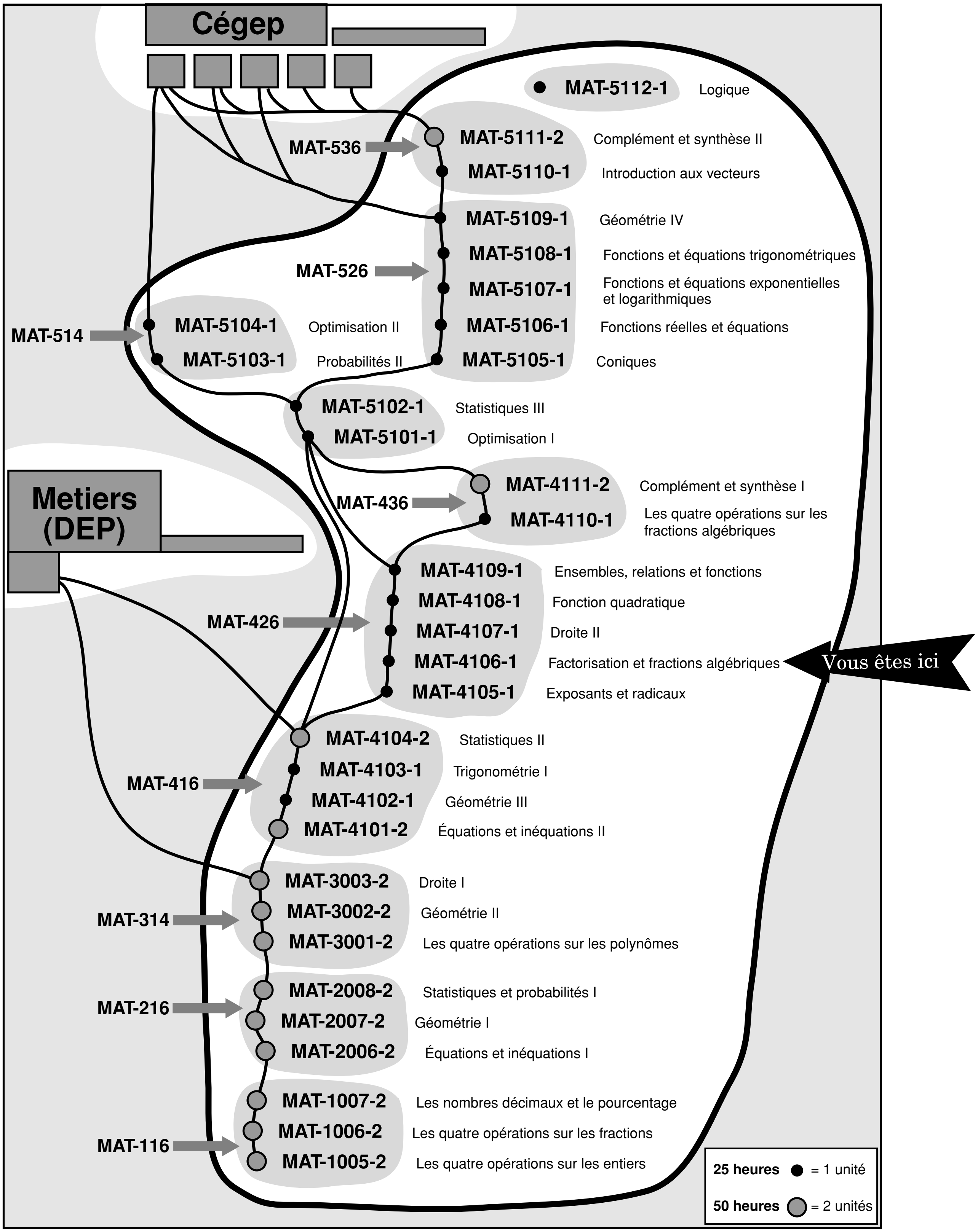
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

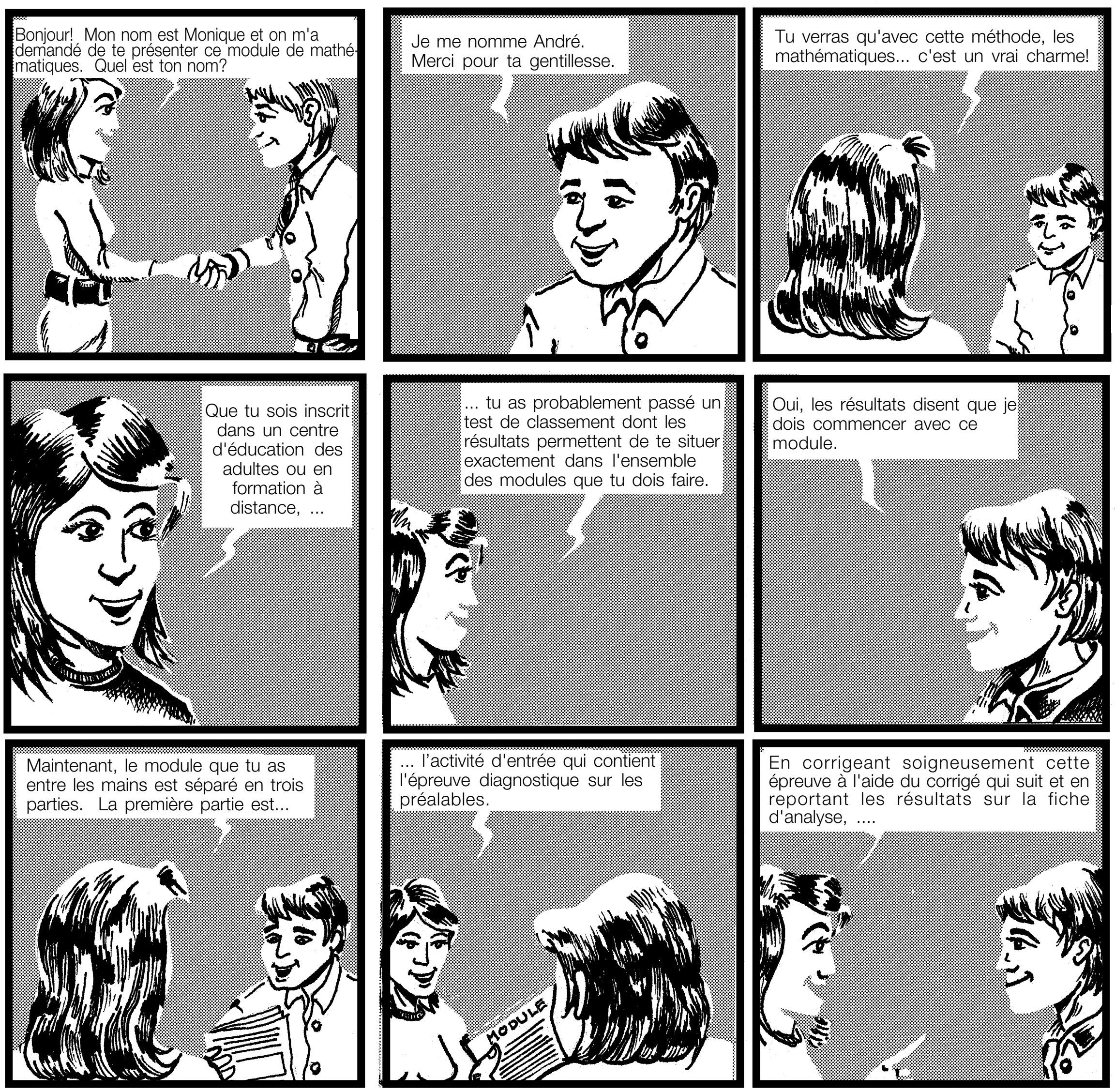
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au collège (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

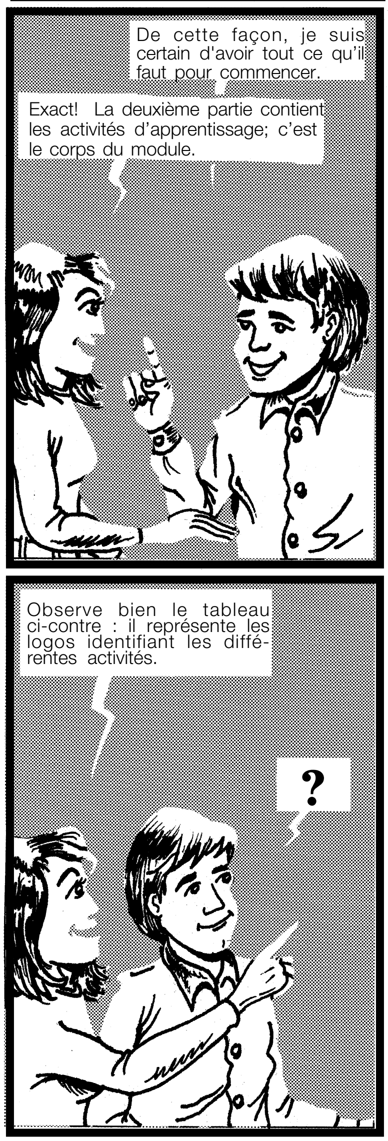
Si c'est votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la partie intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

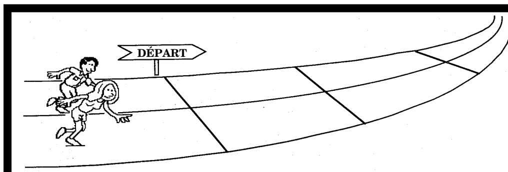
ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?







La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

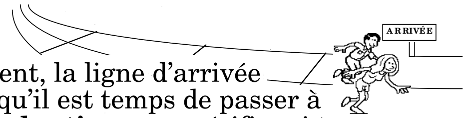
La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.



Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathé-matiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans ce module, nous aborderons **la factorisation** ainsi que les **quatre opérations (+, –, ×, ÷) sur les fractions algébriques.**

Dans la première partie du module, vous apprendrez les cinq méthodes de factorisation :

1° factorisation par simple mise en évidence ;
2° factorisation par double mise en évidence ;
3° factorisation de trinômes de la forme $x^2 + bx + c$ ou de la forme $x^2 + bxy + cy^2$;
4° factorisation de trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$ ou de la forme $ax^2 + bxy + cy^2$;
5° factorisation de la différence de deux carrés.

Factoriser un polynôme signifie écrire ce polynôme sous la forme d'un produit de deux ou plusieurs polynômes. Autrement dit, **factoriser un polynôme, c'est trouver les facteurs d'un polynôme.** Un sous-module sera consacré à l'étude de chacune de ces méthodes.

La factorisation est un outil mathématique précieux pour résoudre des équations du second degré (équations où l'exposant le plus élevé est 2).

Malheureusement, certains polynômes ne sont pas factorisables. Pour résoudre des équations contenant ce type de polynômes, il faudra avoir recours à des techniques plus complexes qui seront abordées dans un cours ultérieur.

Dans la seconde partie du module, vous apprendrez à effectuer diverses opérations sur les fractions algébriques. En premier lieu, vous découvrirez comment les simplifier (factorisation du numérateur et du dénominateur). Il est important de développer cette habileté, car vous devrez y recourir pour tous les sous-modules de la deuxième partie du module. En effet, tous vos résultats devront être réduits à leur plus simple expression.

Dans les sous-modules qui suivront la simplification, nous vous enseignerons la multiplication, la division, l'addition et la soustraction de fractions algébriques.

Il va sans dire que les connaissances déjà acquises au sujet des opérations sur les fractions numériques vous faciliteront grandement la tâche. Comme autres atouts, il vous faut un sens aigu de l'observation, de l'ordre et de la méthode.

Ce sont les notions auxquelles nous ferons appel dans ce module portant sur la factorisation et les quatre opérations sur les fractions algébriques.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4106-1 comporte neuf sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures, réparties tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombres d'heures****	**% (évaluation)**
1 à **6**	11	35 %
7 à 9	13	65 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Factorisation par simple mise en évidence

   Effectuer une simple mise en évidence du facteur commun à tous les termes d'un polynôme renfermant au plus six termes reliés par les signes + ou –. Le résultat doit être exprimé sous forme de produit d'un monôme par un polynôme placé entre parenthèses. Les coefficients numériques des termes du polynôme sont des nombres rationnels et les exposants des variables sont des nombres naturels.

2. Factorisation par double mise en évidence

   Factoriser un polynôme d'au plus six termes reliés par les signes + ou – en appliquant la méthode de la double mise en évidence. Le résultat doit être exprimé sous forme de produit d'un binôme par un binôme ou d'un binôme par un trinôme. Il peut être nécessaire d'ordonner le polynôme avant de pouvoir effectuer la double mise en évidence. Les coefficients numériques des termes du polynôme sont des nombres rationnels et les exposants des variables sont des nombres naturels. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

3. Factorisation d'un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ ou de la forme $x^2 + bxy + cy^2$

   Factoriser un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ ou de la forme $x^2 + bxy + cy^2$ où b et c sont des nombres entiers. Le résultat doit être exprimé sous forme de produit de deux binômes respectivement de la forme $(x + d)(x + e)$ ou de la forme $(x + dy)(x + ey)$ où d et e sont des nombres entiers. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

4. Factorisation d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ ou de la forme $ax^2 + bxy + cy^2$

   Factoriser un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ ou de la forme $ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b et c sont des nombres entiers. Le résultat doit être exprimé sous forme de produit de deux binômes, respectivement de la forme $(kx + l)(mx + n)$ ou de la forme $(kx + ly)(mx + ny)$, où k, l, m et n sont des nombres entiers. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

5. Factorisation de la différence de deux carrés

Factoriser la différence de deux carrés en un produit de deux binômes formés d'une part, de la somme et d'autre part, de la différence des racines carrées de chacun des termes de l'expression algébrique initiale. La différence de carrés est de la forme $(ax^{2n} - by^{2m})$ où a et b sont des carrés de nombres rationnels, tandis que x et y sont des variables. Les valeurs numériques de n et de m sont des nombres naturels différents de 0 et inférieurs ou égaux à 4.

6. Factorisation d'un polynôme

Factoriser un polynôme renfermant au plus six termes en un produit d'au plus trois facteurs premiers en appliquant une simple mise en évidence et une autre méthode de factorisation appropriée choisie parmi les suivantes :

- **double mise en évidence;**
- **trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ ou de la forme $x^2 + bxy + cy^2$;**
- **trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ ou de la forme $ax^2 + bxy + cy^2$;**
- **différence de deux carrés.**

Les étapes de la résolution doivent être décrites.

7. Réduction d'une fraction algébrique

Réduire à sa plus simple expression une fraction algébrique rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes factorisables, chacun formés d'un maximum de trois termes. Chaque terme contient au plus deux variables. L'opération doit nécessiter au maximum quatre factorisations, dont deux au plus par polynôme. Si deux factorisations sont nécessaires pour un même polynôme, l'une de celles-ci doit être une simple mise en évidence. Les étapes de la réduction doivent être décrites.

8. Produit et quotient de deux fractions algébriques

Trouver le produit ou le quotient de deux fractions algébriques rationnelles. Les polynômes des numérateurs et des dénominateurs sont factorisables et renferment au maximum trois termes. Chaque terme contient au plus deux variables. La résolution doit nécessiter au maximum quatre factorisations, dont deux au plus par polynôme. Si deux factorisations sont nécessaires pour un même polynôme, l'une de celles-ci doit être une simple mise en évidence. Le produit doit être réduit à sa plus simple expression et les étapes de la résolution doivent être décrites.

9. Réduction d'une somme ou différence de deux fractions algébriques et comparaison d'expressions algébrique

Réduire à sa plus simple expression une expression algébrique qui renferme deux fractions algébriques rationnelles reliées par l'opération d'addition ou de soustraction. Les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes factorisables ou non, qui renferment au maximum trois termes. Chaque terme contient au plus deux variables. Si deux factorisations sont nécessaires pour un même polynôme, l'une de celles-ci doit être une simple mise en évidence. Le dénominateur commun doit être constitué d'un maximum de deux binômes et un monôme. Les étapes de la résolution doivent être décrites.

Déterminer l'équivalence d'expressions algébriques en les réduisant à leur forme la plus simple. Les expressions sont constituées de la somme ou de la différence de deux fractions algébriques. Les polynômes des numérateurs et des dénominateurs renferment au maximum trois termes. Chaque terme contient au plus deux variables.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions de ce test.

2° N'utilisez pas de calculatrice.

3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Trouvez tous les facteurs des nombres suivants.

a) 24 : ....   b) 54 : ....

c) 100 : ....

2. Réduisez à leur plus simple expression les fractions suivantes.

a) $\frac{35}{75}$ =   b) $\frac{12}{64}$ =

c) $\frac{81}{27}$ =

3. Effectuez les multiplications et les divisions suivantes. Votre résultat doit être réduit à sa plus simple expression.

a) $\frac{8}{14} \times \frac{7}{12}$ = ...   b) $\frac{14}{15} \times \frac{5}{8}$ = ...

c) $\frac{6}{11} \div \frac{5}{22}$ = ...   d) $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3}$ = ...

4. Effectuez les additions et les soustractions suivantes. Votre résultat doit être réduit à sa plus simple expression.

a) $\frac{5}{12} + \frac{21}{8}$ = ...

b) $\frac{3}{8} + \frac{7}{32}$ = ...

c) $\frac{18}{7} - \frac{2}{3}$ = ...

d) $\frac{5}{6} - \frac{7}{15}$ = ...

5. Effectuez les opérations suivantes.

a) $4a^2b + 6ab - 3a^2b - a^2b + 5ab =$ ....

b) $(7yz + 2z - 3y) - (4z - 3yz + y) =$ ....

c) $3cd(4d - 8c^2 + cd^2 - 2) =$ ....

d) $\frac{m}{4}\left(\frac{n^2}{3} - \frac{2m^2}{5} + \frac{mn^2}{2}\right) =$ ....

e) $(2u + 3)(u - 4) =$ ....

f) $(20p^3q^2 - 12p^2q^3 - 4p^3q) \div 4pq =$ ....

g) $(3s + 4)^2 =$ ....

h) $\frac{2r^2t^2}{3}\left(\frac{r}{2} + \frac{t}{4} - \frac{5rt}{7}\right) \div \left(\frac{-3rt^2}{4}\right) =$ ....

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) Les facteurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, et 24.

   b) Les facteurs de 54 sont 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 et 54.

   c) Les facteurs de 100 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 et 100.

2. a) $\frac{35}{75} = \frac{35 \div 5}{75 \div 5} = \frac{7}{15}$

   b) $\frac{12}{64} = \frac{12 \div 4}{64 \div 4} = \frac{3}{16}$

   c) $\frac{81}{27} = \frac{81 \div 27}{27 \div 27} = \frac{3}{1} = 3$

3. a) $\frac{\overset{1}{\cancel{\overset{2}{\cancel{8}}}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{2}{\cancel{14}}}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{1}{3}$

   b) $\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

   c) $\frac{6}{11} \div \frac{5}{22} = \frac{6}{\underset{1}{\cancel{11}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{22}}}{5} = \frac{6}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

   d) $\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{1}{3}$

4. a) $\frac{5}{12} + \frac{21}{8} = \frac{10}{24} + \frac{63}{24} = \frac{73}{24}$

   b) $\frac{3}{8} + \frac{7}{32} = \frac{12}{32} + \frac{7}{32} = \frac{19}{32}$

   c) $\frac{18}{7} - \frac{2}{3} = \frac{54}{21} - \frac{14}{21} = \frac{40}{21}$

   d) $\frac{5}{6} - \frac{7}{15} = \frac{25}{30} - \frac{14}{30} = \frac{11}{30}$

5. a) $4a^2b + 6ab - 3a^2b - a^2b + 5ab = 11ab$

   b) $(7yz + 2z - 3y) - (4z - 3yz + y) = 7yz + 2z - 3y - 4z + 3yz - y = 10yz - 4y - 2z$

c) $3cd(4d - 8c^2 + cd^2 - 2) = 12cd^2 - 24c^3d + 3c^2d^3 - 6cd$

d) $\frac{m}{4}\left(\frac{n^2}{3} - \frac{2m^2}{5} + \frac{mn^2}{2}\right) = \frac{mn^2}{12} - \frac{m^3}{10} + \frac{m^2n^2}{8}$

e) $(2u + 3)(u - 4) = 2u^2 - 8u + 3u - 12 = 2u^2 - 5u - 12$

f) $(20p^3q^2 - 12p^2q^3 - 4p^3q) \div 4pq = 5p^2q - 3pq^2 - p^2$

g) $(3s + 4)^2 = (3s + 4)(3s + 4) = 9s^2 + 12s + 12s + 16 = 9s^2 + 24s + 16$

h) $\frac{2r^2t^2}{3}\left(\frac{r}{2} + \frac{t}{4} - \frac{5rt}{7}\right) \div \left(-\frac{3rt^2}{4}\right) = \left(\frac{r^3t^2}{3} + \frac{r^2t^3}{6} - \frac{10r^3t^3}{21}\right) \div \left(-\frac{3rt^2}{4}\right) =$

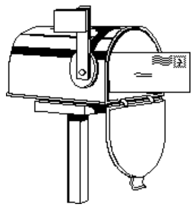
$\left(\frac{r^3t^2}{3} + \frac{r^2t^3}{6} - \frac{10r^3t^3}{21}\right) \times \left(\frac{-4}{3rt^2}\right) = -\frac{4r^2}{9} - \frac{2rt}{9} + \frac{40r^2t}{63}$

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			11.1	11.4	Sous-module 1
b)			11.1	11.4	Sous-module 1
c)			11.1	11.4	Sous-module 1
2. a)			11.2	11.9	Sous-module 7
b)			11.2	11.9	Sous-module 7
c)			11.2	11.9	Sous-module 7
3. a)			11.3	11.12	Sous-module 8
b)			11.3	11.12	Sous-module 8
c)			11.3	11.12	Sous-module 8
d)			11.3	11.12	Sous-module 8
4. a)			11.4	11.17	Sous-module 9
b)			11.4	11.17	Sous-module 9
c)			11.4	11.17	Sous-module 9
d)			11.4	11.17	Sous-module 9
5. a)			11.5	11.25	Sous-module 1
b)			11.5	11.25	Sous-module 1
c)			11.5	11.25	Sous-module 1
d)			11.5	11.25	Sous-module 1
e)			11.5	11.25	Sous-module 1
f)			11.5	11.25	Sous-module 1
g)			11.5	11.25	Sous-module 1
h)			11.5	11.25	Sous-module 1

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires à l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités proposées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4106-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4106-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

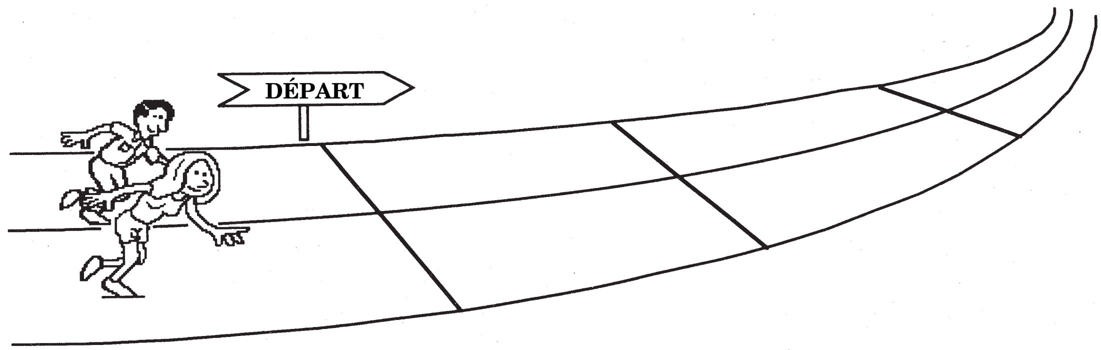
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 6.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 7 à 9.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 9.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

FACTORISATION PAR SIMPLE MISE EN ÉVIDENCE

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

C'est l'évidence même!

Chanh et Josée terminent à l'instant la résolution d'un problème de mathématiques. Ils comparent leurs résultats. Chanh a obtenu comme réponse l'***expression algébrique*** $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$, tandis que Josée a comme solution $4x^3(x^2 + 3x + 2)$.

À première vue, ces résultats semblent différents. Pourtant, les deux expressions algébriques sont équivalentes; autrement dit, elles ont la même valeur.

L'expression $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$ est un ***polynôme***. Puisque cette expression contient trois ***termes***, nous l'appelons ***trinôme***.

rappel

Un polynôme est une expression algébrique formée de un ou de plusieurs termes reliés entre eux par des signes d'addition ou de soustraction. Si cette expression ne contient qu'un terme, elle porte le nom de ***monôme****; si elle en contient deux, c'est un* ***binôme****; si elle est formée de trois termes, c'est un trinôme.*

Quelle relation pouvons-nous établir entre les expressions $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$ et $4x^3(x^2 + 3x + 2)$? Pour répondre à cette question, nous devons pouvoir ***factoriser*** un polynôme.

> **Factoriser un polynôme**, c'est écrire ce polynôme sous la forme d'un produit de deux ou de plusieurs polynômes.

L'expression algébrique $4x^3(x^2 + 3x + 2)$ obtenue par Josée est le produit du monôme $4x^3$ par le trinôme $x^2 + 3x + 2$. Cette expression est équivalente à celle que Chanh a trouvée parce qu'elle provient de la ***factorisation*** du polynôme $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$. Comment y parvenir? C'est l'objet d'étude de ce sous-module.

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de factoriser par la *simple mise en évidence* des polynômes formés d'au plus six termes.

Il existe plusieurs techniques de factorisation. La technique qui permet de résoudre le problème de Josée et Chanh se nomme la **simple mise en évidence**. Pour l'appliquer, nous devons d'abord trouver le plus grand ***facteur commun*** à tous les termes du polynôme à factoriser.

rappel

Un facteur commun est un nombre ou un terme qui peut diviser plusieurs nombres ou plusieurs termes sans laisser de reste. Le facteur commun se nomme aussi diviseur commun. Ainsi, 5 est un facteur commun de 10 et 15 parce que 5 divise 10 et 15 sans reste (10 ÷ 5 = 2 et 15 ÷ 5 = 3); 3x est un facteur commun de 6x et $9x^2$ parce que 3x divise 6x et $9x^2$ sans reste $\left(\frac{6x}{3x} = 2 \text{ et } \frac{9x^2}{3x} = 3x\right)$

Exemple 1

Trouvons le plus grand facteur commun du binôme $3x^2 + 6xy$.

1° Cherchons le plus grand facteur commun aux ***coefficients numériques*** des deux termes du binôme :

- les ***facteurs*** de 3 sont 1, $\boxed{3}$;
- les facteurs de 6 sont 1, 2, $\boxed{3}$, 6.

∴ Le plus grand facteur commun à ces coefficients numériques est 3.

rappel

Le coefficient numérique est le nombre qui multiplie la ou les variables d'un terme. C'est la partie numérique d'une expression. Ainsi, les coefficients numériques des expressions $5x^3; -2y^5; \frac{1}{3}ab^2; 0{,}5a^3b^5c^4$ *sont respectivement* $5; -2; \frac{1}{3}$ *et 0,5.*

2° Cherchons le plus grand facteur commun à la ***partie algébrique*** des deux termes du binôme. Pour ce faire, nous devons :

a) trouver la ou les variables communes aux deux termes :

- la variable x est commune aux deux termes;

b) affecter chaque variable commune de l'***exposant*** le plus petit qu'elle possède dans le polynôme d'origine :

- dans le binôme $3x^2 + 6xy$, 1 est le plus petit exposant de la variable x .

$\therefore$ Le plus grand facteur commun de la partie algébrique est x.

3° Multiplions chacun des éléments communs : $3 \times x = 3x$.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun du binôme $3x^2 + 6xy$ est $3x$.

Exemple 2

Trouvons le plus grand facteur commun du trinôme $10x^4y^3 + 4x^3y - 2x^2y^2$.

1° Cherchons le plus grand facteur commun aux coefficients numériques de tous les termes du trinôme :

- les facteurs de 10 sont 1, $\boxed{2}$, 5, 10;
- les facteurs de 4 sont 1, $\boxed{2}$, 4;
- les facteurs de 2 sont 1, $\boxed{2}$.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun aux coefficients numériques du trinôme est 2.

2° Cherchons le plus grand facteur commun à la partie algébrique de tous les termes du trinôme. Pour ce faire, nous devons :

a) trouver la ou les variables communes aux trois termes :

- les variables x et y sont communes aux trois termes;

b) affecter chacune des variables communes de l'exposant le plus petit qu'elle possède dans le polynôme d'origine :

- dans le trinôme $10x^4y^3 + 4x^3y - 2x^2y^2$, 2 est le plus petit exposant de la variable x et 1 est le plus petit exposant de la variable y.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun de la partie algébrique est x^2y.

3° Multiplions chacun des éléments communs : $2 \times x^2y = 2x^2y$.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun de l'expression $10x^4y^3 + 4x^3y - 2x^2y^2$ est $2x^2y$.

Ce n'est guère compliqué, n'est-ce pas? Résumons ci-dessous les étapes à suivre pour trouver le plus grand facteur commun à tous les termes d'un polynôme.

Pour trouver le plus grand facteur commun aux termes d'un polynôme, nous devons :

1° trouver le plus grand facteur commun aux coefficients numériques de tous les termes du polynôme;

2° trouver le plus grand facteur commun à la partie algébrique de tous les termes du polynôme

a) en trouvant la ou les variables communes à tous les termes du polynôme,

b) en affectant chacune des variables communes de l'exposant le plus petit qu'elle possède dans le polynôme d'origine;

3° multiplier chacun des éléments communs.

Quel est le plus grand facteur commun de l'expression

$$4a^3b^2c^4 - 8a^2b^3c^3 + 6b^3c - 12a^5b^2c^4?$$

1° ....

2° ....

3° ....

Si vous avez comme résultat $2b^2c$, bravo! Sinon, lisez attentivement la solution qui suit et reprenez l'exercice.

1° • Les facteurs de 4 sont 1, $\boxed{2}$, 4;
• les facteurs de 8 sont 1, $\boxed{2}$, 4, 8;
• les facteurs de 6 sont 1, $\boxed{2}$, 3, 6;
• les facteurs de 12 sont 1, $\boxed{2}$, 3, 4, 6, 12.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun des coefficients numériques est 2.

2° a) Les variables communes à tous les termes du polynôme sont b et c;

b) 2 est l'exposant le plus petit de la variable b et 1 est l'exposant le plus petit de la variable c.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun de la partie algébrique est b^2c.

3° Le plus grand facteur commun de l'expression algébrique

$$4a^3b^2c^4 - 8a^2b^3c^3 + 6b^3c - 12a^5b^2c^4 \text{ est } 2 \times b^2c = 2b^2c.$$

Effectuons quelques exercices du même genre. L'habileté à trouver le plus grand facteur commun d'un polynôme est essentielle à la compréhension des notions qui vont suivre.

Exercice 1.1

Trouvez le plus grand facteur commun de chacun des polynômes suivants.

1. $8x^3 + 12x^4 + 4x^5$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

2. $6a^2bc + 12a^2b^3c^2 - 18a^2b^2$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

3. $16x^3y + 12x^3y^2 - 8x^2y^4 + 20x^2y^2$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

4. $2m^2np - 3mn^2p^2 + 5m^3n^3p$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

5. $3k^3l^4 - 6k^2l^3 + 18k^4l^2 - 12k^5l^3 + 3k^3l^2$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

À la suite de cette gymnastique mentale, vous pouvez désormais résoudre le problème de Chanh et Josée grâce à la technique de factorisation par simple mise en évidence. L'exemple ci-dessous vous indique la marche à suivre.

Exemple 3

Factorisons par simple mise en évidence le trinôme $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$ obtenu par Chanh.

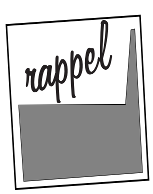
1° Cherchons le plus grand facteur commun à tous les termes du trinôme :

- le plus grand facteur commun aux coefficients numériques de tous les termes est 4;
- le plus grand facteur commun à la partie algébrique de tous les termes est x^3.

$\therefore$ Le plus grand facteur commun du trinôme $4x^5 + 12x^4 + 8x^3$ est $4x^3$.

2° Divisons chaque terme du trinôme par ce facteur commun.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x^5}{\underset{1}{\cancel{4}}x^3} + \frac{\overset{3}{\cancel{12}}x^4}{\underset{1}{\cancel{4}}x^3} + \frac{\overset{2}{\cancel{8}}x^3}{\underset{1}{\cancel{4}}x^3} = x^{5-3} + 3x^{4-3} + 2x^{3-3} = x^2 + 3x + 2.$$



- *Pour effectuer la division de deux monômes, nous devons diviser les coefficients numériques de ces deux monômes et soustraire les exposants d'une même variable :* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
- *Toute variable élevée à la puissance 0 est égale à 1 :* $a^0 = 1$.

3° Plaçons le nouveau trinôme entre parenthèses et inscrivons le plus grand facteur commun devant ces parenthèses. Ce faisant, nous **mettons en évidence** le facteur commun : $4x^3(x^2 + 3x + 2)$.

4° Vérifions le résultat.

Pour ce faire, nous multiplions chacun des termes placés entre parenthèses par le monôme situé devant ces parenthèses.

$4x^3(x^2 + 3x + 2) = 4x^3(x^2) + 4x^3(3x) + 4x^3(2) = 4x^{3+2} + 12x^{3+1} + 8x^3 =$

$4x^5 + 12x^4 + 8x^3$

Le polynôme obtenu étant égal au polynôme d'origine, la simple mise en évidence est complétée et nous pouvons poser :

$$4x^3(x^2 + 3x + 2) = 4x^5 + 12x^4 + 8x^3$$

rappel

Pour effectuer la multiplication d'un monôme par un polynôme, nous devons multiplier le coefficient numérique du monôme par chacun des coefficients numériques du polynôme et additionner les exposants d'une même variable : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

☞ Attention! L'étape de la vérification vous permet de vérifier si votre division en 2° a été bien effectuée et permet généralement de trouver des erreurs de signes ou une fausse détermination du plus grand facteur commun. Cependant, elle ne vous permet pas de vérifier avec certitude que vous avez trouvé correctement **le plus grand** facteur commun. Par exemple, si, dans l'exemple 3, vous avez trouvé $4x^2$ en 1°, vous obtiendrez : $4x^2(x^3 + 3x^2 + 2x) = 4x^5 + 12x^4 + 8x^3$, ce qui peut sembler exact; toutefois, l'expression initiale n'est pas ici complètement factorisée puisque, dans la parenthèse, le facteur x est encore commun aux trois termes du polynôme. Il est donc primordial de vous assurer que vous avez déterminé avec exactitude **le plus grand facteur commun** de tous les termes du polynôme sur lequel vous devez effectuer une simple mise en évidence.

Chanh et Josée avaient donc raison tous les deux. La solution de Josée découlait en réalité de la factorisation par simple mise en évidence de l'expression obtenue par Chanh. Passons à un autre exemple.

Exemple 4

Factorisons par simple mise en évidence le polynôme ci-dessous :

$$-3m^3n - 7m^3r + 8m^3rt$$

1° Cherchons le plus grand facteur commun à tous les termes du polynôme :

- le plus grand facteur commun aux coefficients numériques de tous les termes est 1;
- le plus grand facteur commun à la partie algébrique est m^3.

∴ Le plus grand facteur commun du polynôme est m^3.

2° Divisons chaque terme du polynôme par ce facteur commun.

$$\frac{-3m^3n}{m^3} - \frac{7m^3r}{m^3} + \frac{8m^3rt}{m^3} = -3m^{3-3}n - 7m^{3-3}r + 8m^{3-3}rt$$

$$= -3n - 7r + 8rt$$

3° Plaçons le nouveau polynôme entre parenthèses et inscrivons le plus grand facteur commun devant ces parenthèses.

$$m^3(-3n - 7r + 8rt)$$

4° Vérifions le résultat obtenu :

$$m^3(-3n - 7r + 8rt) = -3m^3n - 7m^3r + 8m^3rt$$

Le produit étant égal au polynôme d'origine, la simple mise en évidence est complétée et nous pouvons poser :

$$-3m^3n - 7m^3r + 8m^3rt = m^3(-3n - 7r + 8rt)$$

N.B. – Dans l'exemple précédent, nous pouvons aussi mettre en évidence le facteur $-m^3$. Si tel est le cas, il faut faire attention à la nature du signe qui relie chaque terme du trinôme placé entre parenthèses. Après mise en évidence, nous obtenons $-m^3(3n + 7r - 8rt)$ parce que :

$$-m^3(3n + 7r - 8rt) = -3m^3n - 7m^3r + 8m^3rt$$

rappel

Loi des signes lors de la multiplication ou de la division

+ *par* + = +

– *par* – = +

+ *par* – = –

– *par* + = –

La factorisation par simple mise en évidence n'a rien de compliqué! Nous vous proposons un résumé des étapes à suivre pour appliquer cette technique.

Pour effectuer une simple mise en évidence, nous devons :

1° trouver le plus grand facteur commun à tous les termes du polynôme;

2° diviser chacun des termes du polynôme par ce plus grand facteur commun;

3° placer le nouveau polynôme entre parenthèses et inscrire le plus grand facteur commun devant ces parenthèses;

4° vérifier le résultat obtenu en multipliant le facteur placé en évidence par chacun des termes du polynôme contenu dans les parenthèses.

? Factorisez le polynôme $-2ab^3 - 4b^3c - 12b^3d$ par simple mise en évidence.

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

Pour factoriser ce polynôme, nous pouvons mettre en évidence le facteur commun $-2b^3$ ou le facteur commun $2b^3$.

1° Le plus grand facteur commun à tous les termes du polynôme est $-2b^3$ ou $2b^3$.

2° $$\frac{-\overset{1}{\cancel{2}}ab^3}{-\underset{1}{\cancel{2}}b^3} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}b^3c}{-\underset{1}{\cancel{2}}b^3} - \frac{\overset{6}{\cancel{12}}b^3d}{-\underset{1}{\cancel{2}}b^3} = a + 2c + 6d$$

ou

$$-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}ab^3}{\underset{1}{\cancel{2}}b^3} - \frac{\overset{2}{\cancel{4}}b^3c}{\underset{1}{\cancel{2}}b^3} - \frac{\overset{6}{\cancel{12}}b^3d}{\underset{1}{\cancel{2}}b^3} = -a - 2c - 6d$$

3° $-2b^3(a + 2c + 6d)$

ou

$2b^3(-a - 2c - 6d)$

4° $-2b^3(a + 2c + 6d) = -2ab^3 - 4b^3c - 12b^3d$

ou

$2b^3(-a - 2c - 6d) = -2ab^3 - 4b^3c - 12b^3d$

Le produit étant égal au polynôme d'origine, la simple mise en évidence est complétée et nous posons :

$$-2b^3(a + 2c + 6d) = -2ab^3 - 4b^3c - 12b^3d$$

ou

$$2b^3(-a - 2c - 6d) = -2ab^3 - 4b^3c - 12b^3d$$

N.B. – Si le premier terme du polynôme à factoriser est négatif, il est préférable de mettre en évidence un facteur commun affecté d'un signe négatif.

Pour devenir des experts en factorisation, rien ne vaut la pratique! Les exercices qui suivent vous permettront d'améliorer votre technique.

Exercice 1.2

En suivant les étapes décrites précédemment, factorisez par simple mise en évidence chacun des polynômes ci-dessous.

1. $a^3 - ax$

   1° ....

   2° ....

   3° ....

   4° ....

2. $5ab - 5a^3b^2$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

3. $a^2bc + ab^2c + abc^2$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

4. $18a^3 - 24a^3b + 12ab^2$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

5. $12x^3y^2 - 8x^2y^3 - 4xy$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

6. $8m^3n^3 - 12m^2n^2p^5 + 20m^5np^4$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

7. $11a^2x^3y - 22b^2x^2y^2 + 33c^2x^2yz$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

8. $12a^2x^3y^2 + 9ax^2y^3 - 15a^4x^4y^5$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

9. $-h^2k - k^2 - k^3$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

10. $-7r^2st + 14rs^2t^2u - 21r^2s^2t^2 - 7r^3s^2t$

1° ....

2° ....

3° ....

4° ....

Pour réussir une factorisation par simple mise en évidence, il suffit de savoir trouver le plus grand facteur commun d'un polynôme et de diviser deux monômes. Mais **gare aux signes lorsque vous mettez un facteur négatif en évidence!** La vérification du résultat obtenu prend ici toute son importance, car elle permet de vous assurer que le signe de chacun des termes obtenus après la multiplication correspond bien à ceux du polynôme d'origine.

Avant de passer aux exercices de consolidation, place à la détente!

Saviez-vous que...

… dans l'addition ci-dessous, si nous remplaçons les lettres A, B, C, D, E, F, G par les chiffres 1 à 7, nous pouvons obtenir la somme de 9 999 999?

Prenez garde. Chaque lettre correspond à un seul nombre, toujours le même.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & F & C & 8 & E & E & 0 \\
 & D & 5 & 9 & D & 4 & 9 & A \\
 & G & D & 6 & 1 & A & E & G \\
+ & B & A & 7 & C & G & C & 3 \\
\hline
 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9
\end{array}
$$

Solution

A = 4, B = 1, C = 6, D = 3, E = 7, F = 5 et G = 2.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & & \\
 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7 & 7 & 0 \\
 & 3 & 5 & 9 & 3 & 4 & 9 & 4 \\
 & 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 \\
+ & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 6 & 3 \\
\hline
 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9
\end{array}
$$

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

Factorisez par simple mise en évidence les polynômes ci-dessous.

1. $x^2y^3 - x^2y^2 + x^2y =$

2. $10x^3 - 25x^4y =$

3. $-16c + 64c^2d =$

4. $6a^2b^3 + 14a^4b^3c =$

5. $38x^3y^5 + 57x^4y^2 =$

6. $\frac{1}{2}m^2n + \frac{1}{4}mn^2 =$

7. $5ax^5 - 10a^2x^3 - 15a^3x^3 =$

8. $48a^3b^2c + 24a^3bc^3 - 16ab^3c^3 + 32ab^2c^4 =$

9. $3a^4b^2 - 3a^3b + 6a^2b - 9ab^3 + 9a^3b^2 - 12a^2b =$

10. $5{,}2m^3n^2 + 10{,}4m^3n^3 + 15{,}6m^2n^3 =$

11. $12mx^4y^3 - 18nx^3y - 21x^2y^4 + 6x^2yz =$

12. $-9b^2 - 81b =$

13. $-8x^3yz^3 - 12x^2y^3z^5 + 20x^5yz^4 =$

14. $15x^3y - 12x^4y^3z + 7xy^2 =$

15. $-8m^2n^3 - 4m^4n^2 - 16m^3n^2 =$

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. Complétez les phrases suivantes.

   Pour trouver le plus grand facteur commun aux termes d'un polynôme, nous devons rechercher le plus grand facteur commun aux .... de tous les .... du polynôme. Nous devons ensuite rechercher le plus grand facteur commun à la partie .... de tous les termes du polynôme. Pour ce faire, nous devons trouver la ou les .... communes à tous les termes du polynôme et affecter chacune d'elles de l'exposant le plus .... qu'elle possède dans le polynôme. Nous devons finalement réunir ces éléments ....

2. Définissez en des termes qui vous sont propres la factorisation d'un polynôme.

   ....

   ....

3. Énumérez les quatre étapes à suivre pour effectuer une simple mise en évidence.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

Des facteurs communs peu communs

Le plus grand facteur commun d'un polynôme peut parfois être un binôme. Par exemple, dans l'expression $3x(2a + b) - 5y(2a + b)$, le binôme $(2a + b)$ est le facteur commun aux deux termes de l'expression algébrique. Pour factoriser ce type d'expression, il suffit de suivre la démarche proposée dans ce sous-module. Ainsi, en divisant chaque terme de l'expression algébrique par le facteur commun, nous obtenons :

$$\frac{3x\cancel{(2a+b)}}{\cancel{(2a+b)}} - \frac{5y\cancel{(2a+b)}}{\cancel{(2a+b)}} = 3x - 5y$$

Il suffit de placer le nouveau polynôme entre parenthèses et d'inscrire le facteur commun devant ces parenthèses. Le résultat de la factorisation est donc :

$$(2a + b)(3x - 5y)$$

En suivant le même raisonnement, factorisez les expressions algébriques ci-dessous. Attention! Vous devrez parfois factoriser une seconde fois l'un des deux termes obtenus par factorisation.

1. $y(y - 1) + 2(y - 1) =$

2. $(a - 5)a - 3(a - 5) =$

3. $5x(a + b) + 15y(a + b) - 10z(a + b) =$

4. $6x^2(3a - b) - 15x(3a - b) =$

