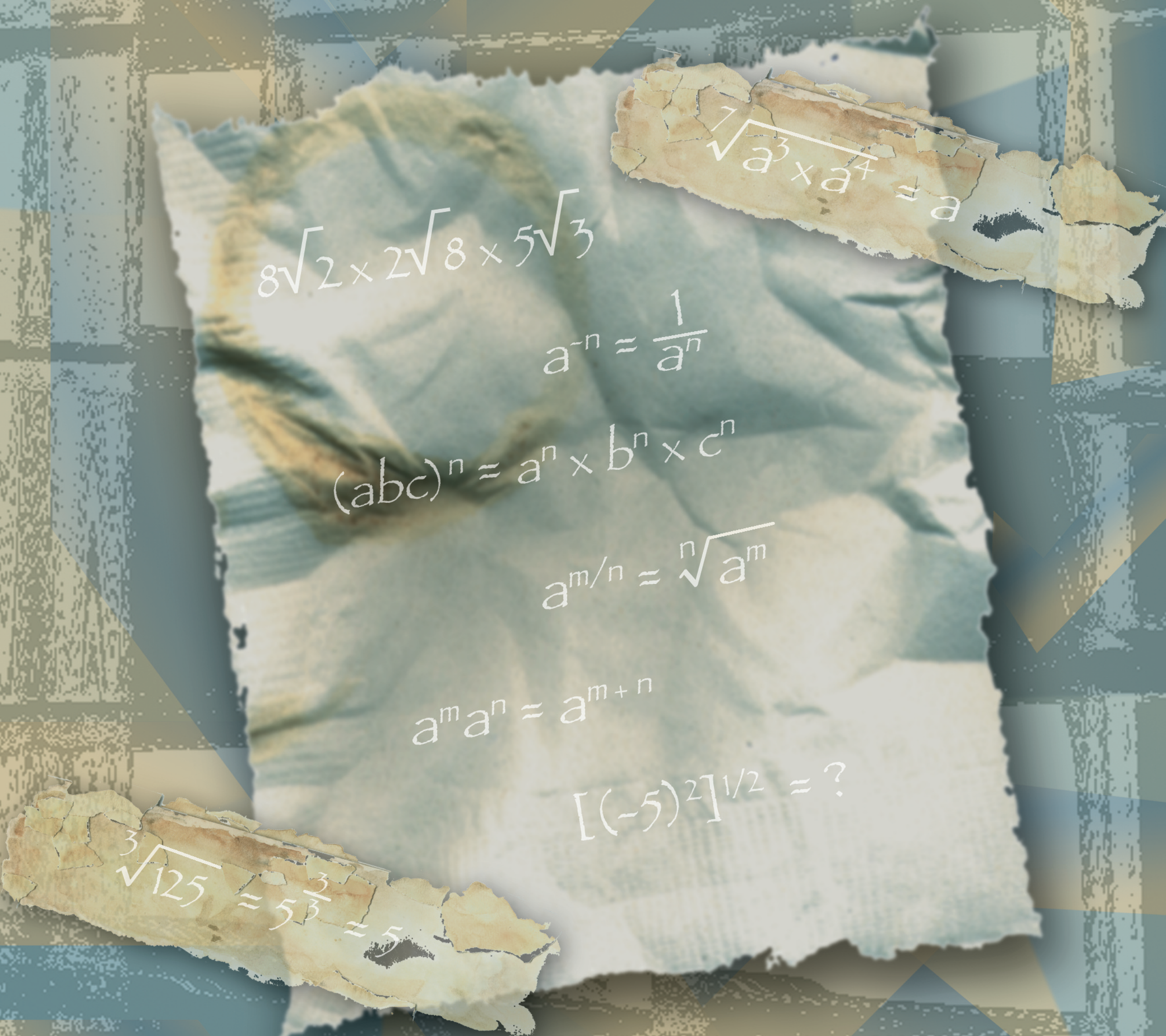
MAT-4105-1

EXPOSANTS ET RADICAUX



sofad

MAT-4105-1

EXPOSANTS

ET

RADICAUX

sofad

Responsable du projet : Jean-Paul Groleau

Rédactrice : Nicole Perreault

Mise à jour : Éric Lacroix

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Line Régis

Réviseur linguistique : Martial Denis

Photocomposition et montage : Productions P.P.I. inc.

Page couverture : Daniel Rémy

Impression : 2004

Dépôt légal — 2004
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque nationale du Canada
ISBN 978-2-89493-271-1

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

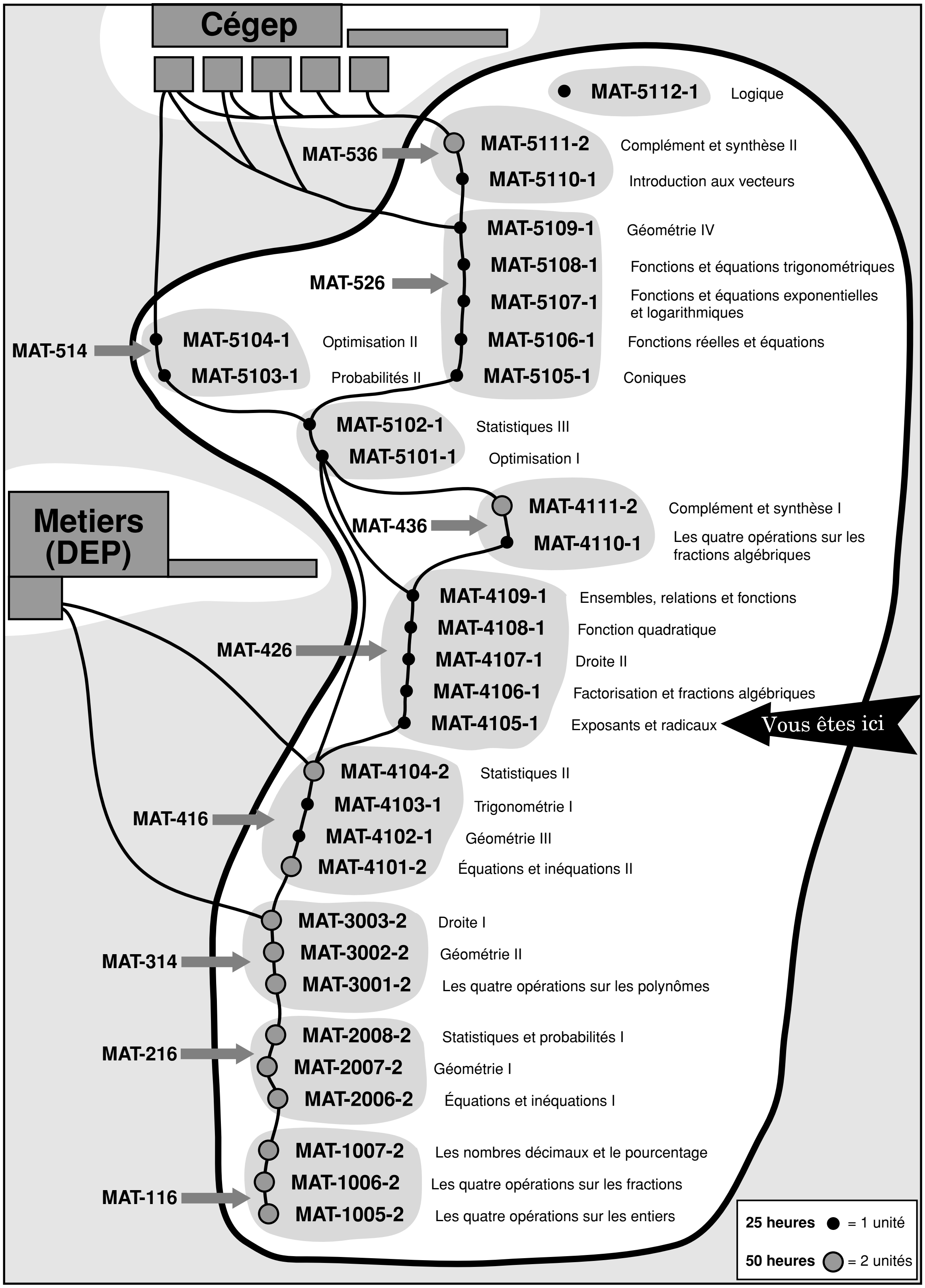
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

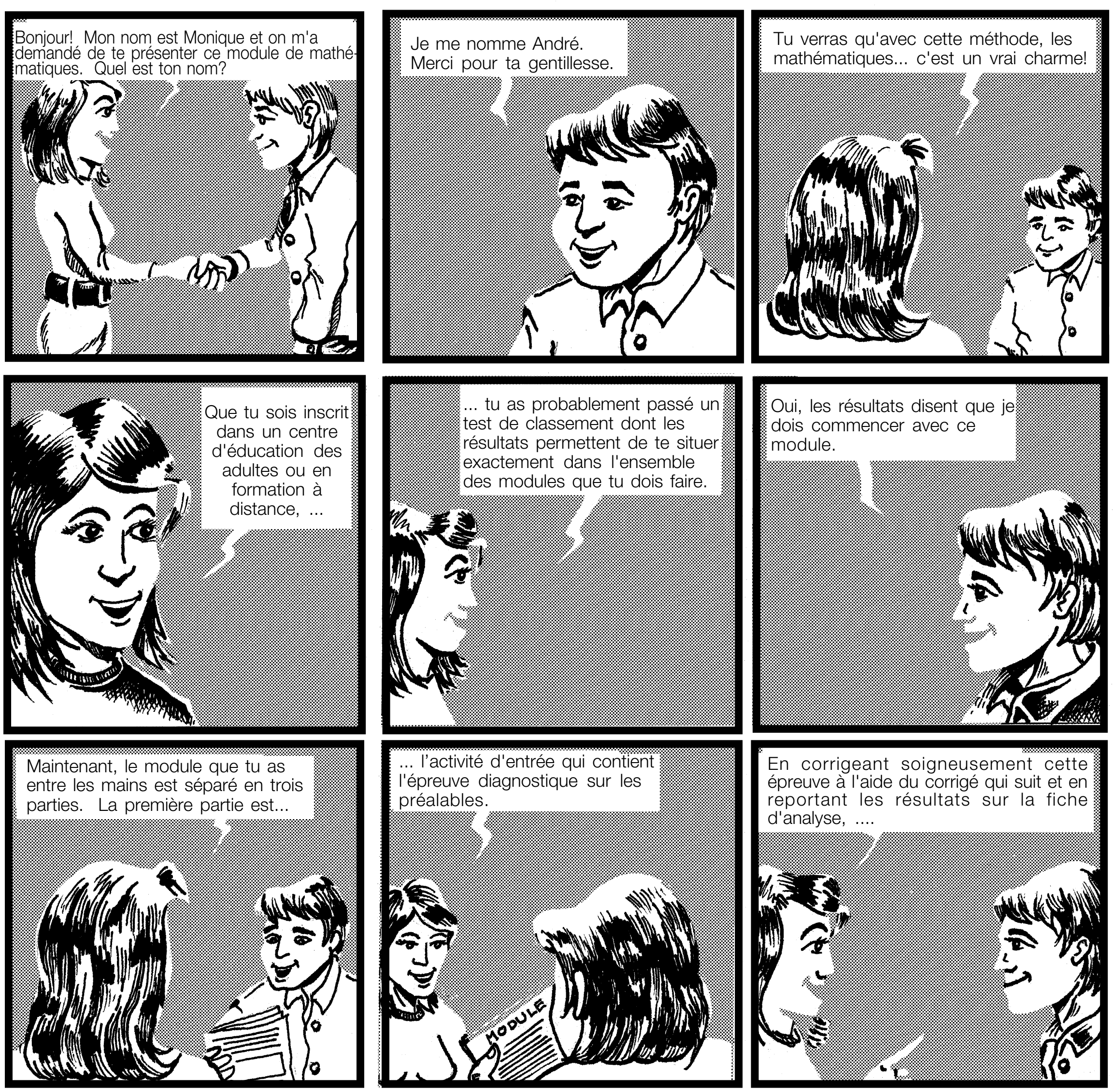
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au collège (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

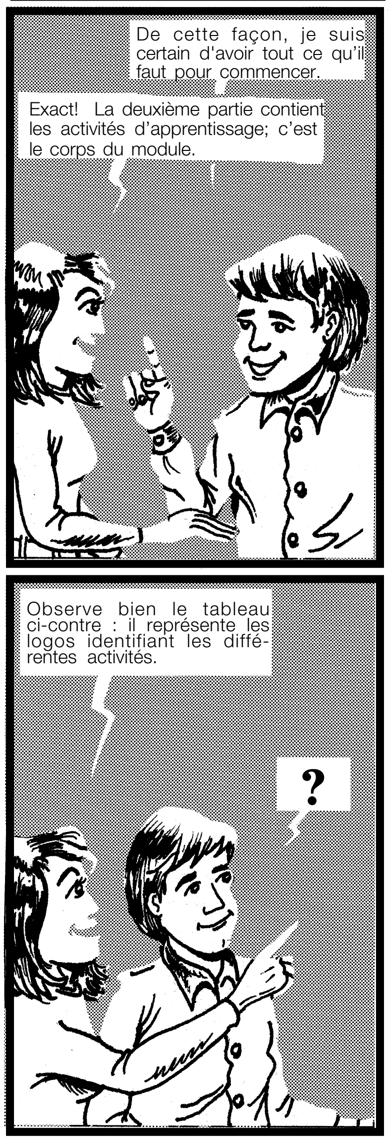
Si c'est votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la partie intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

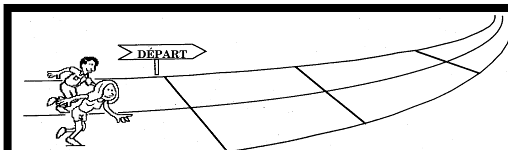
ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?







La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un « Saviez-vous que...? ».
« Saviez-vous que...? »
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles ». Le mot signifie:qui aime les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

LES EXPOSANTS ET LES RADICAUX : UN MONDE À DÉCOUVRIR

En sciences, l'utilisation de nombres présentés sous **forme exponentielle** ou sous un **radical** est chose courante. Le chimiste se sert de nombres exprimés en **notation scientifique** pour calculer la constante d'équilibre d'une équation quelconque ou pour déterminer le degré d'acidité d'une solution. La physicienne fait maintes fois usage de radicaux en physique mécanique ou en physique nucléaire, et la plupart des constantes qu'elle doit utiliser pour effectuer des calculs sont exprimées en notation scientifique.

Dans ce module, vous apprendrez les lois qui s'appliquent aux exposants ainsi que les règles à observer dans leur application. Ces lois vous permettront de simplifier des expressions algébriques ou numériques telles que $\dfrac{\left(a^2 \times a^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{-2}}$.

Vous apprendrez également les lois associées aux nombres se présentant sous radical. Ces lois vous seront fort utiles pour réduire à leur plus simple expression des **polynômes** tels que $\dfrac{5\sqrt{2}}{2 + \sqrt{3}}$.

Vous vous êtes déjà familiarisé avec les nombres rationnels (nombres naturels, nombres entiers, nombres décimaux périodiques et nombres fractionnaires). Dans ce module, vous ferez connaissance avec les **nombres irrationnels** qui, historiquement parlant, ont eu de la difficulté à s'implanter en mathématiques. Par le fait même, vous apprendrez à **rationaliser** le dénominateur d'une expression, autrement dit à le rendre rationnel.

Pour atteindre les objectifs terminaux de ce module, vous devrez donc résoudre des expressions algébriques ou numériques de forme exponentielle en leur appliquant les lois des exposants. Vous devrez aussi effectuer les quatre opérations mathématiques sur des polynômes renfermant des racines carrées, et ce, en respectant la règle de priorité des opérations.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4105-1 comporte cinq sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures, réparties tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	**Nombres d'heures***	**% (évaluation)**
1 et **2**	13	55 %
3	4	15 %
4 et **5**	7	30 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Lois des exposants

En appliquant l'une ou l'autre des lois sur les exposants, calculer la valeur numérique ou la valeur algébrique d'une expression mathématique simple renfermant des puissances de nombres ou de variables. Les lois à appliquer sont :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$a^o = 1$$
$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$
$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

où a, b, c sont des nombres rationnels ou des variables et m et n sont des nombres rationnels.

2. Simplification d'expressions algébriques ou numériques écrites sous forme exponentielle

Réduire à sa plus simple expression une expression algébrique ou une expression numérique écrite sous forme exponentielle en respectant la priorité des opérations et en appliquant les lois des exposants choisies parmi les suivantes :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(abc)^m = a^m b^m c^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

où a, b, c sont des nombres rationnels ou des variables et m et n sont des nombres rationnels.

3. Transformation sous forme exponentielle d'une expression renfermant un radical

Transformer une expression numérique ou algébrique contenant un radical en une expression de forme exponentielle exprimée dans sa base la plus simple.

L'expression donnée est de la forme $a^m \bullet \sqrt[n]{b^p}$ où a et b sont des variables ou des nombres rationnels positifs qui sont des puissances d'une même base; n et p sont des nombres naturels; m est un nombre rationnel.

4. Somme, différence, produit et quotient d'expressions comportant des radicaux de même indice.

   Calculer la somme, la différence, le produit ou le quotient d'une expression arithmétique renfermant au maximum quatre radicaux de même indice. Dans le cas du calcul d'un quotient, le dénominateur doit être rationalisé, s'il y a lieu.

5. **Opérations sur des polynômes renfermant des radicaux**

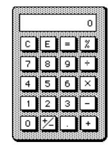
   Effectuer des opérations sur une expression numérique renfermant au maximum deux polynômes et trois racines carrées, puis réduire celle-ci à sa plus simple expression.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° L'utilisation de la calculatrice est permise.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

1. Effectuez les opérations suivantes.

   a) $\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}$ = ...

   b) $8{,}02 \times 4{,}1$ = ...

   c) $5{,}12 \div 0{,}2$ = ...

   d) $-\frac{7}{8} \div \left(-\frac{5}{2}\right)$ = ...

2. Trouvez **tous** les facteurs des nombres suivants.

   a) 16 : ....
   b) 21 : ....
   c) 32 : ....
   d) 144 : ....

3. Effectuez les opérations suivantes.

   a) $\frac{2}{3} + \frac{7}{8}$ = ...

   b) $-3{,}56 - 2{,}49$ = ...

4. Effectuez la soustraction des **polynômes** suivants. L'expression algébrique résultante doit être présentée sous sa f**orme la plus simple**. Les étapes de la résolution sont exigées.

   $2y - (8x - 7y - 3x)$

   ....

   ....

   ....

5. Effectuez les opérations demandées sur les **polynômes** suivants. L'expression algébrique résultante doit être présentée sous sa forme la plus simple. Les étapes de la résolution sont exigées.

   a) $2a(7a - 5)$

   ....

   ....

   ....

   ....

   b) $(5x + 4)(3x - 2)$

   ....

   ....

   ....

   ....

c) $(5x - 3)(5x + 3)$

....

....

....

....

....

d) $(3y - 4)^2$

....

....

....

....

....

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) $\frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

   b) $8{,}02 \times 4{,}1 = 32{,}882$

   c) $5{,}12 \div 0{,}2 = 25{,}6$

   d) $-\frac{7}{8} \div \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{7}{8} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$

2. a) 16 : 1, 2, 4, 8, 16
   b) 21 : 1, 3, 7, 21
   c) 32 : 1, 2, 4, 8, 16, 32
   d) 144 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

3. a) $\frac{2}{3} + \frac{7}{8} = \frac{16}{24} + \frac{21}{24} = \frac{37}{24}$ ou $1\frac{13}{24}$ b) $-3{,}56 - 2{,}49 = -6{,}05$

4. $2y - (8x - 7y - 3x)$
   $2y - (5x - 7y)$
   $2y - 5x + 7y$
   $9y - 5x$

5. a) $2a(7a - 5)$
   $(2a \times 7a) + (2a \times (-5))$
   $14a^2 - 10a$

   b) $(5x + 4)(3x - 2)$
   $5x(3x - 2) + 4(3x - 2)$
   $5x \times 3x + 5x \times (-2) + 4 \times 3x + 4 \times (-2)$
   $15x^2 - 10x + 12x - 8$
   $15x^2 + 2x - 8$

c) $(5x - 3)(5x + 3)$

$5x(5x + 3) - 3(5x + 3)$

$5x \times 5x + 5x \times 3 - 3 \times 5x - 3 \times 3$

$25x^2 + 15x - 15x - 9$

$25x^2 - 9$

d) $(3y - 4)^2$

$(3y - 4)(3y - 4)$

$3y(3y - 4) - 4(3y - 4)$

$3y \times 3y + 3y \times (-4) - 4 \times 3y + (-4)(-4)$

$9y^2 - 12y - 12y + 16$

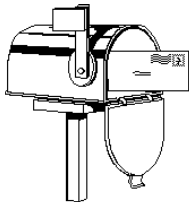
$9y^2 - 24y + 16$

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1. a)			7.1	7.4	Sous-module 1
b)			7.1	7.4	Sous-module 1
c)			7.1	7.4	Sous-module 1
d)			7.1	7.4	Sous-module 1
2. a)			7.2	7.13	Sous-module 4
b)			7.2	7.13	Sous-module 4
c)			7.2	7.13	Sous-module 4
d)			7.2	7.13	Sous-module 4
3. a)			7.3	7.18	Sous-module 4
b)			7.3	7.18	Sous-module 4
4.			7.4	7.28	Sous-module 4
5. a)			7.5	7.31	Sous-module 5
b)			7.5	7.31	Sous-module 5
c)			7.5	7.31	Sous-module 5
d)			7.5	7.31	Sous-module 5

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4105-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4105-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

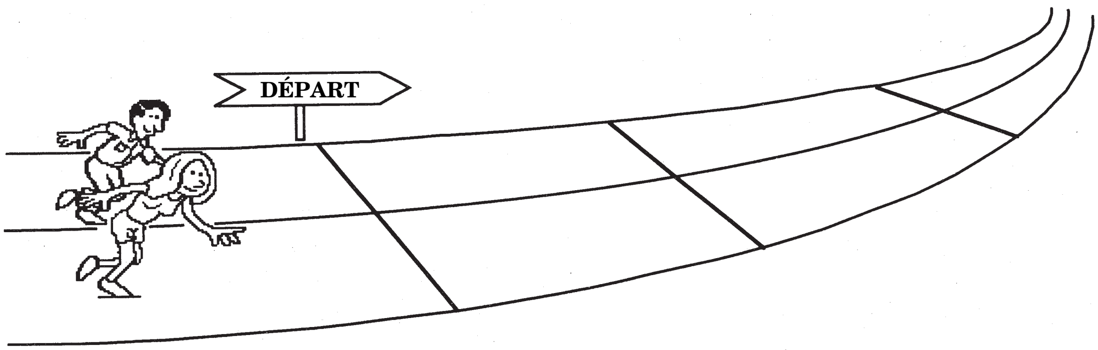
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter au besoin.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 et 2.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 3 à 5.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 5.

SANCTION

Lorsque vous aurez terminé tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

LOIS DES EXPOSANTS

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

Ces nombres qui défient l'imagination

Que vous lisiez un article de journal ou de revue scientifique, un ouvrage de chimie ou de physique, vous finirez par constater que l'auteur a utilisé des nombres « astronomiques » ou « infinitésimaux » pour décrire l'un ou l'autre fait.

Voici quelques exemples.

- En 2002, la dette du gouvernement fédéral s'élevait à 421 000 000 000 $ (421 milliards), ce qui équivaut à 14 000 $ par habitant, quel que soit son âge.

- La planète Terre se trouve à 150 000 000 km du Soleil tandis que l'étoile Alpha du Centaure en est distante de 40 400 000 000 000 000 000 km.

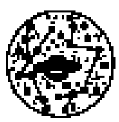
- Le corps humain contient environ 15 000 000 000 000 de corpuscules sanguins que nous nommons globules rouges; chacun de ces globules mesure 0,007 5 mm de diamètre.

- Chaque centimètre cube d'air que nous respirons (l'équivalent du contenu d'un dé à coudre) renferme 27 000 000 000 000 000 000 molécules.

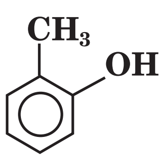
- Le rétrovirus (forme de virus) HTLV-III, agent transmetteur du SIDA, a un diamètre de 0,000 042 5 mm.

Nous avons heureusement créé une notation qui simplifie de beaucoup l'écriture de ces nombres. C'est ce que nous appelons la **notation scientifique**. Dans le tableau ci-dessous, nous retrouvons donc sous cette forme les nombres mentionnés précédemment.

421 000 000 000 \$ = $4{,}21 \times 10^{11}$ \$



150 000 000 km = $1{,}5 \times 10^{8}$ km



15 000 000 000 000 = $1{,}5 \times 10^{13}$

0,007 5 mm = $7{,}5 \times 10^{-3}$ mm

27 000 000 000 000 000 000 = $2{,}7 \times 10^{19}$

0,000 042 5 mm $4{,}25 \times 10^{-5}$ mm

Fig. 1.1 De l'infiniment grand à l'infiniment petit

Nous verrons plus loin comment exprimer un nombre en notation scientifique. Pour l'instant, attardons-nous aux ***exposants***, qui sont essentiels à ce type de notation.

Un exposant est une expression numérique ou algébrique qui indique combien de fois nous devons multiplier une quantité par elle-même. Ainsi, 2 est l'exposant dans l'expression $5^2 = 5 \times 5$.

Nous savons déjà que 2^2 (2 au ***carré***) = 4 parce que $2 \times 2 = 4$. Nous savons aussi que 2^3 (2 au ***cube***) = 8 parce que $2 \times 2 \times 2 = 8$. Dans l'expression $3^2 = 9$, 3 est la ***base*** et 2 est l'**exposant**.

Dans une expression algébrique ou dans une expression numérique, la base est le nombre ou la variable affectés d'un exposant.

Pour calculer la ***puissance*** d'un nombre, nous appliquons la définition des exposants.

☞

$$\underbrace{a^n = a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Remarque

La base peut être représentée par n'importe quel type de nombre : nombres naturels ($\mathbb{N}$), nombres entiers ($\mathbb{Z}$), nombres fractionnaires ou décimaux ($\mathbb{Q}$).

Exemple 1

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$$

$$(3{,}5)^2 = (3{,}5) \times (3{,}5) = 12{,}25$$

Pour atteindre l'objectif de ce sous-module, vous devrez être capable de résoudre diverses formes d'expressions exponentielles en leur appliquant les lois des exposants.

Quelle est la valeur numérique de $(-2)^2$? ....

Quelle est la valeur numérique de $(-2)^3$? ....

À la première question, votre résultat devrait être 4. En effet, $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$. Par contre, $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 4 \times (-2) = -8$.

rappel

Loi des signes en multiplication

(+)	×	(+)	=	+
(–)	×	(–)	=	+
(+)	×	(–)	=	–
(–)	×	(+)	=	–

Nous devons accorder une attention particulière aux parenthèses et aux signes contenus dans les expressions à résoudre.

Exemple 2

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. La base est 2 et l'exposant est 3.

$-2^3 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$. La base est 2 et l'exposant est 3.

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$. La base est -2 et l'exposant est 3.

Calculez : 3^4 = ...

-3^4 = ...

$(-3)^4$ = ...

Vous avez probablement obtenu respectivement 81, -81 et 81. En effet,

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$-3^4 = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

Nous constatons que le dernier résultat obtenu est positif même si la base est négative. En effet, toute base négative affectée d'un **exposant pair** donne un résultat positif. Par contre, toute base négative affectée d'un **exposant impair** donne un résultat négatif.

- Toute puissance d'une base positive est positive.
- Toute puissance d'une base négative est positive si l'exposant est pair.
- Toute puissance d'une base négative est négative si l'exposant est impair.

Maintenant vérifions si les notions « exposées » sont bien comprises!

Exercice 1.1

1. Calculez la valeur numérique des expressions suivantes.

a) $2^3 =$ ....   b) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ ....

c) $1^3 =$ ....   d) $(-1{,}4)^2 =$ ....

e) $(-5)^3 =$ ....

2. La valeur numérique des expressions suivantes est-elle positive ou négative?

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$: ....   b) $(-0{,}5)^2$: ....

c) $(-0{,}35)^3$: ....   d) $(-1{,}12)^4$: ....

e) $-1{,}12^4$: ....

Passons maintenant à l'étude des lois sur les exposants. Les deux premières ont déjà été abordées dans un module antérieur. Nous allons toutefois les revoir et les étudier de façon plus approfondie.

1re loi des exposants

Lorsque nous multiplions deux ou plusieurs puissances d'une même base, le produit obtenu est formé de cette même base affectée de la somme des exposants de chacune des puissances. Nous écrivons :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemple 3

Calculons $t^3 \times t^4$.

Nous savons que $t^3 = t \times t \times t$ et $t^4 = t \times t \times t \times t$.
Alors, $t^3 \times t^4 = t \times t \times t \times t \times t \times t \times t = t^7$.

En appliquant la 1re loi des exposants : $t^3 \times t^4 = t^{3+4} = t^7$.

Exemple 4

Calculons $2^2 \times 2^3 \times 2$.
$2^2 \times 2^3 \times 2 = 2^2 \times 2^3 \times 2^1 = 2^{2+3+1} = 2^6 = 64$

Exemple 5

Calculons $(-y)^5 \times (-y)^8$.
$(-y)^5 \times (-y)^8 = (-y)^{5+8} = (-y)^{13} = -y^{13}$

? Quel est le produit de $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}}$? ....

La 1re loi des exposants s'applique toujours, quelle que soit la nature des exposants. Ainsi, $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$.

Exemple 6

Calculons $-3y^4 \times 2y^3$.

Pour cela, nous devons d'abord multiplier les ***coefficients numériques*** des termes. Ensuite, nous appliquons la 1re loi des exposants.

$$-3y^4 \times 2y^3 = -6y^4y^3 = -6y^{4+3} = -6y^7$$

Exemple 7

Calculons $(-2)^3 \times 2^5$.

Comme les bases ne sont pas identiques, nous devons d'abord déterminer le signe de $(-2)^3$. Ensuite, nous pourrons appliquer la 1re loi des exposants.

$$(-2)^3 \times 2^5 = -2^3 \times 2^5 = -2^8 = -256$$

2e loi des exposants

Lorsque nous divisons deux puissances d'une même base, le quotient obtenu est formé de cette même base affectée de la différence des exposants de chacune des puissances. Nous écrivons :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$$

Example 8

Calculons $\frac{a^5}{a^3}$.

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = \frac{a \times a}{1} = a^2$$

En appliquant la 2^e^ loi des exposants : $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$.

Quel est le quotient de $\frac{x^3}{x^4}$? ....

Quel est le quotient de $\frac{2y^{-2}}{4y^3}$? ....

Calculez le quotient de $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}$. ....

Calculez le quotient de $\frac{6^2}{6^2}$. ....

Calculez le quotient de $\frac{3y^4}{6y^3}$. ....

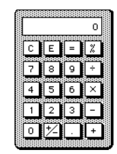
Vous avez probablement obtenu les résultats suivants :
$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{2}y^{-5}$, $a^{\frac{5}{12}}$, 1 et $\frac{1}{2}y$.

Pour effectuer ce dernier calcul, il faut d'abord simplifier les coefficients numériques. Nous obtenons : $\frac{3y^4}{6y^3} = \frac{1y^4}{2y^3}$. Nous appliquons ensuite la 2^e^ loi des exposants : $\frac{1y^4}{2y^3} = \frac{1y^{4-3}}{2} = \frac{1y}{2}$ ou $\frac{y}{2}$ ou $\frac{1}{2}y$.

Jusqu'à présent, les nombres utilisés étaient relativement simples à calculer. En mathématiques ou en sciences, ce n'est pas toujours le cas. Il faut souvent effectuer des opérations sur des nombres très petits ou très grands, ce qui a pour conséquence de compliquer le calcul « à la mitaine ». Heureusement, la calculatrice facilite grandement le travail. Les exemples qui suivent vous montreront comment l'utiliser pour calculer la valeur numérique d'expressions exponentielles.

Exemple 9

$3^7 \times 3^2 = 3^{7+2} = 3^9$

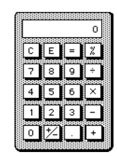


Pour connaître la valeur numérique de cette expression, nous appuyons sur les touches suivantes :

$\boxed{3}\ \boxed{y^x}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$ 19683

Donc : 3^9 = 19 683

Exemple 10



$(-2)^{14}$

$\boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{)}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ 16 384

Exemple 11

-2^{14}

Nous savons que la valeur numérique est négative. Nous appuyons alors sur les touches suivantes : $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ 16 384 et nous écrivons −16 384.

N.B. – Si nous tenons à obtenir la valeur de -2^{14} uniquement à l'aide de la calculatrice, la prudence est de mise, car il existe deux types de calculatrices.

- Modèle conventionnel : 2 +/– y^x 1 4 =.

- Modèle à logique algébrique directe (DAL) :
  +/– 2 y^x 1 4 =.

Jusqu'à présent, les bases utilisées étaient affectées d'exposants positifs. Cependant, les exposants peuvent également être négatifs. D'après vous, que vaut l'expression a^{-2} ? Cette question est l'objet de la 3e loi des exposants.

3e loi des exposants

Lorsque la base est affectée d'un exposant négatif, nous inversons la base et l'exposant devient positif.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ où } m \in \mathbb{Q}^+$$

Nous pouvons maintenant répondre à la question précédente.

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

En fait, cette loi découle de la 2e loi des exposants.

Par exemple, $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$.

Mais $\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a \times a} = \frac{1}{a^2}$

Donc, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

? Calculez la valeur de 3^{-2}. ....

Votre résultat devrait être $\frac{1}{9}$. En effet, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

? Calculez la valeur de $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$. ....

Votre résultat devrait être 81. En effet, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{4} = \left(\frac{3}{1}\right)^{4} = \left(\frac{3}{1}\right) \times \left(\frac{3}{1}\right) \times \left(\frac{3}{1}\right) \times \left(\frac{3}{1}\right) = \frac{81}{1} = 81$.

Exemple 12

Transformons $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$.

La base est $-\frac{1}{4}$. Son ***inverse*** est $-\frac{4}{1}$.

Alors $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{1}\right)^{3} = \left(-\frac{4}{1}\right) \times \left(-\frac{4}{1}\right) \times \left(-\frac{4}{1}\right) = -\frac{64}{1} = -64$.

Exemple 13

Transformons $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$.

La base est $\left(\frac{2}{5}\right)$. Son inverse est $\frac{5}{2}$.

Alors $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8}$.

Exemple 14

Transformons $5a^{-2}$.

La base est a. Son inverse est $\frac{1}{a}$.

Alors $5a^{-2} = 5 \times \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2}$.

N.B. – Ici, la base affectée de l'exposant négatif est a. Le nombre 5 est le coefficient numérique. Il demeure donc à la position du numérateur.

Saviez-vous reconnaître, parmi les énoncés suivants, ceux qui sont vrais ?

a) $3^{-1} = -3$: .... b) $(-2)^{-1} = 2$:................ c) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{7}$: ....

d) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = -\frac{16}{25}$:...... e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = -\frac{125}{8}$:...... f) $(-1)^{-1} = 1$: ....

Si vous avez trouvé que seul l'énoncé e) est vrai, chapeau ! En effet,

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ b) $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$ c) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}$

d) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{5}\right)^{2} = \frac{16}{25}$ e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{3} = -\frac{125}{8}$ f) $(-1)^{-1} = -1$

Les deux premières lois des exposants demeurent valides lorsqu'elles contiennent des expressions dont les exposants sont négatifs.

Exemple 15

Calculons $\frac{y^{-3}}{y^{-7}}$.

Par la 2e loi, $\frac{y^{-3}}{y^{-7}} = y^{-3-(-7)} = y^{-3+7} = y^{4}$.

Exemple 16

Calculons $a \times a^{-3}$.

Par la 1re loi, $a \times a^{-3} = a^{1} \times a^{-3} = a^{1+(-3)} = a^{-2} = \frac{1}{a^{2}}$.

Nous venons de règler le cas des exposants négatifs. Mais qu'en est-il de l'exposant 0 ? D'après vous, que vaut 5^0 ? Cette question fait l'objet de la 4e loi des exposants.

4e loi des exposants

Toute expression différente de 0, affectée de l'exposant 0, donne 1.

$$a^0 = 1 \text{ où } a \neq 0$$

Nous pouvons maintenant répondre à la question précédente.
$5^0 = 1$

En fait, cette loi découle de la 2e loi des exposants.

Par exemple, $\dfrac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$.

Mais $\dfrac{5^3}{5^3} = \dfrac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} = \dfrac{125}{125} = 1$, donc $5^0 = 1$.

Il est temps de passer à l'action. Les exercices qui suivent vous permettront de vous familiariser avec les quatre premières lois des exposants.

Exercice 1.2

1. Exprimez sous forme exponentielle le produit des puissances ci-dessous et calculez la valeur numérique de l'expression obtenue s'il y a lieu. Les réponses ne doivent pas comporter d'exposants négatifs.

   a) $5^3 \times 5^2 =$ ....

   b) $3^2 \times 3^{-1} =$ ....

   c) $\left(\dfrac{7}{4}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{4}\right)^{-5} =$ ....

d) $x^4 \times x^{\frac{1}{2}} =$ ....

e) $2y^{-2} \times 3y^3 =$ ....

f) $(-4)^{\frac{1}{3}} \times (-4)^{\frac{5}{3}} =$ ....

g) $(-2{,}5)^3 \times 2{,}5 =$ ....

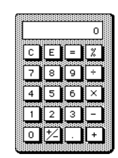
h) $(-3{,}25) \times (-3{,}25)^2 =$ ....

i) $-0{,}2x^3 \times 0{,}5x^2 =$ ....

j) $5x^3 \times x^{-7} \times 2x =$ ....

k) $\frac{1}{3}x^2 \times \left(-\frac{1}{2}x^3\right) \times 2x^{-4} =$ ....

2. Exprimez sous forme exponentielle le quotient des puissances ci-dessous.



a) $\dfrac{3^3}{3^2} =$ ....

b) $\dfrac{(-x)^4}{(-x)^2} =$ ....

c) $\dfrac{4a^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} =$ ....

d) $-5t^8 \div t^6 =$ ....

e) $10y^{\frac{4}{5}} \div 5y^{\frac{4}{5}} =$ ....

f) $\dfrac{3{,}5a^3}{0{,}7a^{-3}} =$ ....

g) $1{,}5x^2 \div (-0{,}3x) =$ ....

h) $\dfrac{-3a^3}{6a^3} =$ ....

i) $-33y^8 \div 11y^9 =$ ....

j) $\dfrac{2}{3}a^6 \div \left(-\dfrac{1}{2}a^4\right) =$ ....

Saviez-vous que…

… le nombre 10 est la base du système de numération « décimal »? Cela signifie qu'à l'aide de 10 chiffres, nous pouvons écrire tous les nombres possibles. Pourquoi avoir choisi cette base plutôt qu'une autre? Il semble que ce soit pour des raisons de commodité. En effet, presque tous les historiens s'accordent à dire que ce système a été adopté parce que l'être humain possède 10 doigts.

Les Celtes, quant à eux, utilisaient un système de numération à base 20, fort probablement parce qu'ils comptaient au moyen des doigts et des orteils. Nous en retrouvons encore des traces dans le système monétaire anglais traditionnel où 1 livre vaut 20 shillings.

La base 5 a aussi été largement utilisée. D'ailleurs, dans beaucoup de langues, les mots « cinq » et « main » sont semblables ou ont une racine commune. Par exemple, « pentcha » signifie « main » en persan et « pantche » signifie « cinq » en sanscrit.

Toutefois, les bases 5, 10 et 20 ne se sont pas nécessairement généralisées dans le monde. Certaines tribus d'Afrique, d'Amérique du Sud et d'Australie ont utilisé le système à base 2 (binaire) tandis que d'autres choisissaient le système à base 3 (ternaire) parce que leurs calculs se fondaient sur les 3 phalanges des doigts de la main opposés au pouce.

La base 4, plus rarement utilisée, l'est encore toutefois par les indiens Yuki de Californie qui comptent en se servant de l'espace entre les doigts d'une main.

Le système de numération le plus compliqué fut sans conteste celui de la civilisation mésopotamienne. On lui donne le nom de système sexagésimal parce qu'il est à base 60. Pour représenter les nombres de 0 à 59, il requiert 60 signes différents. Malgré sa complexité, ce système est encore utilisé pour mesurer le radian d'un angle en degrés ou l'écoulement du temps. En effet, il y a **60** minutes dans une heure et **60** secondes dans une minute. Il est évident que si votre montre indique 5:07:09, c'est qu'il est 5 h 7 min 9 s. Ce qui l'est moins, c'est que, dans la notation mésopotamienne, 5, 7, 9 signifient :

$$5 \times 60^2 + 7 \times 60^1 + 9 \times 60^0$$

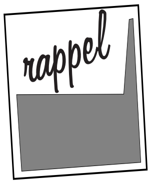
soit 18 429 dans notre système décimal. Or, s'il est 5 h 7 min 9 s, cela équivaut justement à une période de temps de 18 429 secondes comptées à partir de minuit.

Notation scientifique

Avant de poursuivre avec les trois dernières lois des exposants, voyons comment nous pouvons transformer un nombre écrit en notation décimale en un nombre écrit en notation scientifique et vice versa.

rappel

- *Quand nous multiplions un nombre décimal par une puissance de 10 (i.e. 10, 100, 1 000, 10 000, etc.), la* ***virgule de cadrage*** *du nombre se déplace vers la droite d'autant de positions qu'il y a de zéros dans la puissance de 10.*
  Ainsi, $-3,29 \times 10 = -32,9$
  $41,7 \times 100 = 4\,170$

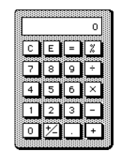


- *Quand nous divisons un nombre décimal par une puissance de 10, la virgule de cadrage du nombre se déplace vers la gauche d'autant de positions qu'il y a de zéros dans la puissance de 10.*

  Ainsi, 5,187 ÷ 1 000 = 0,005 187
  8 ÷ 100 = 0,08

  N.B. – Il faut ajouter des zéros dans les espaces libres.

Effectuons à la calculatrice 6^{16}.



$\boxed{6}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\boxed{6}\ \boxed{=}$ 2.821109907 12

N.B. – Certaines calculatrices qui ne peuvent afficher plus de 8 chiffres donnent un résultat de 2,8211099 12.

Vous avez-peut-être deviné ce que signifient ces résultats? C'est la réponse écrite en notation scientifique. 2.821109907 12 signifie $2{,}821\,109\,907 \times 10^{12}$. Cette notation permet à la calculatrice de donner une approximation du résultat exact, lequel n'aurait pu autrement être affiché à l'écran. Le résultat exact est : 2 821 109 907 456.

N.B. – Pour écrire $2{,}821109907 \times 10^{12}$ directement à l'écran de la calculatrice nous écrivons le nombre 2,821109907 et nous appuyons sur $\boxed{\text{EXP}}\boxed{1}\boxed{2}$.

> En **notation scientifique**, un nombre est toujours exprimé sous la forme $a \times 10^n$, où n est un nombre entier et a un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$.

Voyons d'abord comment transformer un nombre écrit en notation scientifique en un nombre écrit en notation décimale.

Exemple 17

Exprimons $7{,}547\ 8 \times 10^2$ en notation décimale.

Il suffit de déplacer la virgule de cadrage vers la **droite** de deux positions parce que l'exposant de la base 10 est 2.

$$7{,}547\ 8 \times 10^2 = 754{,}78$$

En effet, $7{,}547\ 8 \times 10^2 = 7{,}5478 \times 100 = 754{,}78$.

Et si l'exposant de la base 10 est négatif?

Exemple 18

Exprimons $5{,}789 \times 10^{-4}$ en notation décimale.

Il suffit de déplacer la virgule de cadrage vers la gauche de quatre positions parce que l'exposant de la base 10 est -4.

$$0\ 0005{,}789 \times 10^{-4} = 0{,}000\ 578\ 9$$

En effet, $5{,}789 \times 10^{-4} = 5{,}789 \times \frac{1}{10^4} = 5{,}789 \times \frac{1}{10\ 000} = 5{,}789 \div 10\ 000 = 0{,}000\ 578\ 9$.

Soit a un nombre décimal supérieur ou égal à 1 et tel que $1 \leq a < 10$ et n un nombre naturel.
Le nombre $a \times 10^n$ se transforme en notation décimale en déplaçant la virgule de cadrage de a de n positions vers la droite.
Le nombre $a \times 10^{-n}$ se transforme en notation décimale en déplaçant la virgule de cadrage de a de n positions vers la gauche.

? La dette du Canada en 2002 peut s'écrire $4{,}21 \times 10^{11}$ \$. Sauriez-vous l'exprimer en notation décimale?

....

Vous avez répondu 421 000 000 000 \$? Bravo!

Il faut, en effet, déplacer la virgule de cadrage de onze positions vers la droite en y ajoutant autant de zéros que nécessaire. Trouvez-vous plus encourageant d'avoir une dette de $4{,}21 \times 10^{11}$ \$ ou une dette de 421 000 000 000 \$?

? Le rétrovirus HTLV-III a un diamètre de $4{,}25 \times 10^{-5}$ mm. Sauriez-vous l'écrire en notation décimale?

....

Vous avez répondu 0,000 042 5 mm ? Bravo!

Il faut, en effet, déplacer la virgule de cadrage de cinq positions vers la gauche en y ajoutant autant de zéros que nécessaire.

Faisons maintenant l'inverse. Transformons en notation scientifique un nombre écrit en notation décimale.

Exemple 19

Exprimons 7 547,8 en notation scientifique.

1° Déplaçons la virgule de cadrage immédiatement à droite du premier chiffre non nul.

7 547,8

2° Comptons de combien de positions nous avons déplacé la virgule de cadrage : 3 positions à gauche.

7,547 8

3° Inscrivons 3 comme exposant de la base 10 afin de compenser le déplacement de la virgule de cadrage.

$7{,}547\,8 \times 10^3$

Et voilà!

7 547,8 égale bien $7{,}547\,8 \times 10^3$ puisque $7\,547{,}8 \times 1\,000 = 7{,}547\,8 \times 10^3$.

Exemple 20

Exprimons 0,000 647 en notation scientifique.

1° Déplaçons la virgule de cadrage à droite du premier chiffre non nul.

0,000 6 47

2° Comptons de combien de positions nous avons déplacé la virgule de cadrage : 4 positions à droite.

0 000 6,47

3° Inscrivons −4 comme exposant de la base 10 afin de compenser le déplacement de la virgule de cadrage.

$6{,}47 \times 10^{-4}$

Et voilà!

0,000 647 égale bien $6,47 \times 10^{-4}$ puisque $0,000\,647 = \frac{6,47}{10\,000} = 6,47 \times \frac{1}{10\,000} = 6,47 \times \frac{1}{10^4} = 6,47 \times 10^{-4}$.

? Sauriez-vous transformer en notation scientifique la dette du Canada en 2002 : 421 000 000 000 $?

....

Vous avez répondu $4,21 \times 10^{11}$? Bravo!

Il suffit de déplacer la virgule de cadrage de onze positions vers la gauche (4,21 000 000 000), puis d'inscrire 11 à l'exposant de la base 10 : $4,21 \times 10^{11}$.

Il s'agit bien de la dette du Canada puisque : 421 000 000 000 $ = $4,21 \times 100\,000\,000\,000$ $ = $4,21 \times 10^{11}$ $.

? Sauriez-vous transformer en notation scientifique le diamètre du rétrovirus HTLV-III : 0,000 042 5 mm ?

....

Vous avez répondu $4,25 \times 10^{-5}$? Bravo!

Il suffit de déplacer la virgule de cadrage de cinq positions vers la droite (0000 04,25), puis d'inscrire –5 à l'exposant de la base 10 : $4,25 \times 10^{-5}$.

Il s'agit bien du diamètre du rétrovirus HTLV-III puisque 0,000 042 5 mm = $\frac{4,25}{100\,000}$ mm = $4,25 \times \frac{1}{100\,000}$ mm = $4,25 \times \frac{1}{10^5}$ mm = $4,25 \times 10^{-5}$ mm.

? Sauriez-vous expliquer maintenant pourquoi votre calculatrice affiche 2.821109907 12 quand vous lui demandez de calculer 6^{16} ?

....

En effet, 2,821109907 12 signifie $2{,}821109907 \times 10^{12}$. Quand nous transformons ce résultat en notation décimale, nous obtenons 2 821 109 907 000, car la décimale de cadrage a été déplacée de 12 positions vers la droite. Ce résultat est bien une approximation du résultat exact : 2 821 109 907 456.

N.B. – Ce nombre entier possède 13 chiffres puisque nous avons déplacé la virgule de cadrage de 12 positions vers la droite.

Pour exprimer un nombre en notation scientifique, nous devons :

1° déplacer la virgule de cadrage à droite du premier chiffre non nul;

2° compter de combien de positions nous avons déplacé la virgule de cadrage;

3° inscrire ce nombre comme exposant de la base 10 :
   a) cet exposant est positif si la virgule de cadrage a été déplacée vers la gauche;
   b) cet exposant est négatif si la virgule de cadrage a été déplacée vers la droite.

Exercice 1.3

1. Convertissez les nombres suivants en notation scientifique.

   a) 142 857 = ... b) 1 230 000 000 = ...

   c) 0,054 = ... d) 0,007 21 = ...

2. Convertissez les nombres suivants en notation décimale.

a) $5{,}1 \times 10^{5} =$ .... b) $7{,}654\,3 \times 10^{3} =$ ....

c) $8{,}193 \times 10^{-4} =$ .... d) $4 \times 10^{-7} =$ ....

3. Quel nombre est le plus grand : 0,000 007 2 ou $7{,}1 \times 10^{-5}$?

....

....

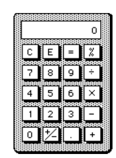
4. La vitesse du son dans l'air sec à température et pression normale est d'environ 331,4 m/s. Convertissez ce nombre en notation scientifique.

....

5. La vitesse de la lumière dans le vide est d'environ $2{,}997\,924\,6 \times 10^{8}$ m/s. Convertissez ce nombre en notation décimale.

....

6. Exprimez 5^{32} en notation scientifique en conservant trois chiffres après la virgule.



....

7. Combien de chiffres comporte le nombre 2^{131} ?

....

....

Voyons maintenant les trois dernières lois des exposants.

Vous êtes désormais prêt à aborder un niveau supérieur de difficulté. La résolution de problèmes en mathématiques ou en sciences nécessite parfois la maîtrise d'une autre loi des exposants. En effet, comment résoudre une expression de la forme $(x^2)^3$?

Nous savons que $x^2 = x \times x$.

Si cette expression est elle-même élevée au cube (la troisième puissance), alors nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & \times & x^2 & \times & x^2 \\ (x \times x) & \times & (x \times x) & \times & (x \times x) \end{array}$$

ce qui équivaut à x^6. Donc $(x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6$

Nous venons de découvrir la 5e loi des exposants.

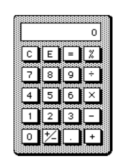
5e loi des exposants

Pour élever une puissance m d'une base a à une puissance n, il suffit de multiplier les exposants entre eux. Nous écrivons :

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemple 21

$(2^4)^3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12}$



Pour connaître la valeur numérique de cette expression, appuyons sur les touches suivantes de la calculatrice :

$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$ 4096

Donc : $(2^4)^3 = 2^{12} = 4\ 096$

Exemple 22

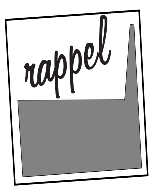
$-3(a^2)^6 = -3a^{2\times 6} = -3a^{12}$

☞ Ici, le signe négatif affecte uniquement le coefficient numérique de la base a. Nous devons donc conserver le signe négatif tout au long des opérations.

Exemple 23

$((-3)^2)^{-2} = (3^2)^{-2} = (3)^{2\times(-2)} = (3)^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

☞ Ici, la base -3 est négative. La puissance d'une base négative étant positive quand l'exposant est pair, le résultat est donc positif.



- *La puissance d'une base positive est positive.*
- *La puissance d'une base négative est positive si l'exposant est pair.*
- *La puissance d'une base négative est négative si l'exposant est impair.*

Exemple 24

$-(3^2)^2 = -(3^{2\times 2}) = -(3^4) = -81$

☞ Ici la base est positive. Méfiez-vous : $-(3^2)^2 \neq [(-3)^2]^2$. Dans la première expression, la base est positive, dans la seconde, elle est négative.

Pour affecter un exposant sur plusieurs variables ou nombres, nous devons placer ceux-ci entre parenthèses. Sinon, l'exposant ne porte que sur la variable ou le nombre le plus proche.

Que vaut l'expression $(xyz)^2$? ....

Résolvez l'expression $(a^2y^3)^2$ . ...

Ces problèmes sont un peu plus complexes. Toutefois, rassurez-vous, les résoudre est un jeu d'enfant ou presque.

Pour connaître la valeur de la première expression, nous posons :

$(xyz)^2 = (x \times y \times z) \times (x \times y \times z) = x^2\,y^2\,z^2$

Quant au deuxième problème, nous l'écrivons :
$(a^2y^3)^2 = (a \times a \times y \times y \times y) \times (a \times a \times y \times y \times y) = a^4y^6$

Vous vous en doutez probablement, c'est une autre loi des exposants qui nous permet de résoudre ce type de problème.

6e loi des exposants

Pour élever à une puissance m un produit déjà sous forme exponentielle, il suffit de multiplier les exposants de chacun des ***facteurs*** par l'exposant m. Nous écrivons :

$$(abc)^m = a^m\,b^m\,c^m$$

où a, b et c représentent des expressions exponentielles.

Exemple 25

$\left(3a^2b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \times (a^2)^2 \times \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ • 6e loi

$\left(3a^2b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \times a^{2\times 2} \times b^{\frac{1}{2}\times 2}$ • 5e loi

$\left(3a^2b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 9 \times a^4 \times b$

$\left(3a^2b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 9a^4b$

Exemple 26

$(x^2y^{-2})^3 = (x^2)^3 \times (y^{-2})^3$ • 6e loi

$(x^2y^{-2})^3 = x^{2 \times 3} \times y^{-2 \times 3}$ • 5e loi

$(x^2y^{-2})^3 = x^6 \times y^{-6}$

$(x^2y^{-2})^3 = \dfrac{x^6}{y^6}$ • 3e loi

N.B. – À l'avenir, nous appliquerons les 5e et 6e lois d'un seul coup. Nous passerons donc directement de $(x^2y^{-2})^3$ à $x^{2 \times 3} \times y^{-2 \times 3}$.

Exemple 27

$(-x^2\, y)^3 = (-1)^3 \times x^{2 \times 3} \times y^{1 \times 3} = -x^6\, y^3$

Exemple 28

$(-a^3\, b^2)^2 = (-1)^2 \times a^{3 \times 2} \times b^{2 \times 2} = a^6\, b^4$

☞ **Attention, attention!**

Ne jamais oublier qu'une expression du type $(2abc)^2$ signifie $(2 \times a \times b \times c)^2$. En appliquant la 6e loi des exposants, nous obtenons $(2^2 \times a^2 \times b^2 \times c^2)$. L'expression $2(abc)^2$ vaut quant à elle $2 \times a^2 \times b^2 \times c^2$. Gare aux parenthèses!

Exemple 29

$$(2x^3\,3y^{-2}\,4z^2)^{-2} = 2^{-2} \times x^{3\times(-2)} \times 3^{-2} \times y^{-2\times(-2)} \times 4^{-2} \times z^{2\times(-2)}$$

$$(2x^3\,3y^{-2}\,4z^2)^{-2} = \frac{1}{2^2} \times x^{-6} \times \frac{1}{3^2} \times y^4 \times \frac{1}{4^2} \times z^{-4}$$

$$(2x^3\,3y^{-2}\,4z^2)^{-2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x^6} \times \frac{1}{9} \times y^4 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{z^4}$$

$$(2x^3\,3y^{-2}\,4z^2)^{-2} = \frac{y^4}{576x^6z^4}$$

Vous allez maintenant affronter une petite subtilité. En sciences ou en mathématiques, nous devons souvent simplifier des expressions numériques ou algébriques. Ainsi $(2^2 \times 8)^2 = 2^{2\times2} \times 8^2$. Jusqu'ici, aucun problème! Cependant, 8^2 peut également s'écrire $(2^3)^2$ parce que $8 = 2 \times 2 \times 2$. Le but sous-jacent à ce genre de transformation est d'obtenir **une seule base**. Cela facilite singulièrement les calculs. Donc : $2^{2\times2} \times 8^2 = 2^4 \times (2^3)^2 = 2^4 \times 2^6 = 2^{10}$.

Convertissez chacune des expressions suivantes sur une même base.

? $(3 \times 27^2)^3$ ....

? $(16 \times 8^2)^2$ ....

La première expression peut se transformer en $[3 \times (3^3)^2]^3$ parce que $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

$[3 \times (3^3)^2]^3 = (3 \times 3^6)^3 = 3^3 \times 3^{18} = 3^{21}$ ou $(3 \times 3^6)^3 = (3^7)^3 = 3^{21}$.

Pour simplifier la seconde expression, vous devez la transformer en utilisant la base 2. $(16 \times 8^2)^2 = [2^4 \times (2^3)^2]^2 = (2^4 \times 2^6)^2 = 2^8 \times 2^{12} = 2^{20}$ ou $(2^4 \times 2^6)^2 = (2^{10})^2 = 2^{20}$.

Comme vous pouvez le constater, c'est assez simple. Il suffit de porter une attention particulière aux parenthèses et aux signes qui affectent les bases, les cœfficients numériques ainsi que les exposants, et le tour est joué! Voyons si les notions présentées jusqu'à maintenant sont bien comprises.

Exercice 1.4

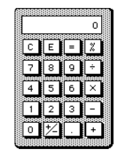
1. Simplifiez les expressions suivantes.

a) $(x^2)^3 =$ .... b) $(y^{-3})^{-2} =$ ....

c) $3(a^6)^2 =$ .... d) $-(x^3)^{\frac{1}{3}} =$ ....

e) $(-y^2)^2 =$ ....

2. En appliquant la loi des exposants appropriée, calculez la valeur numérique des expressions ci-dessous.



a) $(-2^3)^{-1} =$ .... b) $(-4^2)^3 =$ ....

c) $(3^{-4})^{-1} =$ .... d) $\left(4^{\frac{1}{4}}\right)^4 =$ ....

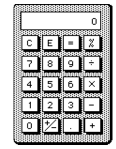
e) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} =$ ....

3. Les produits suivants sont sous forme exponentielle. Élevez-les à la puissance requise.

a) $(x^2y^3)^2 =$ .... b) $-2(a^8b^4)^{\frac{1}{2}} =$ ....

c) $\left(m^3n^6p^3\right)^{\frac{1}{3}} =$ .... d) $(a^{-1}b)^{-3} =$ ....

e) $(x^{-1}yz^2)^{-2} =$ ....



4. En appliquant la loi des exposants appropriée, calculez la valeur numérique des expressions suivantes.

   a) $(4^2 \times 3^3)^2 =$ ....

   b) $\left[(-1{,}5)^2 \times (-2{,}2)^4\right]^{\frac{1}{2}} =$ ....

   c) $(-3^4 \times 5^2)^2 =$ ....

   d) $\left(35^{-1} \times 7^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} =$ ....

5. Simplifiez et exprimez sous forme exponentielle les expressions ci-dessous.

   a) $(2^2 \times 4)^3 =$ ....

   b) $(3^3 \times 9^2)^{-1} =$ ....

   c) $(4 \times 16^2 \times 3^3)^2 =$ ....

   d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8}\right]^3 =$ ....

   e) $\left(8^{\frac{1}{2}} \times 16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$ ....

Il existe un dernier cas qui se rapporte aux exposants à étudier. Selon vous, quel est le quotient de $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3$? Pour répondre à cette question, vous devez connaître la septième et dernière loi des exposants.

7e loi des exposants

Pour élever à une puissance m un quotient de deux expressions exponentielles, il suffit de multiplier les exposants de chacune des expressions par la puissance m. Nous écrivons :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ où } b \neq 0$$

Calculez le quotient de chacune des expressions suivantes.

? $\left(\frac{x}{y^2}\right)^3 =$ ....

? $\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^2 =$ ....

Pour obtenir le premier résultat, vous devez poser :

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^3 = \frac{x^3}{y^{2\times3}} = \frac{x^3}{y^6}$$

Pour calculer le deuxième quotient, vous devez procéder comme suit :

$$\left(\frac{3a^2}{4b^3}\right)^2 = \frac{3^2 \times a^{2\times2}}{4^2 \times b^{3\times2}} = \frac{9a^4}{16b^6}$$

Évidemment, nous pouvons compliquer les choses! Voici quelques exemples.

Exemple 30

$$\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-3} = \frac{x^{-2\times(-3)}}{y^{3\times(-3)}} = \frac{x^6}{y^{-9}} = \frac{x^6}{\frac{1}{y^9}} = x^6 \times \frac{y^9}{1} = x^6y^9$$

Exemple 31

$$\left[\frac{a^2}{(-b)^3}\right]^3 = \frac{a^{2\times 3}}{(-b)^{3\times 3}} = \frac{a^6}{(-b)^9} = \frac{a^6}{-b^9} = -\frac{a^6}{b^9} \quad \text{(puisque l'exposant est impair)}$$

Rien de tel que la pratique! Passons à quelques exercices relatifs à la dernière loi des exposants.

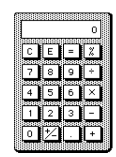
Exercice 1.5

1. Les quotients ci-dessous sont sous forme exponentielle. Élevez-les à la puissance requise.

a) $\left(\frac{m}{n}\right)^4 =$ .... b) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2 =$ ....

c) $\left(\frac{y^{-2}}{x^3}\right)^{-2} =$ .... d) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^3 =$ ....

e) $\left[\frac{x^4}{(-y)^3}\right]^3 =$ ....



2. En appliquant la loi des exposants appropriée, calculez la valeur numérique des expressions ci-dessous.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 =$ ....

b) $\left[\frac{(-6)^3}{(-4)^2}\right]^3 =$ ....

c) $\left(\frac{3^{-2}}{4^3}\right)^2 =$ ....

d) $-\left[\frac{(-2)^2}{(-5)^3}\right]^2 =$ ....

e) $\left(\frac{2{,}5^4}{0{,}5^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$ ....

Avant de continuer, voici le résumé des lois relatives aux exposants et les règlements nécessaires à leur application.

Lois des exposants

1° $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2° $\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = a^{m-n}$

3° $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$ où $\frac{1}{a^m}$

4° $a^0 = 1$ où $a \neq 0$

5° $(a^m)^n = a^{m \times n}$

6° $(abc)^m = a^m b^m c^m$

7° $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ où $b \neq 0$

Règlements nécessaires à leur application

1° La puissance d'une base positive est positive.

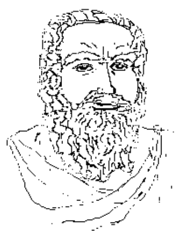
2° La puissance d'une base négative est positive si l'exposant est pair.

3° La puissance d'une base négative est négative si l'exposant est impair.

4° Lorsqu'une base est affectée d'un exposant négatif, il suffit de prendre l'inverse de la base et de changer le signe de l'exposant pour obtenir une expression équivalente dans laquelle l'exposant est positif.

5° Lorsqu'une expression précédée d'un signe négatif est affectée d'un exposant donné, chacun des termes doit être élevé à cet exposant, y compris le chiffre -1, qui figure nécessairement parmi les coefficients numériques de cette expression.

On ne le répétera jamais assez. Il faut toujours porter une attention particulière aux signes. Ils peuvent modifier radicalement le résultat d'une expérience de chimie ou d'un bilan financier! La loi des signes, quoique élémentaire en soi, s'applique et s'appliquera toujours quelle que soit la complexité des problèmes à résoudre. À propos de la loi des signes…



Saviez-vous que…

…vers l'an 500 de notre ère, un employé de banque d'origine indienne s'ingénia à distinguer par un signe les avoirs et par un autre les découverts des comptes de ses clients? Il venait d'inventer les nombres négatifs.

Toutes les règles sur la manipulation de ces nombres furent établies et codifiées par les mathématiciens Brahmagupta au VII^{e} siècle et Bhàskara au XII^{e} siècle. Les Indiens, amateurs de poésie et de mathématiques, traduisirent en dictons la loi des signes. Ces dictons sont encore en vogue de nos jours :

« Les amis de mes amis sont mes amis. »
« Les ennemis de mes amis sont mes ennemis. »
« Les amis de mes ennemis sont mes ennemis. »
« Les ennemis de mes ennemis sont mes amis. »

Substituez le signe + au mot amis, le signe – au mot ennemis et vous obtenez notre loi des signes actuelle pour la multiplication et la division.

Au début du présent sous-module, nous avons étudié le signe de la puissance d'un nombre. Nous allons maintenant pousser un peu plus loin l'analyse en décrivant la valeur de a^m selon le signe et la valeur de a ainsi que de son exposant m.

Exemple 32

Décrivons le signe et la valeur de a^m sachant que $-1 < a < 0$ et que m est un entier positif pair.

Donnons un exemple numérique pour illustrer cette situation, soit $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}$$

$\frac{16}{25}$ est de signe positif et se situe entre 0 et 1.

Nous pouvons donc déduire que a^m est de signe positif et $0 < a^m < 1$.

Exemple 33

Décrivons le signe et la valeur de a^m sachant que $a < -1$ et que m est un entier négatif impair.

Donnons un exemple numérique de cette situation, soit $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}$.

Par la troisième loi des exposants, $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{5}\right)^3$.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{64}{125}$$

$-\frac{64}{125}$ est de signe négatif et se situe entre -1 et 0.

Nous pouvons donc déduire que a^m est de signe négatif et que $-1 < a^m < 0$.

? Sauriez-vous décrire le signe et la valeur de a^m sachant que $-1 < a < 0$ et que m est un entier négatif impair ?

....

Vous avez répondu $a^m < -1$? Bravo!
Nous pouvons donner un exemple numérique de cette situation, soit $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}$.
Par la troisième loi des exposants, $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{4}\right)^{3}$.
$\left(-\frac{5}{4}\right)^{3} = \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64}$ et $-\frac{125}{64}$ est plus petit que -1.
Nous pouvons donc déduire que $a^m < -1$.

Cette manière de résoudre ce type de problèmes est relativement simple. Toutefois, il faut en venir à décrire la valeur et le signe d'une puissance donnée sans toujours recourir à un exemple numérique. Pour y arriver nous avons quelques atouts entre les mains.

Nous savons que toute base affectée d'un exposant positif pair donne un résultat positif. Ainsi donc, si $a > 1$ ou $a < -1$ alors $a^m > 1$. Par exemple, $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$. De la même façon, si $0 < a < 1$ ou $-1 < a < 0$, alors $0 < a^m < 1$. Par exemple, $\left(\frac{1}{5}\right)^{2} = \frac{1}{25}$ et $\left(-\frac{1}{5}\right)^{2} = \frac{1}{25}$.

C'est bien sûr le cas le plus simple.

? D'après-vous, quelle est la valeur de a^m si $m > 0$ et impair et que $a > 1$ ou que $a < -1$?

....

? Maintenant, quelle est la valeur de a^m si $m > 0$ et impair et que $0 < a < 1$ ou que $-1 < a < 0$?

....

Si dans le premier cas vous avez répondu $a^m > 1$ ou $a^m < -1$, vous avez raison. En effet, $5^3 = 125$ ou $(-5)^3 = -125$. De même, $0 < a^m < 1$ ou $-1 < a^m < 0$ dans le deuxième cas. Pour vous en convaincre sachez que $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ et que $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$.

Ça va jusqu'ici ? Oui ! Alors poussons plus loin notre analyse et regardons ce qui se passe lorsque $m < 0$.

? Que savons-nous lorsque $m < 0$? En fait, quel est notre atout?

....

En effet, nous devons inverser la base et à partir de là nous pouvons faire les mêmes raisonnements que pour les cas précédents.

Soit m un exposant négatif pair. Si $a > 1$ ou $a < -1$, alors $0 < a^m < 1$. Vous n'êtes pas convaincu, alors regardez ceci : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ et $(-5)^2 = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$.

Par contre, si m est négatif impair alors $0 < a^m < 1$ ou $-1 < a^m < 0$: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ et $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$.

? Quelle est la valeur de a^m si $m < 0$ et pair et si $0 < a < 1$ ou $-1 < a < 0$?

....

? Et si m est impair ?

....

Réponse

Dans le premier cas $a^m > 1$ $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 25\right)$ et $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{1}\right)^2 = 25\right)$ tandis que pour la deuxième question $a^m > 1$ ou $a^m < -1$ $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 125\right)$ et $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = (-5)^3 = -125\right)$.

Jusqu'ici nous avons prouvé chacune de nos affirmations avec des exemples numériques. Serez-vous capable de faire l'exercice suivant sans y avoir recours?

Exercice 1.6

1. Décrivez le signe et la valeur de a^m sachant que :

   a) $a < -1$ et que m est un entier positif pair. ....

   b) $a < -1$ et que m est un entier négatif pair. ....

   c) $-1 < a < 0$ et que m est un entier négatif impair. ....

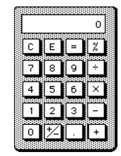
   d) $0 < a < 1$ et que m est un entier négatif impair. ....

   e) $a < -1$ et que m est un entier positif impair. ....

Le moment est venu de faire le point. Les exercices de consolidation qui suivent vous permettront de vérifier si vous avez compris les notions présentées dans ce sous-module. Si vous éprouvez des difficultés en effectuant ces exercices, relisez les passages du texte qui les concernent. Le contenu de ce sous-module est la « base » de ceux qui vont suivre; mieux vaut l'assimiler parfaitement.

1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. En appliquant la loi des exposants adéquate, calculez la valeur numérique ou algébrique des expressions suivantes.
   N.B. – Arrondissez vos réponses au millième près.



   a) $0{,}7^{-2} =$ ....

   b) $-3y^2 \times y^{-1} =$ ....

   c) $2^{\frac{1}{2}} \times -(2)^2 =$ ....

   d) $3y^2 \div 2y =$ ....

   e) $\dfrac{-8{,}1c^2}{0{,}9c^2} =$ ....

   f) $\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$ ....

   g) $(x^2)^{\frac{1}{3}} =$ ....

   h) $\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right)^4 =$ ....

i) $(1{,}4^3 \times 2{,}2^{-1})^2 =$ ....

j) $\left(m^3 n^{\frac{1}{2}} p^2\right)^{-2} =$ ....

k) $-1{,}6^{-3} =$ ....

l) $(-3)^{-2} =$ ....

m) $3x^2 \times 2x^{-1} =$ ....

n) $\dfrac{2}{3}y^2 \div \dfrac{1}{6}y^3 =$ ....

o) $\dfrac{1}{3}y^{-2} \times \dfrac{1}{8}y^2 =$ ....

p) $\dfrac{3a^{-4}}{2a^{-5}} =$ ....

q) $6x^3 \div 2x^3 =$ ....

r) $\left(\dfrac{1{,}2^2}{0{,}4^3}\right)^{-2} =$ ....

s) $1{,}5 \times 10^{3} \times 0{,}4 \times 10^{-2} =$ ....

t) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{4}\right]^{-1} =$ ....

u) $\left(8^{-3} \times 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} =$ ....

2. a) En 1988, la dette du gouvernement fédéral s'élevait à environ 310 000 000 000 $. Exprimez ce nombre en notation scientifique.

....

b) La masse de la Lune est d'environ $7{,}36 \times 10^{22}$ kg. Exprimez ce nombre en notation décimale.

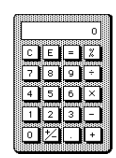
....

c) La masse au repos d'un électron est de 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg. Exprimez ce nombre en notation scientifique.

....

d) Combien de chiffres comporte le nombre 3^{45}.

....



3. Décrivez le signe et la valeur de a^{m} sachant que :

a) $a > 1$ et que m est un entier négatif pair. ....

b) $-1 < a < 0$ et que m est un entier positif impair. ....

4. Laquelle des expressions suivantes est égale à $(5x^6)^{-2}$?

A) $\dfrac{25}{x^2}$ .... B) $\dfrac{5}{x^6}$ .... C) $25x^4$......... D) $\dfrac{1}{25x^{12}}$ .... E) $5x^4$.........

F) $\dfrac{x^{12}}{25}$ .... G) $\dfrac{1}{5x^{12}}$ .... H) $\dfrac{1}{5x^4}$ .... I) $\dfrac{1}{25x^4}$ ....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

1. En des termes qui vous sont propres, écrivez les sept lois des exposants et donnez un exemple concret de chacune d'elles.

1° ....

....

....

Exemple : ....

2° ....

....

....

Exemple : ....

3° ....

....

....

Exemple : ....

4° ....

....

....

Exemple : ....

5° ....

....

....

Exemple : ....

6° ....

....

....

Exemple : ....

7° ....

....

....

Exemple : ....

2. Complétez les phrases suivantes en inscrivant dans les espaces laissés en blanc les termes ou expressions volontairement omis.

a) La puissance d'une base positive est .... La puissance d'une base négative est .... lorsque l'exposant est pair. La puissance d'une base .... est négative si l'exposant est impair.

b) Lorsqu'une base est affectée d'un exposant négatif, il suffit de prendre l'... de la base et de changer le .... de l'exposant pour obtenir une expression équivalente dans laquelle l'exposant est ....

c) Soit a un nombre décimal supérieur ou égal à 1 et inférieur à 10 et n un nombre naturel. Le nombre $a \times 10^n$ se transforme en notation décimale en déplaçant la virgule de cadrage de a de n positions vers la .... Le nombre $a \times 10^{-n}$ se transforme en notation décimale en déplaçant la virgule de cadrage de a de n positions vers la ....

d) Pour exprimer un nombre en notation scientifique, nous devons :
1° déplacer la virgule de cadrage à .... du premier chiffre non nul;
2° compter de combien de positions nous avons déplacé la virgule de cadrage;
3° inscrire ce nombre comme exposant de la base 10 :
a) cet exposant est .... si la virgule de cadrage a été déplacée vers la gauche;
b) cet exposant est .... si la virgule de cadrage a été déplacée vers la droite.

e) Soit un exposant m entier positif :
1° si $a > 1$ alors a^m 1;
2° si .... alors $0 < a^m < 1$.

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

La notation scientifique est à l'honneur

Convertissez en notation scientifique les nombres mentionnés dans les problèmes ci-dessous et effectuez le calcul en vous servant de cette même notation. Attention aux unités!

1. À chaque seconde, plus de 840 000 000 000 gouttes d'eau tombent des chutes Niagara. Chacune de ces gouttes d'eau contient 1 700 000 000 000 000 000 000 molécules. Calculez le nombre de molécules d'eau qui tombent en une seconde.

   ....

   ....

2. La circonférence de la Terre mesure approximativement 40 000 km.

   a) Si le son se propage à la vitesse de 340 m/s, combien de temps lui faudra-t-il pour effectuer le tour de la Terre?

      ....

      ....

      ....

      ....

b) La vitesse de la lumière est de 300 000 km/s. Combien de fois fait-elle le tour de la Terre en 1 minute?

c) Nous disons d'un avion qu'il vole à Mach 2 lorsque sa vitesse atteint le double de celle du son. Combien de temps un tel avion met-il pour faire le tour de la Terre?

....

....

....

....

....

....