MAT-4102-1

GÉOMÉTRIE III

sofad

MAT-4102-1

GÉOMÉTRIE III

sofad

Responsable des mathématiques : Jean-Paul Groleau

Rédacteur et rédactrice : Jacques Gravel
Suzie Asselin

Réviseurs du contenu : Jean-Paul Groleau
Daniel Gélineau

Réviseir pédagogique : Jean-Paul Groleau

Réviseures linguistiques : Marie Rose Vianna
Francine Cardinal

Édition électronique : P.P.I. inc.

Réimpression : 2009

Dépôt légal — 2004
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada
ISBN 978-2-89493-268-1

TABLE DES MATIÈRES

SOUS-MODULES

PRÉSENTATION DE L'ORDINOGRAMME

BIENVENUE AU ROYAUME DES MATHÉMATIQUES!

Ce programme de mathématiques a été élaboré pour la clientèle adulte des Services d'éducation des adultes des commissions scolaires et de la formation à distance. Les activités d'apprentissage qu'il contient ont été conçues pour être réalisées en apprentissage individualisé. Toutefois, si vous éprouvez des difficultés, n'hésitez pas à consulter votre formatrice ou votre formateur ou à téléphoner à la personne-ressource qui vous a été assignée. Le tableau qui suit situe dans le programme le module que vous avez entre les mains. Il vous permet de visualiser le chemin parcouru ou qui vous reste à parcourir selon l'objectif professionnel que vous poursuivez. Suivant les exigences de votre objectif professionnel, plusieurs voies de sortie du royaume des mathématiques sont prévues.

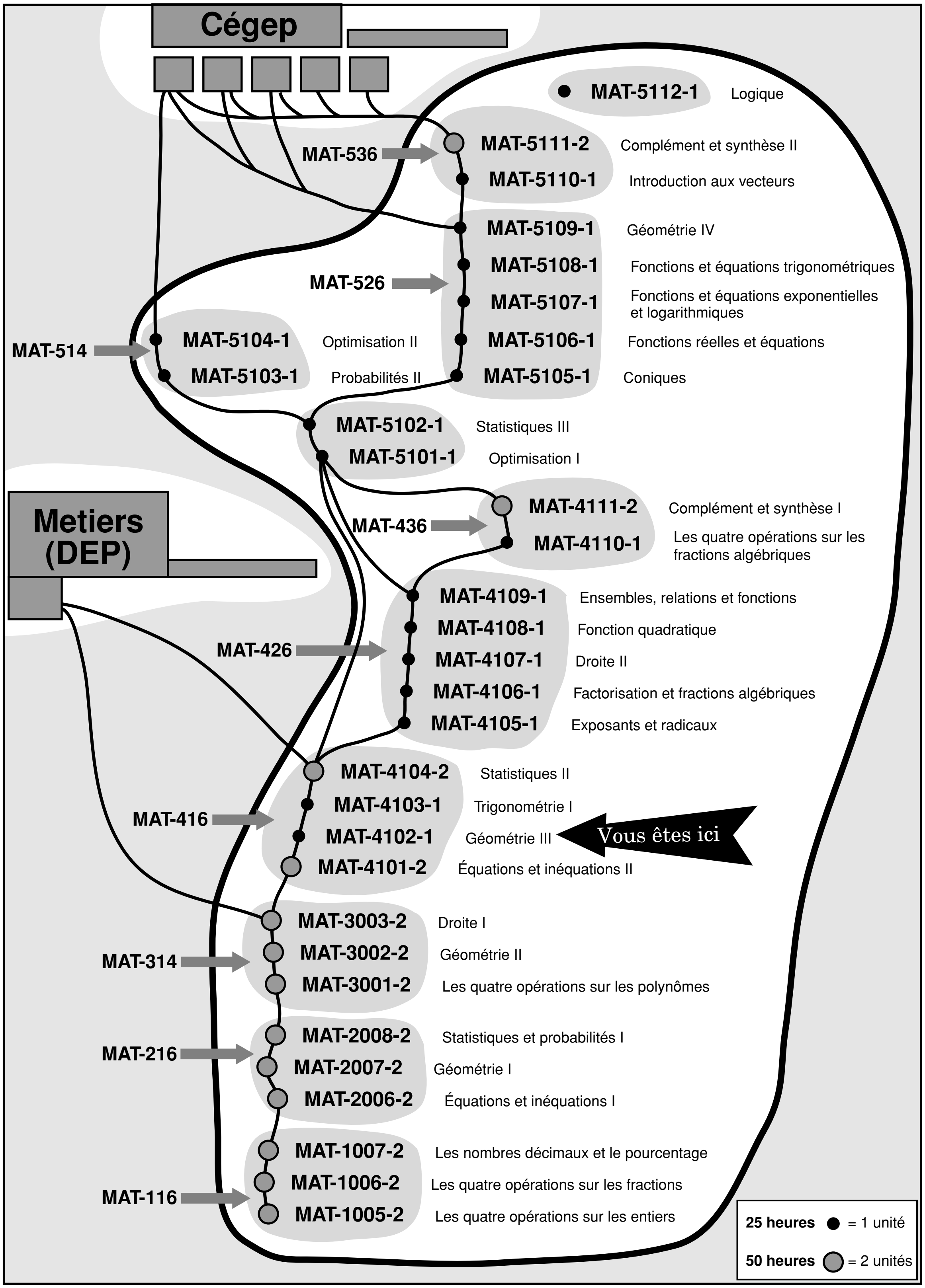
Les premières voies, les routes MAT-3003-2 (MAT-314) et MAT-4104-2 (MAT-416), vous permettent d'entreprendre des études menant à un diplôme d'études professionnelles (DEP).

Les routes MAT-4109-1 (MAT-426), MAT-4111-2 (MAT-436) et MAT-5104-1 (MAT-514), vous permettent d'obtenir un diplôme d'études secondaires (DES) qui donne accès à certains programmes d'études collégiales (cégep) n'exigeant pas de compétences particulières en mathématiques avancées.

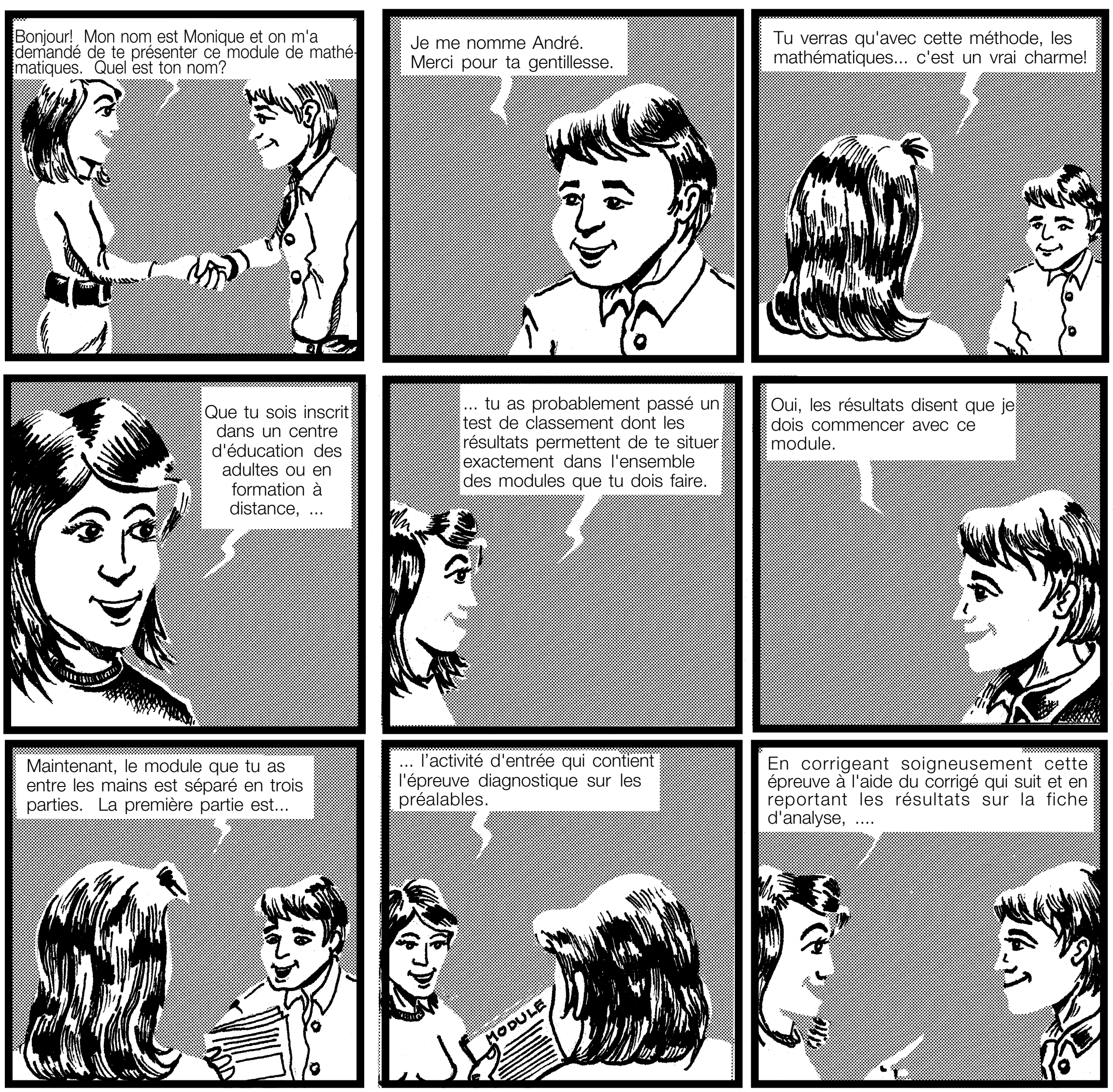
Finalement, les routes MAT-5109-1 (MAT-526) et MAT-5111-2 (MAT-536) vous permettent d'accéder au collège (cégep) dans des programmes qui exigent de solides connaissances en mathématiques et où d'autres défis vous attendent. Bonne route!

Si c'est votre premier contact avec ce programme de mathématiques, après avoir examiné l'ordinogramme du programme, lisez « Comment utiliser ce guide »; sinon, passez directement à la partie intitulée « Introduction générale ». Bon travail!

ORDINOGRAMME DU PROGRAMME



COMMENT UTILISER CE GUIDE?



DÉPART

La ligne de départ montre le **début** de l'apprentissage.

Le petit point d'interrogation blanc identifie les **questions** dont les réponses sont à l'intérieur du texte.

La cible signale l'**objectif** à atteindre.

rappel

Le bloc-notes indique un **rappel** des notions que tu as étudiées auparavant.

Le point d'interrogation en gras identifie les **exercices** de consolidation qui te permettront de mettre en pratique ce que tu viens d'apprendre.

La **calculatrice** te rappelle à quel moment t'en servir.

La gerbe de blé identifie une **synthèse** qui te permet de faire le point sur ce que tu viens d'apprendre. Ce logo répété plusieurs fois signifie que tu approches de la fin du module. C'est la synthèse finale qui te permet de faire le lien entre tous les apprentissages du module.

ARRIVÉE

Finalement, la ligne d'arrivée indique qu'il est temps de passer à l'**autoévaluation** pour vérifier si tu as bien assimilé les apprentissages réalisés.


Il y a aussi beaucoup de choses amusantes dans ce module. Par exemple, lorsque tu vois la figure d'un sage, c'est un «Saviez-vous que...?».
«Saviez-vous que...?»
Oui, par exemple, de petites notes sur l'histoire des mathématiques, des jeux amusants. C'est intéressant et cela te calme en même temps.
Dois-je mémoriser ce que dit le sage?
Non, cela ne fait pas partie de l'apprentissage; c'est un peu comme un moment de détente.
C'est la même chose pour « La page des mathophiles » qui signifie : qui aiment les mathématiques.
C'est tellement stimulant que, même si tu n'es pas obligé de la travailler, tu as envie de la faire.
Et puis, tout au long du module, les auteurs se sont arrangés pour te faciliter la tâche...
... ainsi, les mots en italiques gras apparaissent dans le glossaire à la fin du module...
PARFAIT!
... les passages encadrés t'indiquent qu'il s'agit de points à retenir comme des définitions, des formules, des règles, etc. Je te le dis, c'est plus facile.
Enfin, la troisième partie contient la synthèse finale qui vient faire le lien entre les différentes parties du module.
De plus, tu y trouveras une épreuve d'autoévaluation ainsi que son corrigé. Tu sauras à ce moment-là si tu es prêt pour l'examen final.
Merci, Monique, tu m'as rendu un grand service.
Tout le plaisir est pour moi.
Maintenant, je me sauve. Au revoir!
Plus tard...
C'est fantastique! Je n'aurais jamais cru aimer les mathématiques autant que ça.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

FIGURES CONGRUES ET FIGURES SEMBLABLES

En sciences, en photographie, en arpentage, en architecture, en menuiserie, dans les travaux d'usinage et en géographie, nous appliquons les propriétés des figures congrues et des figures semblables. Ces notions sont également très utiles lorsque nous devons lire ou tracer un plan à l'échelle et lorsque nous avons à calculer des distances au moyen d'une carte routière. Cependant, nous utilisons souvent ces propriétés de façon machinale. La théorie exposée dans ce module nous permettra d'approfondir ces connaissances.

Pour commencer, nous nous pencherons sur deux types de **transformation géométrique** : les **transformations isométriques**, aussi appelées **isométries**, et l'**homothétie**. Une transformation isométrique convertit une figure géométrique donnée en une autre qui a la même forme et les mêmes dimensions que la figure d'origine. Ces deux figures sont donc congrues. Notons que les isométries sont : la **translation**, la **rotation** et la **réflexion**. Par ailleurs, une homothétie transforme une figure géométrique donnée en une autre dont la forme est la même mais dont les dimensions sont différentes. Nous disons alors que ces deux figures sont semblables. En d'autres termes, l'homothétie produit une image agrandie ou réduite de l'objet original.

Ensuite, nous aborderons la **construction d'un triangle** unique à partir soit de la mesure d'un angle compris entre deux côtés donnés, soit de la mesure d'un côté compris entre deux angles donnés, soit de la mesure de ses trois côtés. Nous poursuivrons par l'étude des **propriétés de congruence et de similitude des triangles**. Ainsi, si deux triangles ont un angle congru compris entre deux côtés congrus un à un (propriété C-A-C) ou un côté congru compris entre deux angles congrus (propriété A-C-A) ou encore trois côtés congrus (propriété C-C-C), nous pouvons alors conclure que ces triangles sont congrus. Par contre, pour que deux triangles soient semblables, ils doivent posséder deux angles congrus (propriété

A-A), trois côtés homologues proportionnels (propriété P-P-P) ou un angle congru compris entre deux côtés homologues proportionnels (propriété P-A-P).

Dès que nous saurons identifier les côtés homologues de deux **triangles semblables**, nous apprendrons à **calculer la longueur des côtés manquants** à partir des mesures nécessaires. Parfois, nous connaîtrons la valeur du rapport de similitude existant entre les côtés homologues de ces triangles. Nous rencontrerons également des cas où ce rapport n'est pas connu. Comme ces notions de similitude s'appliquent également aux **polygones semblables**, nous pourrons alors déterminer la longueur des côtés manquants de deux polygones semblables pour lesquels nous connaissons les mesures nécessaires.

Par la suite, nous considérerons les **plans tracés à l'échelle**. En réalité, le plan d'un objet est une image réduite semblable à l'objet réel. L'échelle du plan est le rapport de similitude existant entre ces deux figures. Nous pourrons donc mettre en application les notions déjà acquises pour calculer une mesure réelle à partir d'un plan dont l'échelle est connue. Inversement, nous verrons comment déterminer la longueur des segments de droite dans le but de tracer le plan d'un objet à une échelle donnée.

Enfin, nous utiliserons ces nouvelles notions pour **résoudre des problèmes** reliés à divers domaines de l'activité humaine tels la photographie, l'arpentage, la menuiserie, les travaux d'usinage et la géographie qui renferment des notions de similitude et de congruence des figures.

OBJECTIFS INTERMÉDIAIRES ET TERMINAUX DU MODULE

Le module MAT-4102-1 comporte huit sous-modules et prévoit une durée d'apprentissage de vingt-cinq heures réparties, tel qu'il est indiqué dans le tableau ci-dessous. Les objectifs terminaux sont en caractères gras.

Objectifs	Nombres d'heures*	% (évaluation)
1	4	10 %
2	4	10 %
3	5	20 %
4	4	25 %
5	2	5 %
6 à **8**	5	30 %

* Une heure est réservée à l'évaluation finale.

1. Transformations isométriques : translation, rotation et réflexion

Reconnaître, dans un ensemble d'illustrations représentant des transformations isométriques de figures géométriques :

- **celles qui illustrent une translation,**
- **celles qui illustrent une rotation,**
- **celles qui illustrent une réflexion,**

et tracer, à l'aide de la règle graduée, de l'équerre, du compas et du rapporteur, les images de figures géométriques simples subissant les isométries suivantes :

- **une translation *t*, étant donné la longueur et le sens du déplacement,**
- **une rotation *r*, étant donné la position du centre de rotation et la mesure de l'angle de rotation,**
- **une réflexion *s*, étant donné la position de l'axe de réflexion.**

2. Homothétie et figures semblables

Construire, à l'aide de la règle graduée et de l'équerre, l'image d'une figure géométrique par une homothétie *h*, étant donné la position du centre d'homothétie (O) et le rapport d'homothétie (*k*). La valeur de *k* peut être positive ou négative. De plus, reconnaître, parmi un ensemble d'illustrations représentant des transformations géométriques, celles qui illustrent une homothétie *h*.

3. Triangles congrus et triangles semblables

Construire un triangle unique à l'aide de la règle graduée, du rapporteur et du compas, étant donné l'un ou l'autre des groupes de mesures suivants :

- **un angle et les deux côtés qui forment cet angle,**
- **deux angles et le côté compris entre ces angles,**
- **les trois côtés.**

De plus, déterminer, en appliquant les propriétés des triangles congrus et celles des triangles semblables, la congruence ou la non-congruence de même que la similitude ou la non-similitude de deux triangles pour lesquels les mesures de quelques angles et de quelques côtés sont données. Chaque affirmation doit être accompagnée de sa justification.

4. **Calcul de la longueur des côtés dans deux triangles semblables**

   Calculer la mesure de un ou plusieurs côtés de l'un ou l'autre des deux triangles semblables donnés à partir de :
   - **la mesure du côté homologue à chacun des côtés dont la longueur est recherchée,**

   et de
   - **la valeur du rapport d'homothétie *k* ou des mesures requises pour calculer *k*.**

   Les étapes de résolution doivent être décrites.

5. **Calcul de la longueur des côtés dans deux polygones semblables**

   Calculer la mesure de un ou plusieurs côtés de l'un ou l'autre des deux polygones semblables donnés à partir de :
   - **la mesure du côté homologue à chacun des côtés dont la longueur est recherchée,**

   et de
   - **la valeur du rapport d'homothétie *k* ou des mesures requises pour calculer *k*.**

   Les polygones ont au maximum huit côtés. Les étapes de résolution doivent être décrites.

6. Calcul de dimensions réelles à partir d'un plan tracé à l'échelle

   À partir d'un plan à l'échelle illustrant une situation de la vie courante, appliquer les propriétés des figures semblables pour résoudre un problème à données textuelles qui demandent le calcul de distances réelles.

7. Méthode de tracé d'un plan à l'échelle à partir de mesures réelles

   Appliquer les propriétés des figures semblables à la résolution de problèmes exigeant la construction d'un plan à l'échelle, à l'aide de la règle graduée et de l'équerre, étant donné un croquis illustrant une situation de la vie courante et la valeur de l'échelle numérique du plan à tracer. Seuls des angles de 90° seront représentés.

8. Résolution de problèmes liés à divers domaines de l'activité humaine et basés sur des notions de similitude ou de congruence des figures géométriques

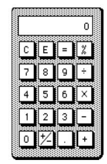
Appliquer les propriétés des figures congrues et celles des figures semblables à la résolution de problèmes nécessitant le calcul des mesures d'angles et de distances réelles, à partir de mesures indiquées sur un plan, ou de problèmes nécessitant le calcul de mesures sur un plan, à partir de mesures réelles. L'utilisation de la règle graduée, de l'équerre et du rapporteur est requise. Les croquis illustrent des situations reliées à divers domaines de l'activité humaine. Les étapes de résolution doivent être justifiées à partir des propriétés.

ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

Consignes

1° Répondez autant que possible à toutes les questions.

2° Pour répondre à ces questions, vous devez avoir les instruments suivants : une règle graduée en centimètres et en millimètres, un rapporteur et une calculatrice.



3° Inscrivez vos réponses directement sur la feuille.

4° Ne perdez pas de temps. Si vous ne pouvez répondre à une question, passez immédiatement à la suivante.

5° Dès que vous aurez répondu à toutes les questions auxquelles il vous est possible de répondre, corrigez vos réponses à l'aide du corrigé qui suit l'épreuve diagnostique.

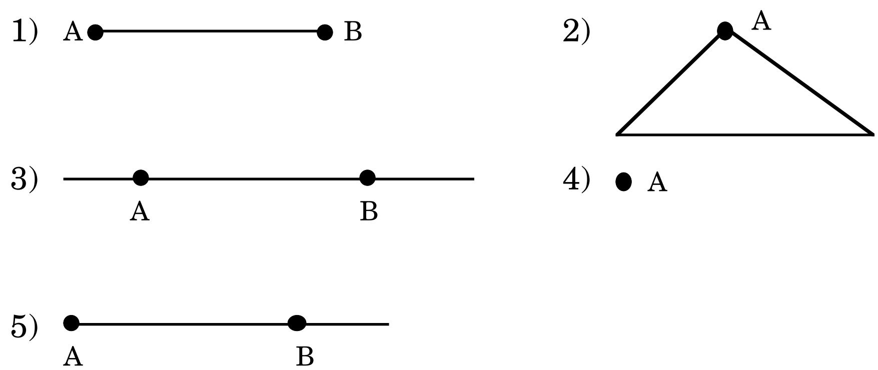
6° Vos réponses devront être exactes pour être considérées comme correctes. De plus, les différentes étapes de la résolution devront être équivalentes à celles qui sont suggérées.

7° Transcrivez vos résultats sur la fiche d'analyse des résultats de l'épreuve diagnostique qui suit le corrigé.

8° Prenez connaissance des activités de révision proposées pour chacune des réponses incorrectes.

9° Si toutes vos réponses sont exactes, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

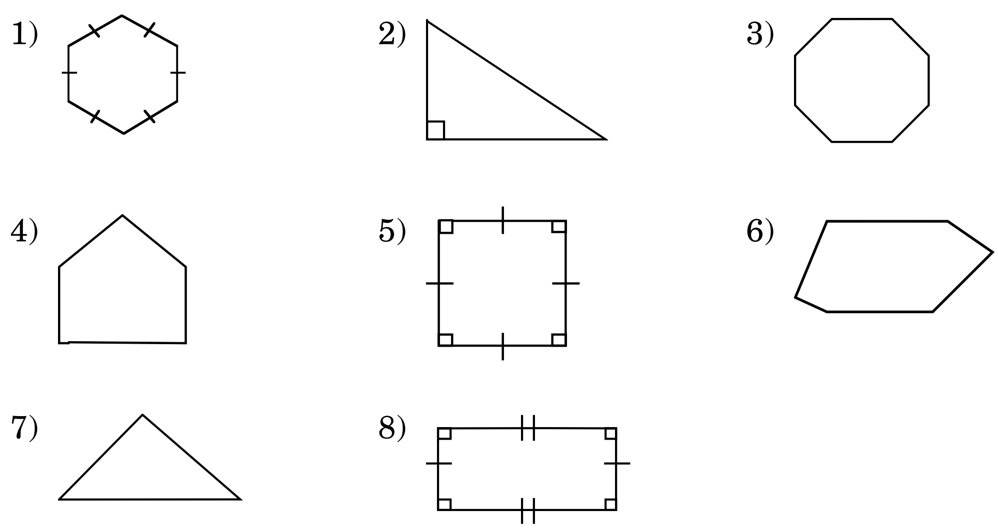
1. Soit les données illustrées ci-dessous.



Associez-les par leur chiffre à chacune des expressions suivantes.

a) Point A .... b) Droite AB ....
c) Segment de droite AB .... d) Demi-droite AB ....
e) Sommet A d'une figure ....

2. Soit les figures géométriques ci-dessous.



Associez-les par leur chiffre à chacune des expressions suivantes.

a) Pentagone .... b) Carré ....
c) Triangle .... d) Rectangle ....
e) Triangle rectangle .... f) Octogone ....
g) Hexagone .... h) Hexagone régulier ....

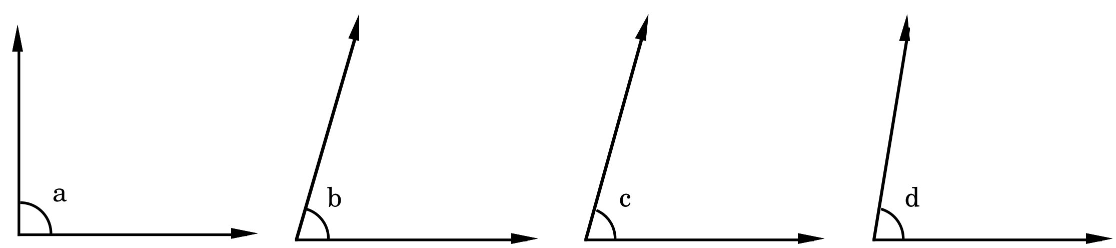
3. Soit les définitions ci-dessous.

   1) Figure fermée à quatre côtés.
   2) Figure formée par deux demi-droites de même origine.
   3) Figure fermée formée par des segments de droite.
   4) Droites qui ne se rencontrent jamais; la distance entre elles est toujours la même.
   5) Somme des mesures des côtés d'une figure fermée.
   6) Droites se coupant à un angle de 90°.
   7) Figure fermée à quatre côtés parallèles deux à deux.

Associez-les par leur chiffre à chacune des expressions suivantes.

a) Périmètre	....	b) Polygone	....
c) Quadrilatère	....	d) Parallélogramme	....
e) Angle	....	f) Droites parallèles	....
g) Droites perpendiculaires	....		

4. Soit les angles ci-dessous.



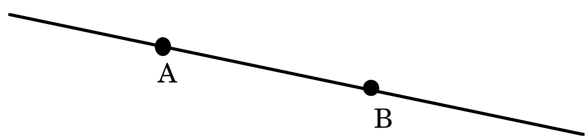
$m\angle a = 90°$ $m\angle b = 75°$ $m\angle c = 75°$ $m\angle d = 80°$

   a) L'angle droit est ....
   b) La paire d'angles congrues est ....

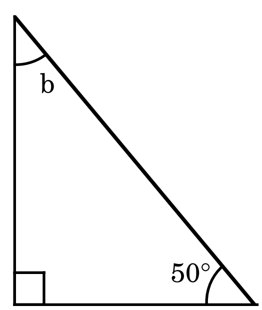
5. a) À l'aide d'une règle graduée, construisez un segment de droite AB de 3,6 cm.
   N.B. – Une précision de ± 1 mm est exigée.

b) À l'aide d'un rapporteur, construisez un angle RST de 60°.
N.B. – La construction doit être précise à 2° près.

c) À l'aide d'une équerre, construisez une droite CD perpendiculaire à la droite AB illustrée ci-dessous.



6. Quelle est la mesure de l'angle b dans le triangle représenté ci-contre?
N.B. – L'utilisation d'un rapporteur est exclue.



7. a) On sait qu'un crayon mesure 15 cm et qu'une allumette mesure 3 cm. Quel est le rapport entre la longueur de l'allumette et celle du crayon? Réduisez ce rapport à sa plus simple expression.

   b) Le périmètre d'un carré vaut 16 cm, alors que celui d'un rectangle vaut 4 cm. Quel est le rapport entre le périmètre du carré et celui du rectangle? Réduisez ce rapport à sa plus simple expression.

8. Déterminez la valeur de x dans les proportions suivantes. La solution détaillée est exigée.

   a) $\frac{1}{7} = \frac{x}{147}$ 　　　　 b) $\frac{3}{5} = \frac{81}{x}$

9. Convertissez les mesures suivantes dans l'unité demandée.

   a) 4 000 cm équivalent à .... m.
   b) 2,5 km équivalent à .... cm.
   c) 1 000 000 cm équivalent à .... km.
   d) 3 m équivalent à .... cm.

10. Résolvez les problèmes suivants en donnant les étapes du calcul effectué pour obtenir le résultat.

a) Renée et Luce collectionnent les gommes à effacer. Renée en possède 25, alors que Luce en a 33. Luce a résolu d'en accumuler plusieurs et de les offrir à Renée pour son anniversaire : chaque fois qu'elle achète 5 gommes à effacer, elle en réserve 3 pour Renée. Lorsque Luce aura acheté 45 gommes à effacer, combien pourra-t-elle en offrir à Renée?

b) Eduardo a un revenu mensuel de 1 250 \$. Il constate que son loyer lui coûte le cinquième de l'argent qu'il gagne. L'année prochaine, son employeur lui accordera une augmentation de salaire de 10 % : le revenu mensuel d'Eduardo sera alors de 1 375 \$. S'il accorde la même fraction de son salaire au paiement du loyer, quel montant d'argent Eduardo pourra-t-il verser chaque mois pour son loyer?

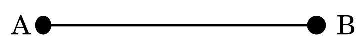
CORRIGÉ DE L’ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE SUR LES PRÉALABLES

1. a) 4 b) 3 c) 1 d) 5 e) 2

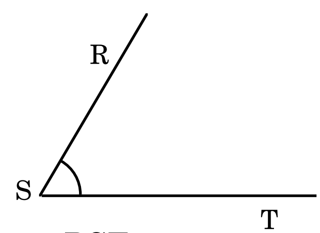
2. a) 4 b) 5 c) 7 d) 8 e) 2 f) 3
   g) 6 h) 1

3. a) 5 b) 3 c) 1 d) 7 e) 2 f) 4
   g) 6

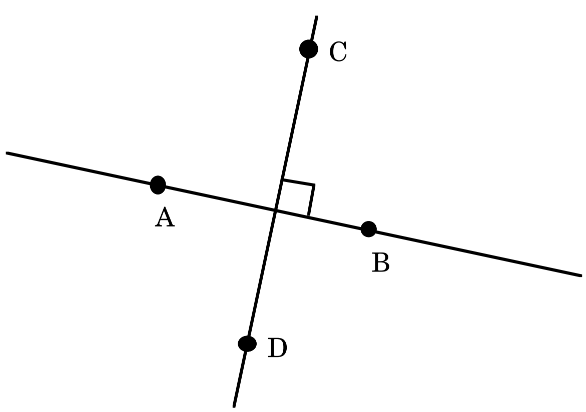
4. a) $\angle a$ b) $\angle b$ et $\angle c$

5. a)


$m\overline{AB} = 3{,}6$ cm

   b)


$m\angle RST = 60°$

   c)


N.B. – Cette droite peut couper la droite initiale en n’importe quel point pourvu qu’elle la coupe à un angle de 90°.

6. $m\angle b = 40°$, car $180° - (90° + 50°) = 40°$. La somme des mesures des trois angles d’un triangle est égale à 180°.

7. a) $\frac{3\text{ cm}}{15\text{ cm}} = \frac{1}{5}$ b) $\frac{16\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{4}{1} = 4$

8. a) $\frac{1}{7} = \frac{x}{147}$

$147 = 7x$

$\frac{147}{7} = x$

$x = 21$

b) $\frac{3}{5} = \frac{81}{x}$

$3x = 405$

$x = \frac{405}{3}$

$x = 135$

9. a) 40 m b) 250 000 cm c) 10 km d) 300 cm

10. a) Nous savons que 3 gommes à effacer sur 5 sont destinées à Renée. Nous pouvons donc écrire la proportion suivante :

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{45}$$
$$135 = 5x$$
$$\frac{135}{5} = x$$
$$x = 27$$

N.B. – Nous pouvons également dire que les $\frac{3}{5}$ du nombre de gommes à effacer seront remises à Renée, d'où $x = \frac{3}{5} \times 45 = 27$.

- Luce pourra offrir 27 gommes à effacer à Renée.

b) Son loyer mensuel pourra être égal à $\frac{1}{5}$ de son salaire mensuel :

$$\frac{1}{5} = \frac{x}{1\,375\ \$}$$
$$1\,375\ \$ = 5x$$
$$x = \frac{1\,375\ \$}{5}$$
$$x = 275\ \$$$

N.B. – Nous pouvons aussi écrire $x = \frac{1}{5} \times 1\,375\ \$ = 275\ \$$.

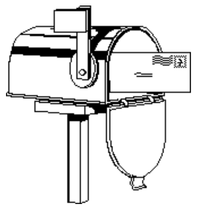
- Eduardo pourra verser 275 $ par mois pour son loyer.

ANALYSE DES RÉSULTATS DE L'ÉPREUVE DIAGNOSTIQUE

Questions	Réponses		Révision		À faire avant
	Correctes	Incorrectes	Section	Page	
1.			10.2	10.18	Sous-module 1
2.			10.3	10.18	Sous-module 1
3.			10.4	10.18	Sous-module 1
4.			10.5	10.18	Sous-module 1
5. a)			10.6	10.23	Sous-module 1
b)			10.6	10.26	Sous-module 1
c)			10.6	10.29	Sous-module 1
6.			10.7	10.33	Sous-module 3
7.			10.7	10.36	Sous-module 3
8.			10.7	10.38	Sous-module 4
9.			10.7	10.41	Sous-module 6
10.			10.7	10.4	Sous-module 1

- Si toutes vos réponses sont **correctes**, vous possédez les préalables nécessaires pour entreprendre l'étude de ce module.

- Pour chaque réponse **incorrecte**, référez-vous aux activités suggérées dans la colonne « **Révision** ». Effectuez les activités de révision avant d'entreprendre l'étude de chaque sous-module proposée dans la colonne de droite « **À faire avant** ».



SUIVEZ-VOUS CE COURS EN FORMATION À DISTANCE ?

Vous avez présentement entre les mains le matériel didactique du cours MAT-4102-1 ainsi que les devoirs qui s'y rattachent. À ce matériel est jointe une lettre de votre tutrice ou de votre tuteur. Cette lettre vous indique les différents canaux par lesquels vous pourrez communiquer avec elle ou lui (lettre, téléphone, etc.) ainsi que les heures réservées à ces prises de contact. En plus de corriger vos travaux, la tutrice ou le tuteur est la personne-ressource qui vous aidera dans votre apprentissage. Donc, n'hésitez pas à faire appel à ses services si vous éprouvez quelque difficulté.

UNE MÉTHODE GÉNÉRALE DE TRAVAIL

L'enseignement à distance est un processus d'apprentissage d'une grande souplesse, mais il exige de votre part un engagement actif. Il requiert en effet de la régularité dans l'étude et un effort soutenu. Une méthode efficace de travail vous facilitera la tâche. Un cheminement d'apprentissage constant et productif ne peut échapper aux règles suivantes.

- Fixez-vous un horaire qui vous permet d'étudier selon vos possibilités tout en tenant compte de vos loisirs et de vos activités.

- Astreignez-vous à une étude régulière et assidue.

Pour vous aider à réussir ce cours de mathématiques, voici quelques règles à suivre concernant la théorie, les exemples, les exercices et les devoirs.

La théorie

Pour assimiler correctement les notions théoriques, portez attention aux points suivants.

1° Lisez attentivement le texte et soulignez les points importants.

2° Mémorisez les définitions, les formules et les marches à suivre pour résoudre un problème donné; cela facilitera la compréhension du texte.

3° Notez, à la fin du devoir, les points que vous ne comprenez pas. Votre tutrice ou votre tuteur vous donnera alors des explications pertinentes.

4° Essayez de poursuivre votre étude même si vous butez sur un obstacle particulier. Cependant, si une difficulté importante vous empêche de poursuivre la démarche d'apprentissage, n'attendez pas d'envoyer votre devoir pour demander des explications : adressez-vous à la tutrice ou au tuteur selon les modalités prévues dans sa lettre.

Les exemples

Les exemples sont des applications de la théorie. Ils illustrent le cheminement à suivre pour résoudre les exercices. Aussi, étudiez attentivement les solutions proposées dans les exemples et refaites-les pour vous-même avant d'entreprendre les exercices.

Les exercices

Les exercices d'un sous-module respectent généralement le modèle des exemples donnés. Voici quelques suggestions pour réussir ces exercices.

1° Rédigez les solutions en prenant pour modèle les exemples présentés dans le texte. Il est important de ne pas consulter le corrigé qui se trouve à la fin du texte sur des feuilles de couleur avant d'avoir terminé les exercices.

2° Évaluez vos solutions à l'aide du corrigé uniquement après avoir fait tous les exercices. **Attention!** Vérifiez attentivement les étapes de votre solution, même si votre réponse est exacte.

3° Si vous relevez une erreur dans votre réponse ou votre solution, revoyez les notions que vous n'avez pas comprises ainsi que les exemples qui s'y rattachent. Ensuite, recommencez l'exercice.

4° Assurez-vous d'avoir réussi tous les exercices d'un sous-module avant de passer au suivant.

Les devoirs

Le cours MAT-4102-1 comprend trois devoirs. La première page de chaque devoir indique à quels sous-modules se rapportent les questions posées. Les devoirs servent à évaluer votre degré de compréhension de la matière étudiée. Ils sont également un moyen de communication avec votre tutrice ou votre tuteur.

Quand vous aurez assimilé la matière et réussi les exercices qui s'y rattachent, rédigez sans délai le devoir correspondant.

1° Faites d'abord un brouillon. Apportez à vos solutions toutes les modifications nécessaires avant de mettre au propre la réponse finale.

2° Transcrivez au crayon à mine, de préférence, les réponses ou les solutions dans les espaces en blanc du document à retourner.

3° Accompagnez chaque réponse d'une solution claire et détaillée s'il s'agit d'une question qui exige un développement.

4° Ne postez que un devoir à la fois; nous vous le retournerons après correction.

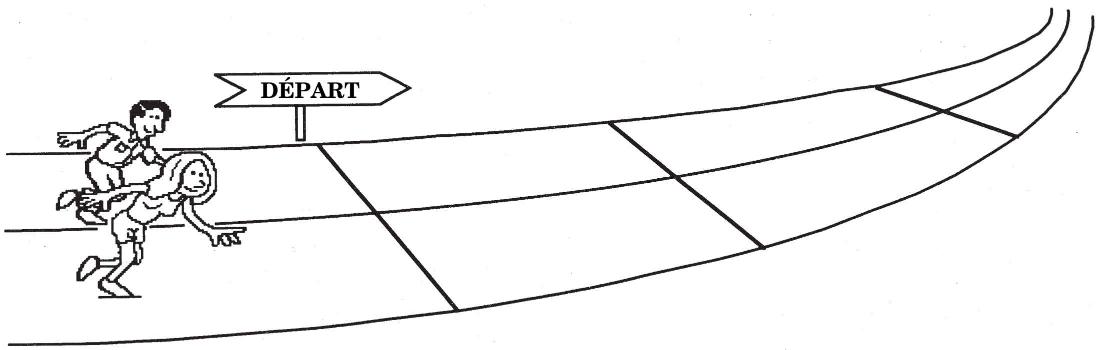
Écrivez, dans la section « Questions de l'élève », les questions que vous désirez poser à la tutrice ou au tuteur. Cette dernière ou ce dernier vous prodiguera des conseils. Elle ou il pourra vous guider dans vos études et vous orienter, si nécessaire.

Dans ce cours

Le devoir 1 porte sur les sous-modules 1 à 3.
Le devoir 2 porte sur les sous-modules 4 à 8.
Le devoir 3 porte sur les sous-modules 1 à 8.

SANCTION

Lorsque vous aurez complété tous les travaux et si vous avez maintenu une moyenne d'au moins 60 %, vous serez autorisé à passer l'examen.



SOUS-MODULE 1

TRANSFORMATIONS ISOMÉTRIQUES : TRANSLATION, ROTATION ET RÉFLEXION

1.1 ACTIVITÉ D'ACQUISITION

La chambre de Denis

Afin de briser la monotonie du décor, Denis effectue périodiquement des transformations dans sa chambre. Cette fois, il se propose d'installer un miroir au mur et de déplacer son fauteuil. Le résultat de ces changements est illustré ci-dessous.

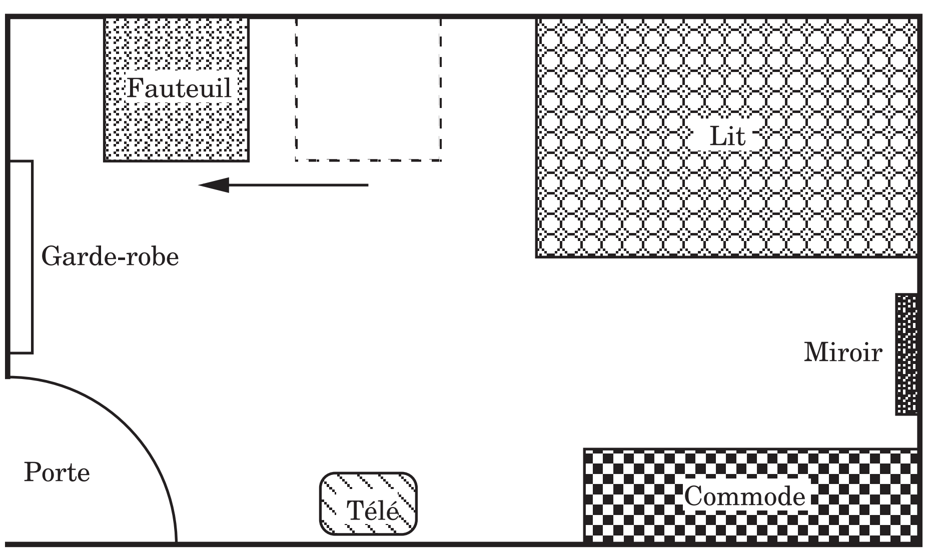


Fig. 1.1 Schéma de la chambre de Denis

Lorsqu'il a déplacé son fauteuil le long du mur, Denis a effectué une ***transformation géométrique*** que nous nommons ***translation***. Le mouvement d'une automobile qui se déplace en ligne droite ainsi que le glissement d'un tiroir que nous ouvrons ou que nous fermons sont d'autres exemples de translation.

Le soir même, Denis a regardé la télévision. Afin d'être bien installé, il a dû déplacer son fauteuil comme sur l'illustration suivante.

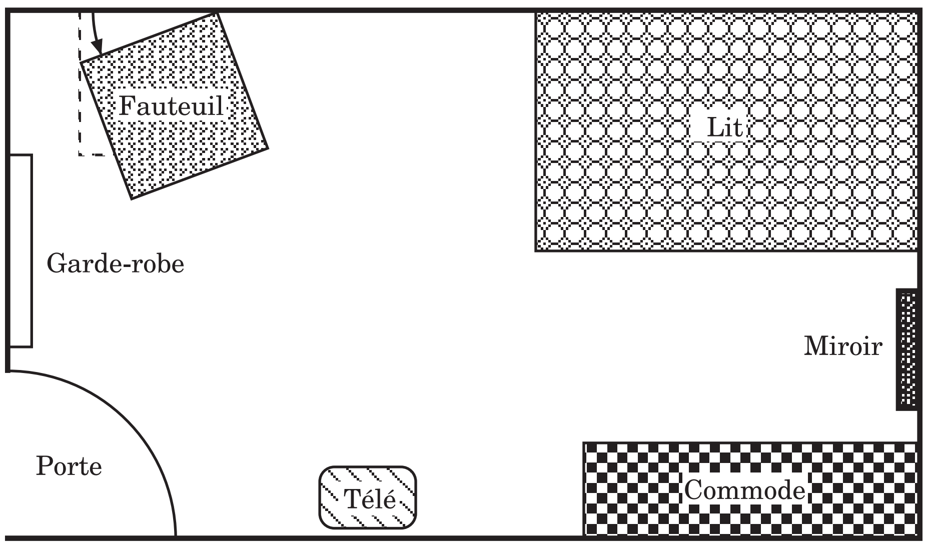


Fig. 1.2 Schéma de la chambre de Denis
à la suite du second déplacement du fauteuil

Ce type de transformation porte le nom de ***rotation***. Le mouvement des aiguilles d'une horloge, le va-et-vient d'une balançoire sont d'autres exemples de rotation.

Avant de se mettre au lit, Denis s'est regardé dans son miroir. Il a constaté que les objets qui se trouvent en réalité à sa droite apparaissent à sa gauche dans le miroir. Il s'agit d'un autre type de transformation qui se nomme ***réflexion***.

Pour atteindre les objectifs de ce sous-module, vous devrez être capable d'identifier la transformation *isométrique* (translation, rotation ou réflexion) qui a permis de transformer une figure donnée en une autre figure donnée. Vous devrez également être capable de tracer l'image d'une figure géométrique simple obtenue par la transformation géométrique (translation, rotation ou réflexion) d'une figure donnée.

Les transformations que nous venons de décrire sont des ***isométries***.

> Une **isométrie** est une transformation géométrique qui conserve les longueurs initiales. La translation, la rotation et la réflexion sont des isométries.

Autrement dit, un objet qui a subi une translation, une rotation ou une réflexion conserve les mêmes dimensions que l'objet d'origine.

Examinons à présent chacune de ces isométries.

1.1.1 La translation

> Une **translation** est le déplacement d'un objet donné dans une direction constante du plan.

Toute translation est représentée par une flèche pourvue d'un sens et montrant la longueur du déplacement à effectuer. Vous souvenez-vous, sur la figure 1.1, du premier déplacement du fauteuil dans la chambre de Denis? Le fauteuil s'est déplacé vers la gauche en respectant une direction constante : il est resté ***parallèle*** au mur. Pour construire une translation, il est donc important de pouvoir tracer une droite parallèle à une droite donnée.

rappel

Deux droites sont parallèles si la distance qui les sépare est constante.

Pour tracer une droite *d'* parallèle à la droite *d* à l'aide d'une règle et d'une *équerre*, nous devons :

1° aligner l'un des côtés de l'***angle droit*** de l'équerre avec la droite d;

2° appuyer la règle sur l'autre côté de l'angle droit de l'équerre, comme l'illustre la figure 1.3;

3° faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à l'endroit voulu en ayant soin de maintenir la règle immobile;

4° tracer la droite d' parallèle à la droite d en passant par le point P choisi.

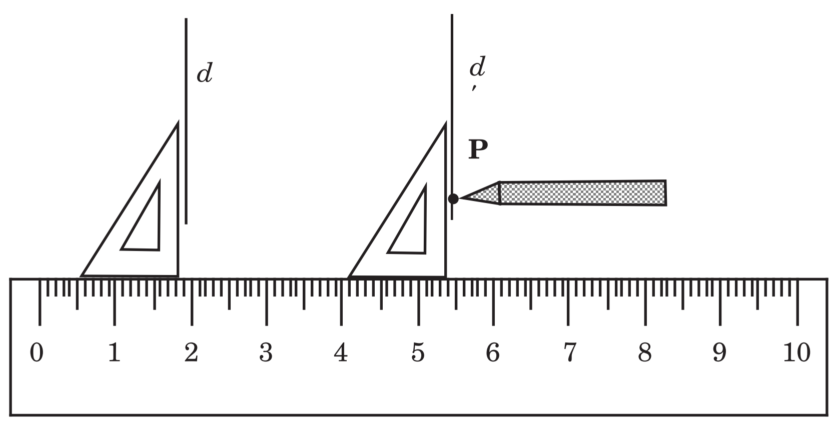


Fig. 1.3 Tracé d'une droite d' parallèle à la droite d

Nous sommes maintenant en mesure de tracer une translation.

Exemple 1

Soit le ΔABC ci-contre. Trouvons l'image de ce triangle par la translation *t*.

1° Traçons, à partir de A, une flèche de **même grandeur**, de **même sens** et **parallèle à *t*** et notons A' à l'extrémité de cette flèche. Le point A a été déplacé en A'.

2° Répétons l'opération décrite en 1° pour les points B et C. Le point B a été déplacé en B' et le point C en C'.

3° Relions les points A', B' et C'. Nous obtenons le ΔA'B'C' qui est l'***image*** par la translation *t* du ΔABC.

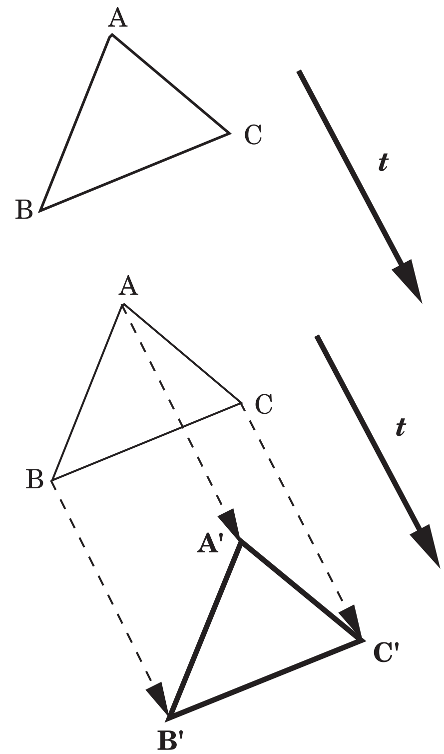


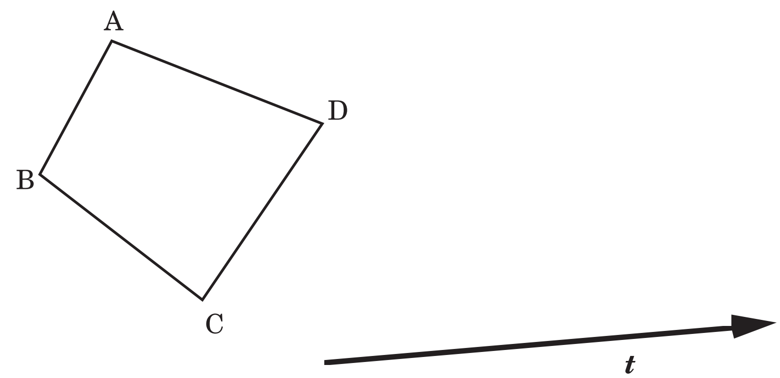
Fig. 1.4 Translation *t* du triangle ABC

N.B. – A' se lit A prime. B' se lit B prime. C' se lit C prime.

Remarques

1. Les flèches pointent toutes dans le même sens et elles sont **parallèles**.
2. Tous les déplacements sont de la même longueur que *t*.
3. Nous notons que l'image du point A par la translation *t* est *t*(A) ou A'. Il en va de même pour tout autre point de la figure.
   N.B. – *t*(A) se lit *t* de A.
4. Aucun point n'est fixe lors d'une translation.

? Opérez la translation **t** du ***quadrilatère*** ABCD illustré ci-dessous.



1° Si vous avez tracé, à partir de A, une flèche de **même grandeur**, de **même sens** et **parallèle** à ***t***;

2° si vous avez répété cette opération à partir des autres ***sommets*** du quadrilatère, c'est-à-dire des points B, C et D; et

3° si vous avez relié les points A', B', C' et D', vous avez obtenu le quadrilatère A'B'C'D' illustré à la figure 1.5 ci-dessous.

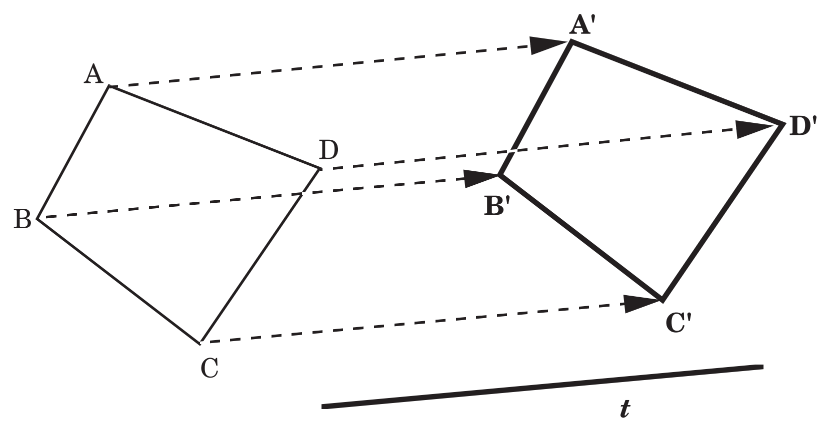


Fig. 1.5 Translation ***t*** du quadrilatère ABCD

Nous disons que le quadrilatère A'B'C'D' est l'**image** par la translation ***t*** du quadrilatère ABCD.

Propriétés de la translation

Toute translation :

1° transforme une droite en une autre droite qui lui est parallèle;

2° conserve la longueur des ***segments de droite***;

3° conserve la mesure des angles;

4° conserve l'ordre des points, c'est-à-dire que si un point se trouve au milieu de l'un des côtés d'une figure, son image se retrouvera au milieu du côté correspondant de l'image de cette figure;

5° conserve les droites parallèles entre elles, c'est-à-dire que si deux côtés d'une figure sont parallèles, ils seront également parallèles dans l'image de cette figure;

6° conserve les droites ***perpendiculaires*** entre elles, c'est-à-dire que si deux côtés d'une figure sont perpendiculaires, ils le seront également dans l'image de cette figure;

7° conserve les ***rapports*** des mesures.

Nous disons que ces propriétés sont des ***invariants*** pour la translation.

1.1.2 La rotation

Une **rotation** est le déplacement déterminé par un angle de rotation dans un sens autour d'un point nommé ***centre de rotation***.

Il existe deux sens de rotation :

1° le sens ***horaire*** ou sens de la rotation des aiguilles d'une montre, aussi nommé « sens négatif »;

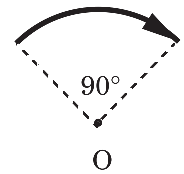


Fig. 1.6 Rotation de 90° dans le sens horaire autour du point O

2° le sens ***antihoraire*** ou sens contraire à la rotation des aiguilles d'une montre, aussi nommé « sens positif ».

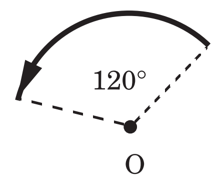
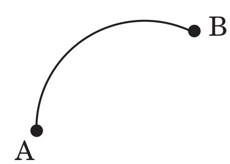


Fig. 1.7 Rotation de 120° dans le sens antihoraire autour du point O

Toute rotation est représentée par une flèche arquée qui indique le sens de rotation et la grandeur de l'angle de rotation. Le point autour duquel l'arc de cercle est tracé est le centre de rotation.

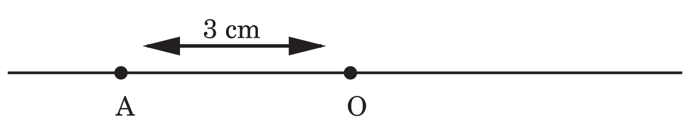
Un arc de cercle est une portion de cercle comprise entre deux points.



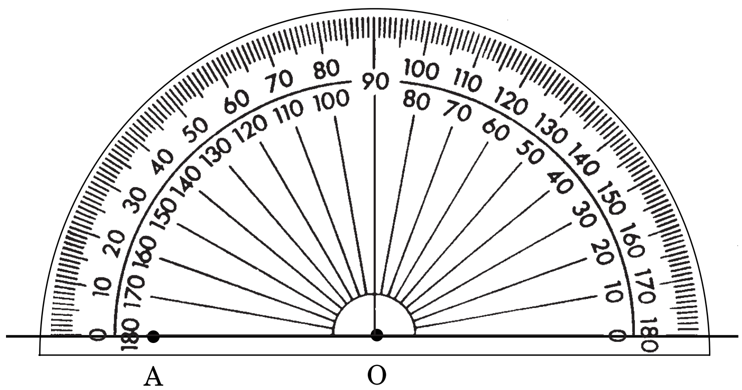
Les étapes à suivre pour tracer un arc de cercle AB à l'aide d'un rapporteur et d'un compas sont décrites ci-dessous.

Pour construire un arc de cercle de 100 ° pour lequel l'ouverture du compas mesure 3 cm, nous devons :

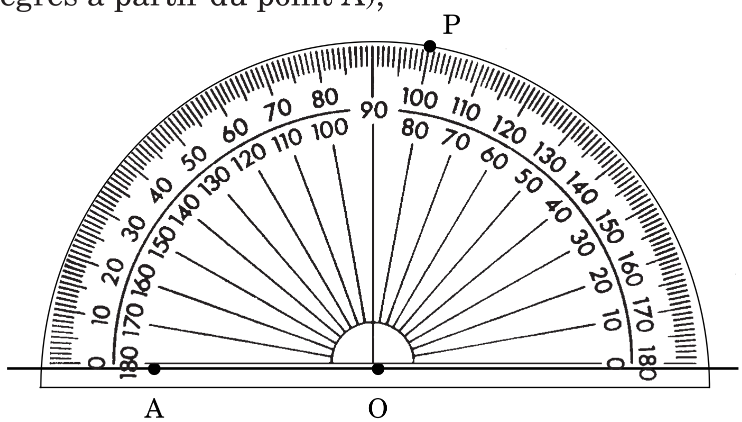
1° tracer une droite quelconque sur laquelle nous indiquons les points A et O distants de 3 cm;



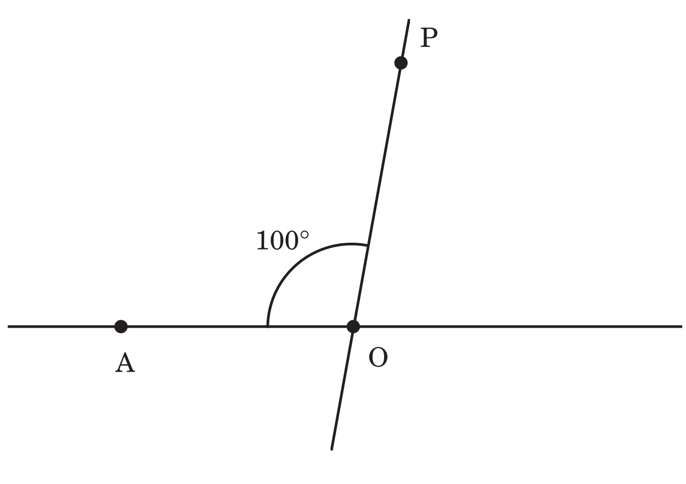
2° placer la ligne de foi du rapporteur sur cette droite en ayant soin de faire coïncider le centre du rapporteur avec le point O;



3° indiquer le point P vis-à-vis les graduations correspondant à une mesure de 100° (nous devons lire les degrés à partir du point A);

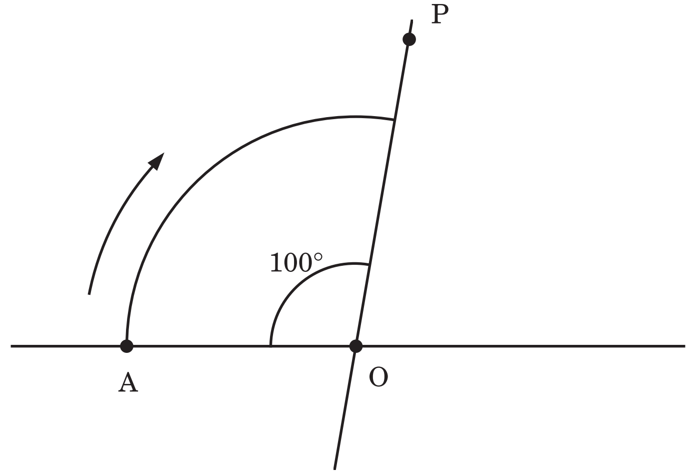


4° retirer le rapporteur et tracer la droite OP;

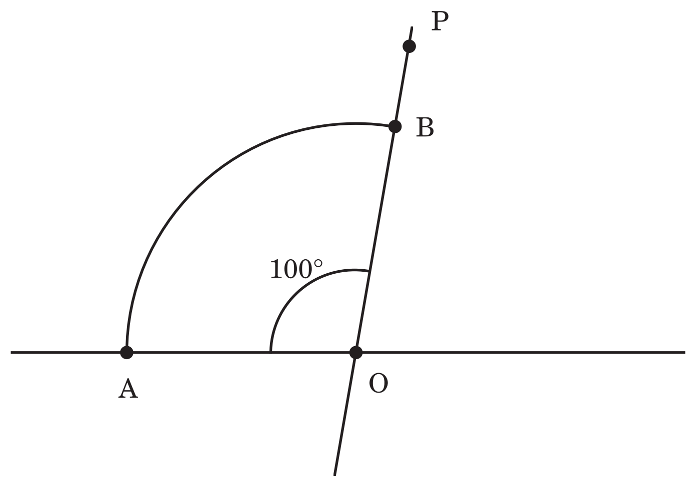


5° placer la pointe sèche du compas au point O et régler l'ouverture du compas au moyen de la vis de serrage de façon que la pointe traçeuse se trouve sur le point A;

6° à partir du point A, faire pivoter la pointe traçeuse autour du point O jusqu'à ce que le trait croise la droite OP;



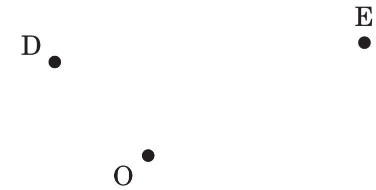
7° indiquer le point B au point de rencontre de l'arc avec la droite OP. L'arc AB est tracé.



N.B. – L'arc ne doit pas se prolonger au-delà des points A et B, car ceux-ci en fixent les limites.

Nous sommes maintenant en mesure de tracer une rotation *r* d'un point quelconque vers un autre.

Exemple 2



Soit les points D et E ci-contre. Traçons l'image de ces points par une rotation r de 90° dans le sens horaire.

1° Traçons en pointillé les segments de droite OD et OE.

2° Traçons les arcs DD' et EE' de 90° dans le sens horaire à l'aide du rapporteur et du compas ($m\angle DOD' = 90°$ et $m\angle EOE' = 90°$).

3° Les points D' et E' sont respectivement les images des points D et E par la rotation r de 90°.

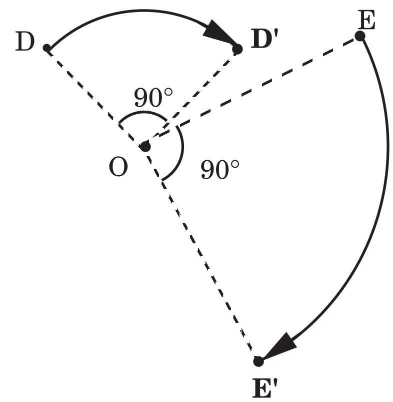
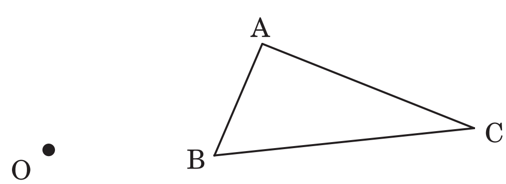


Fig. 1.8 Rotation r des points D et E autour du point O

Opérez la rotation r de 120° dans le sens antihoraire du ΔABC autour du point O.



Vous avez obtenu le ΔA'B'C' illustré à la figure 1.9 ci-dessous si vous avez :

1° tracé en pointillé le segment de droite OA;
2° tracé un arc AA' de 120° dans le sens antihoraire à l'aide d'un rapporteur et d'un compas (m∠AOA' = 120°);
3° répété l'opération pour les points B et C qui se retrouvent respectivement aux points B' et C' (m∠BOB' = 120° et m∠COC' = 120°);
4° relié les points A', B' et C' pour former le triangle A'B'C'.

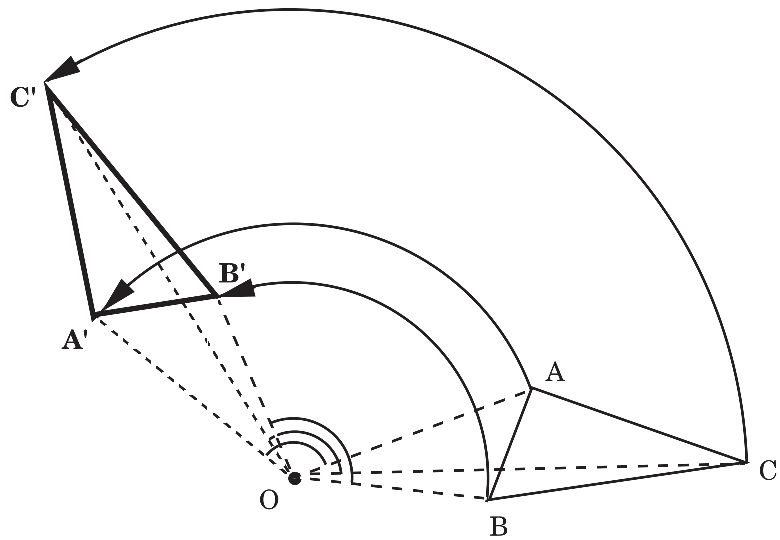


Fig. 1.9 Rotation *r* du ΔABC autour du point O

Nous disons que le ΔA'B'C' est l'image par rotation *r* du ΔABC; A' est l'image de A et il en va de même pour les points B' et C' qui sont respectivement les images de B et C.

Remarques

1. Les flèches arquées pointent toutes dans le même sens : horaire ou antihoraire.
2. Tout arc correspond au même angle de rotation.
3. L'image du point A par rotation *r* est notée *r*(A) ou A'; il en va de même pour tout point de la figure géométrique.
4. Le seul point fixe est le centre de rotation.

Propriétés de la rotation

Toute rotation :

1° transforme une droite en une autre droite;

2° conserve la longueur des segments de droite;

3° conserve la mesure des angles des figures géométriques;

4° conserve l'ordre des points;

5° conserve les droites d'une même figure parallèles entre elles;

6° conserve les droites d'une même figure perpendiculaires entre elles;

7° conserve le rapport des mesures.

Nous disons que ces propriétés de la rotation sont des **invariants**.

Saviez-vous que...

... la grande et la petite aiguille d'une horloge forment un angle droit plusieurs fois par jour?

Combien de fois cette situation se produit-elle au cours d'une période de 24 heures?

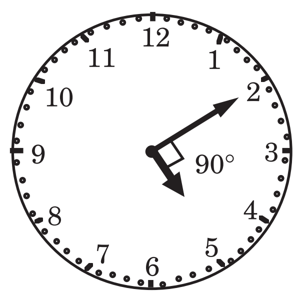


Fig. 1.10 Heure où les aiguilles d'une horloge forment un angle droit

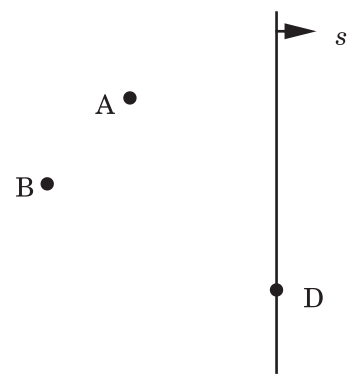
Réponse dans le corrigé des exercices.

1.1.3 La réflexion

Une **réflexion** est un retournement par rapport à une droite nommée ***axe de réflexion***.

Exemple 3

Soit à opérer la réflexion des points A, B, C, D par rapport à l'axe de réflexion *s*.



1° Du point A, abaissons une perpendiculaire en pointillé sur l'axe de réflexion *s* et prolongeons-la de l'autre côté d'une égale distance. Il s'ensuit que l'axe de réflexion passe par le milieu de $\overline{AA'}$.

2° Répétons l'opération pour les points B et C qui se retrouvent respectivement en B' et en C'.

3° La distance du point D à l'axe de réflexion étant nulle, la réflexion D' du point D se confond avec D.

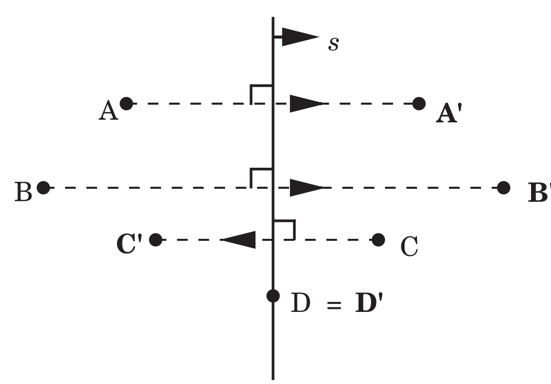
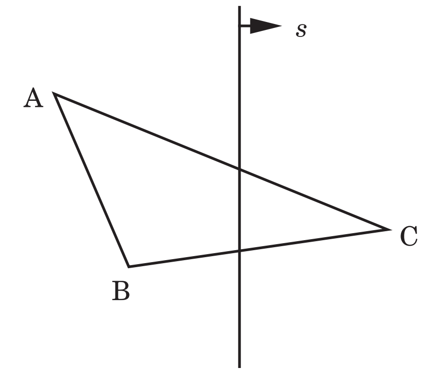


Fig. 1.11 Réflexion *s* des points A, B, C et D

? Opérez la réflexion du triangle ABC par rapport à l'axe *s*.



Pour obtenir le triangle A'B'C' illustré à la figure 1.12 ci-dessous, vous avez dû :

1° abaisser des perpendiculaires à l'axe de réflexion *s* à partir des sommets A, B et C du triangle;

2° prolonger ces perpendiculaires d'une distance égale jusqu'en A', B' et C';

3° relier A', B' et C' pour former le triangle A'B'C' qui se trouve être l'image par réflexion *s* du triangle ABC.

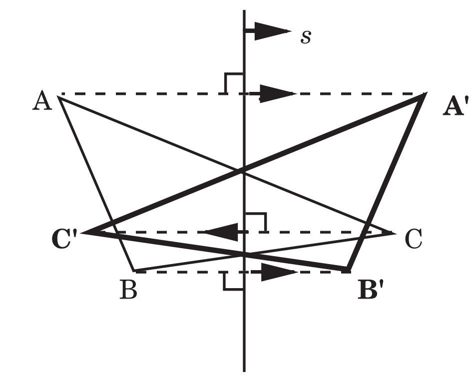


Fig. 1.12 Réflexion *s* du triangle ABC

Remarques

1. L'axe de réflexion est un ***axe de symétrie*** (droite par rapport à laquelle des points sont symétriques deux à deux).
2. L'image d'un point A obtenue par réflexion par rapport à l'axe *s* est notée ***s*(A)** ou **A'**.
3. Lorsque nous retournons d'un demi-tour une figure autour d'un axe, nous opérons une réflexion.
4. Les points situés sur l'axe de réflexion sont des points fixes, c'est-à-dire des points dont l'image coïncide avec ces mêmes points.

Propriétés de la réflexion

Toute réflexion :

1° transforme une droite en une autre droite;

2° conserve la longueur des segments de droite;

3° conserve la mesure des angles de la figure géométrique;

4° conserve l'ordre des points;

5° conserve les droites d'une même figure parallèles entre elles;

6° conserve les droites d'une même figure perpendiculaires entre elles;

7° conserve le rapport des mesures.

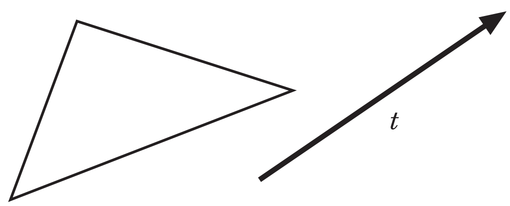
Nous disons que ces propriétés de la réflexion sont des **invariants**.

Pensez-vous pouvoir mettre ces connaissances en pratique? Si oui, passez à l'activité suivante. Sinon, relisez attentivement la théorie présentée dans ce sous-module.

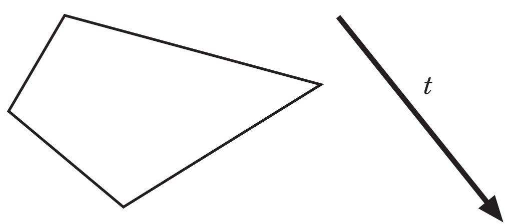
1.2 EXERCICES DE CONSOLIDATION

1. Tracez l'image de chacune des figures suivantes par la translation représentée ci-dessous.

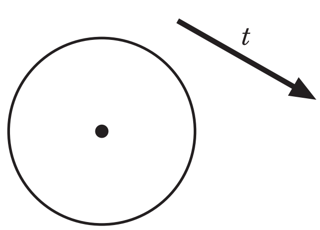
a)



b)

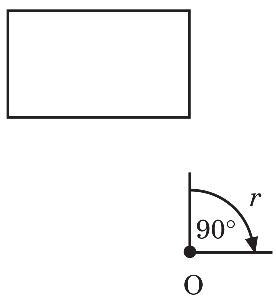


c)

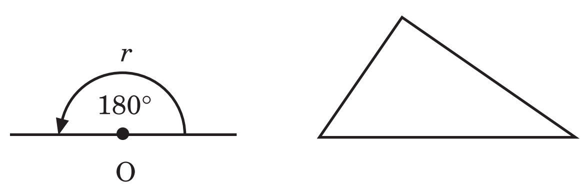


2. Tracez l'image de chacune des figures suivantes par la rotation représentée ci-dessous.

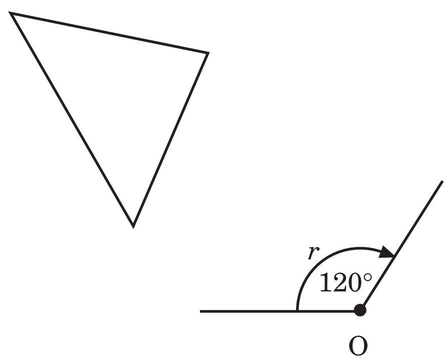
a)



b)

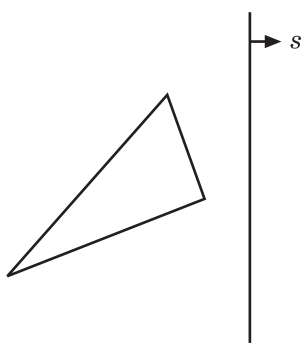


c)

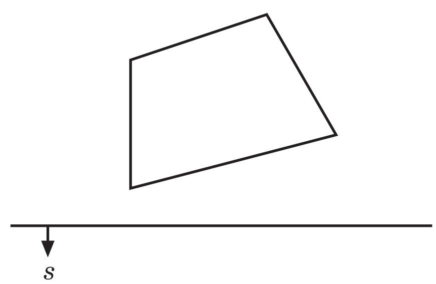


3. Tracez l'image de chacune des figures suivantes par la réflexion représentée ci-dessous.

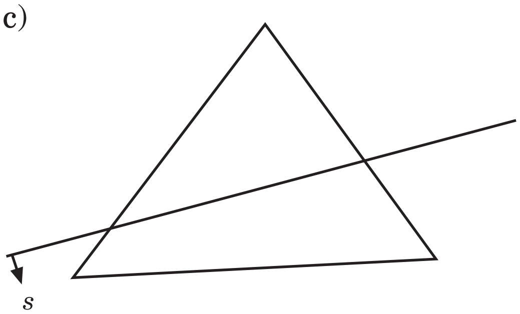
a)



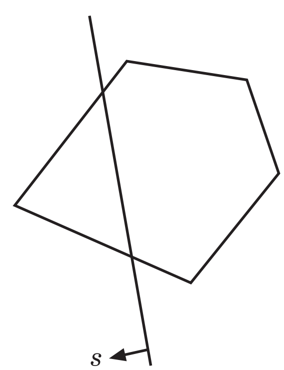
b)



c)



d)

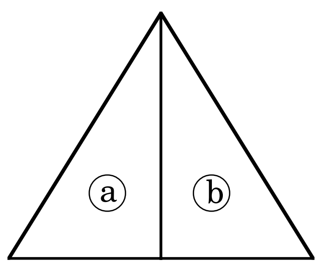


4. Identifiez l'isométrie qui transforme la figure ⓐ en la figure ⓑ.
N.B. – Il peut y avoir deux réponses valables dans certains cas.

a)

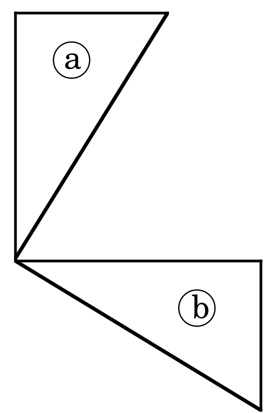
....

b)



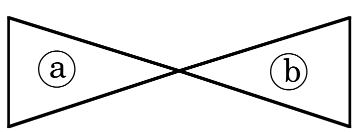
....

c)



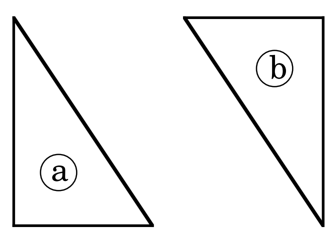
....

d)



....

e)



....

1.3 ACTIVITÉ DE SYNTHÈSE

Pour effectuer l'activité suivante, référez-vous à la théorie développée dans ce sous-module.

1. Associez correctement les cinq termes donnés à leur définition respective : isométrie, rotation, translation, invariant, réflexion.

   a) Quantité qui ne varie pas. ....

   b) Transformation géométrique qui consiste en un retournement d'une figure par rapport à une droite. ....

   c) Transformation géométrique qui conserve les longueurs. ....

   d) Transformation géométrique qui consiste en un déplacement dans une direction constante du plan. ....

   e) Transformation géométrique qui consiste en un déplacement d'une figure autour d'un point. ....

2. Complétez les phrases suivantes.

   a) Le point autour duquel s'effectue la rotation se nomme ....
   ....

   b) La droite par rapport à laquelle s'effectue la réflexion se nomme ....
   ....

   c) Le sens de rotation des aiguilles d'une montre se dit ....
   ....

3. Identifiez les sept propriétés qui sont des invariants pour les trois isométries (translation, rotation et réflexion) étudiées dans ce sous-module.

....

....

....

....

....

....

....

4. Quelle est la seule isométrie à avoir la propriété de transformer une droite en une autre droite **qui lui est parallèle**?

....

1.4 LA PAGE DES MATHOPHILES

1 rotation = 2 réflexions!

Pour trouver l'image du triangle ABC par la rotation *r* de 120° dans le sens horaire autour du point O, nous procédons selon la méthode décrite dans ce sous-module. Nous obtenons ainsi le triangle A'B'C' illustré ci-dessous.

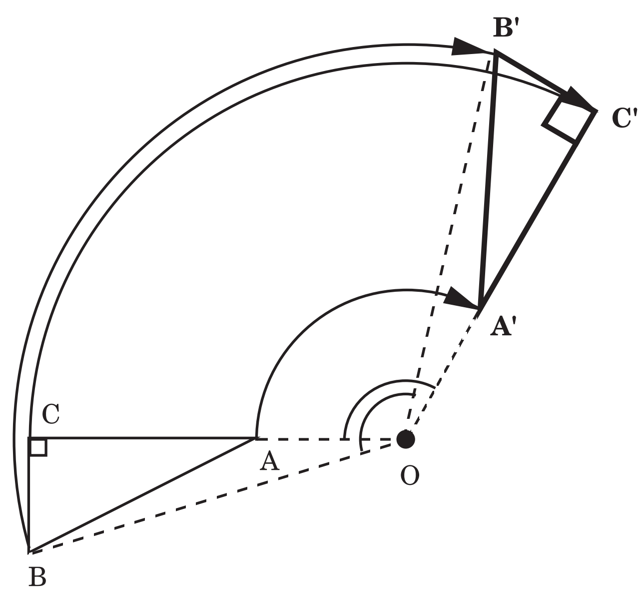


Fig. 1.13 Rotation *r* du triangle ABC autour du point O

Nous arrivons cependant au même résultat si nous effectuons une succession de deux réflexions. Observons attentivement la figure 1.14 où le triangle A''B''C'' est l'étape intermédiaire par laquelle il faut passer pour obtenir l'image A'B'C' du triangle ABC.

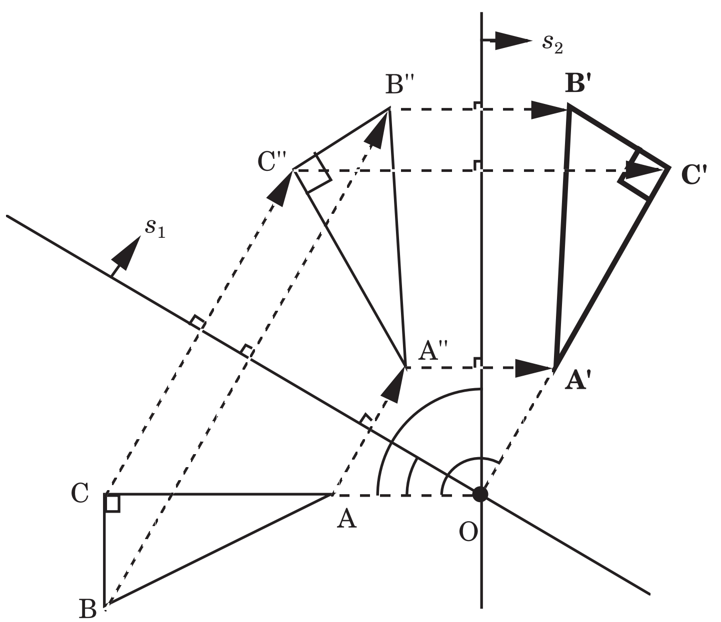


Fig. 1.14 Succession de deux réflexions s_1 et s_2 du ΔABC qui correspond à la rotation r autour du point O

Pour obtenir les axes de réflexion appropriés, nous procédons selon la démarche suivante.

1° Relions par un pointillé le point O à l'un des sommets de la figure. Prenons le point A.

2° Traçons la droite s_1 de façon à ce qu'elle forme un angle dont la mesure est égale **au $\frac{1}{4}$ de la valeur de la mesure de l'angle de rotation** par rapport au segment OA. Dans notre exemple, la mesure de cet angle vaut $\frac{1}{4} \times 120° = 30°$. Notons que cet angle est mesuré dans le sens horaire puisque la rotation doit s'effectuer dans ce sens.

3° La droite s_2 doit former un angle dont la mesure est égale aux $\frac{3}{4}$ de la valeur de la mesure de l'angle de rotation par rapport au segment OA. Dans la figure 1.14, la mesure de cet angle vaut $\frac{3}{4} \times 120° = 90°$.

Après avoir tracé les axes de réflexion, il ne nous reste qu'à trouver l'image du triangle ABC par cette suite de réflexions en appliquant la méthode expliquée dans ce sous-module. L'image A'B'C' ainsi reconstituée est équivalente à celle que nous avons obtenue par la rotation r.

À vous de jouer! Appliquez cette nouvelle méthode pour trouver l'image de la figure ci-dessous par la rotation représentée. (Il s'agit de l'exercice de consolidation 3.b) du sous-module où il fallait effectuer une rotation de 180°.)